HISTOIRE
DE
L'ACADEMIE ROYALE
DES
SCIENCES
ET
BELLES LETTRES

ANNÉE MDCCXLVIII.

A BERLIN.
CHEZ HAUDE ET SPENER,
Libraires de la Cour & de l'Academie Royale.
MDCCL.

Permis d'imprimer.

P. L. Moreau de Maupertuis
Preſident.

MEMOIRES

DE

L'ACADEMIE ROYALE

DES

SCIENCES

ET

BELLES LETTRES.

CLASSE DE PHILOSOPHIE EXPERIMENTALE.

* *
*

ESSAI
SUR LA
FORMATION DES CORPS
EN
GÉNÉRAL
PAR Mr. ELLER.

ON ſait que cette recherche a bien occupé les Philoſophes de tout tems. Les ſentiments des Anciens ſur ce ſujet étoient fort partagés; ils cherchoient pour la compoſition des Corps des principes ſimples, qui ne fuſſent point réſolubles en d'autres mixtes, & ils croyoient les rencontrer dans l'Eau & dans l'Air, auſſi bien que dans la Terre, & même dans le Feu, comme dans les quatre Elémens primitifs. Quelques uns d'entre eux n'en admettoient qu'un ſeul, d'autres en choiſiſſoient deux, quelques uns montoient jusqu'à trois, Ariſtote & ſes ſectateurs rëuniſſoient tous les quatre, & ce nombre a ſubſiſté jusqu'à nos jours; à moins qu'on ne compte auſſi les trois Principes, que quelques uns de la ſecte Cabaliſtique & Chimique ont taché de faire valoir, mais qui ne ſont pourtant autre choſe, quand on les dévelope, que les Extraits, ou prétendus principes purifiés des quatre précedens.

Les Philoſophes modernes du dernier ſiecle ont taché de pénétrer plus avant dans la recherche de ces élemens primitifs, qu'ils ſuppoſent former les Corps. Ils croyent qu'il eſt de la derniere importance de développer entierement les premieres parties, ou moſecules, qui entrent dans la compoſition des Corps, ou qui en font l'etenduë; ce qu'ils appellent *les Etres ſimples*. Quelques uns ſe contentent de leur petiteſſe inſecable, ce qui revient aux Atomes de Democrite & d'Epicure; d'autres tachent d'etablir leur diviſion à l'infini; d'autres encore regardent, avec Mr. *de Leibnitz*, ces Etres ſimples comme des parties non-etenduës, pour rendre raiſon de ce qui eſt etendu, & qui a des parties, ſelon ſon principe de la raiſon ſuffiſante, qui nous enſeigne; que les êtres etendus, ou les corps compoſés, exiſtent, parce qu'il y a des êtres ſimples, ou des *Monades*.

Les proprietés & les attributs de ces êtres ſimples occupent les eſprits de la plus-part de nos Philoſophes modernes. On n'eſt pas tout à fait d'acord, ſi ces êtres, qui aſpirent à devenir matiere, peuvent occuper un eſpace, ou non? Si ces êtres ſimples, ou ces Monades enfin, ſont doüés d'un mouvement? S'ils poſſedent une force intrinſeque, ou repreſentative? S'ils ont quelque reſſemblance entre eux, ou s'ils ſont diſſemblables à l'infini? Si cette diverſité des êtres ſimples à l'infini prouve aſſez leur exiſtence ſeparée l'un de l'autre? Si l'aſſemblage des êtres non etendus, ſeparément exiſtens, peut cauſer un corps etendu? Si chaque être ſimple, ou Monade, contient une ſuite, ou continuité de changements, qui differe de la ſuite de changements de tout autre être? &c. Je n'aurois jamais fait, ſi je prétendois faire ici le dénombrement de toutes ces contrarietés de ſentimens, dont on n'eſt pas encore d'accord, & qui entretiennent la guerre entre nos Philoſophes; mais comme leur differend n'a pas la mine d'etre vuidé ſi-tot, j'abandonne trés volontiers ces Elémens primitifs, & ces Atomes, les Points de *Zenon*, auſſi bien que les Monades de *Henri Morus* & de *Leibnitz*; d'autant plus facilement que je vois, que chacun tache de ſoutenir ſon hypotheſe par des raiſonnemens, ſans qu'on aye recours aux démonſtrations par les experiences.

Mais

Mais comme, en matiere de Phyſique, les experiences ſeules ſont le fil d'Ariadne, qui nous mene à la vraye connoiſſance de la ſtructure la plus cachée des corps, j'ai taché de pénétrer par ce moyen un peu plus avant dans cette compoſition, ayant eu le plaiſir de faire quelques découvertes, qui ſemblent montrer la nature dans ſa plus grande ſimplicité, lorsqu'elle forme des Corps.

Dans un Mémoire ſur la Nature & les proprietés des quatre Elemens, que j'ai eu l'honneur de lire à l'Academie l'année precedente, j'ai montré par des experiences inconteſtables la converſion de l'Eau dans une veritable terre fixe, homogene & inalterable dans le feu; je tacherai de prouver à preſent, que c'eſt cet élement liquide qui fournit pour la plus-part, la baſe, ou la matiere ſolide & corporelle, dans les trois régnes de la Nature. Tout le monde convient, que l'Eau eſt un corps extrémement fluide, transparent, ſans couleur, & qui n'affecte ni l'odorat, ni le gnut. Les Phyſiciens modernes ſe ſont donné beaucoup de peine pour pénétrer dans l'interieur, ou dans les parties ſimples & ſeparées, qui compoſent cet élément merveilleux; mais ils n'ont pu en venir à bout jusqu'ici, faute de meſure applicable à la petiteſſe de ſes parties conſtitutives; ce qui prouve aſſez leur parfaite homogeneité, qui ne permettra jamais, je crois, une diverſité à l'infini dans les êtres ſimples de cet Elément. Par conſéquent, le principe des Indiscernables court grand risque de ſouffrir ici quelque exception conſiderable.

Voyons à cette heure de quelle maniere l'Eau agit pour former les Corps, & premierement, les Corps des Vegetaux. Cette verité a été ſoupçonnée déja par l'ancien Philoſophe *Thales*; & le grand reſtaurateur de la Philoſophie naturelle, le Chancelier *Bacon*, en étoit convaincu, & adoptoit le meme ſentiment. *Van Helmont* le Pére l'a prouvée par l'experience faite avec un ſaule, qu'il fit croitre à une groſſeur conſiderable, en l'arroſant ſeulement avec de l'eau commune, ſans que la terre du vaiſſeau dans lequel l'arbre étoit planté, diminuât de ſon poids. Cela fut confirmé par des experiences ſemblables de *Robert Boyle*,* & le celebre *Woodward* y en a joint diverſes autres, qu'il a communiquées à la Societé Royale de Londres.

* *de Orig. form.* p. 165.

Ces épreuves, il eſt vrai, ne contentent pas ſuffiſamment un Cenſeur rigide, qui pourra objecter; que l'Eau peut diſſoudre, & renfermer aiſément dans ſon ſein une terre ſubtile, qu'elle a entrainée de partout, avant que d'entrer dans le tuyau des racines; laquelle terre ayant été dépoſée enſuite dans les fibres des vaiſſeaux de la plante pour ſon accroiſſement, laiſſe échaper l'humidité, comme ſon vehicule, au travers des pores de ſes branches & de ſes feuïlles. On pourra objecter encore, qu'on découvre dans les plantes une eſpece d'huile, ou matiere inflammable, & un eſprit acide; choſes que l'eau ſimple & élementaire ne ſauroit fournir, moins encore pourroit-elle produire par la circulation ſeule de la ſéve ces ſortes de liquides, ſi differents de la nature de l'Eau.

Ces ſortes d'objections, & autres ſemblables, que je me ſuis formées là deſſus, m'ont enfin encouragé à faire quelques nouvelles Experiences, rélatives à la Végétation par l'eau toute ſeule. Pour cette fin, j'ai pris de l'eau de fontaine, la plus pure que j'ai pu trouver, ſachant bien qu'elle doit dépoſer toutes les parties terreſtres, & heterogenes, dans le ſable, par lequel elle paſſe ſous terre; mais pour m'aſſurer d'avantage de ſa vraye pureté, je la fis paſſer tout doucement par un Alembic de verre au Bain-Marie, c'eſt a dire, par le moyen d'une eau bouïllante qui environnoit l'alembic. Par cette opération, tout ce qu'il y avoit encore de parties heterogenes s'arrêta au fond de mon alembic, & il ne coula dans le récipient qu'une eau parfaitement purifiée de toute terre; laquelle, à ce qu'on m'accordera ſacilement, ne peut pas monter ſi haut, ſurtout par un degré de chaleur, qui ne cauſe qu'une foible évaporation dans l'Eau, qu'on diſtille de cette maniere.

C'etoit donc avec l'Eau purifiée de cette facon que je fis l'epreuve de la Végétation, ayant placé dans pluſieurs flaccons de verre toutes ſortes de coupures de branches d'arbre, & ſur tout des Oignons de fleurs, qui pouſſerent bientot leur branches, feuïlles & fleurs, quoiqu'ils n'euſſent pour toute nourriture, que l'Eau purifiée de la maniere que je viens de dire. Il n'etoit pas difficile alors de déterminer la quantité, ou le poids de la terre, que cette eau par l'accroiſſement

ſement des branches avoit fourni. Car, ayant trouvé le poids de la terre qu'une branche, qui peſoit, par exemple, une once, rendit aprés ſa combuſtion & calcination, ſi donc une branche du meme poids miſe dans l'eau, peſoit apres cette Végétation une fois autant, plus ou moins, il eſt facile de déterminer alors, que la moitié des parties terreſtres qu'elle contient, a été produite de l'eau dont on l'a arroſé.

Par ces experiences je fus convaincu, que l'eau fourniſſoit la terre, comme la baſe de la ſolidité de tous les Vegetaux ; il me reſtoit encore à lever la grande difficulté, d'ou cette partie inflammable, huileuſe, ou reſineuſe, qu'on rencontre dans les plantes, peut tirer ſon origine ? Les Qualités occultes des Anciens, & les Fermens de quelques Modernes, ne me donnerent pas la moindre ſatisfaction ; je me trouvai obligé de nouveau d'avoir recours aux experiences. J'avois remarqué que la roſée & l'eau de pluve, amaſſées pendant l'Eté, quand on les renferme dans des bouteilles de verre, commencent à ſe troubler avec le tems, & dépoſent peu à peu au fonds un limon, ou matiere trouble & épaiſſe. Ce phénomene meritoit de l'attention ; j'en fis cette experience. Aprés avoir jetté l'eau qui nageoit ſur cette matiere bo rbeuſe, je la mis dans une Cornuë, & par le degré de feu que je donnai, je vis ſortir des nüages blanchatres, qui dans le récipient ſe convertiſſoient dans une eſpece d'eſprit acide, qui fût ſuivi à la fin par un peu d'huile, ou baume rougeatre, qui ſe trainoit le long du col de la cornuë.

Je croyois d'abord, que la ſolution du problême en queſtion étoit trouvée ; car je m'imaginois d'avoir découvert l'origine de l'acide, auſſi bien que de l'inflammable des plantes, que je cherchois depuis quelque tems. Mais mes réfléxions ulterieures m'apprirent, que la roſée & l'eau de pluye pourroient, en tombant, entraîner trés facilement cette matiere inflammable, dont l'air eſt toujours rempli, & qui réſide dans les vapeurs qui s'elevent ſans ceſſe de la terre, à l'occaſion de la combuſtion & de la putréfaction des plantes & des animaux. Pour ce qui regarde l'eſprit acide que j'avois rencontré, je le croyois une engeance de cet eſprit acide univerſel, qui doit réſider

ſider dans l'air, dont les Cabaliſtes nous vantent tant de merveilles, & qui eſt leur *Demogorgon*, cauſe de la production de toutes choſes dans les trois régnes de la Nature.

Nonobſtant cela, ces phénomenes me donnerent l'occaſion de faire quelques nouvelles experiences, pour me tirer de l'embarras où j'etois par raport à cette recherche; j'eus recours derechef à de l'eau de fontaine, purifiée avec ſoin de toute matiere terreſtre par la diſtillation au bain de vapeurs, comme je l'indique ci-deſſus. Cette eau, par une ſeconde diſtillation, executée de la même maniere, ne laiſſa rien au fond de l'alembic, qu'une trés petite tache transparente; par où je fus convaincu, que cette eau etoit un liquide aſſez homogene, élementaire, qui ne renfermoit pas dans ſon volume la moindre marque d'une matiere acide, ou inflammable; je m'en procurai une quantité ſuffiſante, dont je remplis un grand verre large & cylindrique, ayant l'ouverture égale à ſon fonds; j'eus ſoin de le couvrir avec une feuille de papier que je liai autour de l'ouverture. Une autre portion fut miſe dans une grande bouteille de verre qui contenoit pluſieurs meſures; l'ayant remplie jusqu'à deux tiers, je la fermai avec un bouchon, je les plaçai toutes deux au Soleil, au coeur de l'Eté paſſé, pendant pluſieurs ſemaines, & je remarquai bientôt, que cette eau, toute claire qu'elle étoit au commencement, changeoit inſenſiblement de couleur, & que pouſſant de petites veſſies, & une écume mince à la ſurface, elle devenoit un peu verdâtre au fond, & moins transparente.

Quelques circonſtances m'obligerent de retirer cette eau des rayons du Soleil, mais je n'oubliai pas de l'examiner, pour me donner quelque ſatisfaction ſur le changement, qu'elle avoit ſubi, pendant qu'elle avoit été expoſée au Soleil. Je la mis par repriſes dans un alembic de verre, & je la fis diſtiller ſucceſſivement au bain Marie, jusqu'à ce que j'euſſe retiré toute l'eau pure & claire; il me reſta au fond de l'alembic une petite quantité d'une liqueur trouble & moins transparente, laquelle je verſai dans une petite cornuë de verre, & y ayant adapté un récipient, je pouſſai le feu par degré, qui me fit ſortir à la fin, aprés quelque humidité aqueuſe, de ſemblables nuages blan-

blanchâtres, & un peu d'huile tirant ſur le rouge, que j'avois rencontrée en diſtillant la roſée & l'eau de pluye, aptés qu'elles avoient ſubi une eſpece de putréfaction.

Cette experience me fit naitre une nouvelle idée, d'une trés grande conſéquence par rapott à ma recherche ; car je fus convaincu, que les rayons elancés du Soleil, de quelque nature qu'ils puiſſent étte, cauſoient dans l'eau une changement eſſentiel, en y introduiſant une matiere impalpable, qui par une eſpece d'alteration, qui approche de la fermentation, fait naitte dans l'examen de l'eau les deux principes ſi néceſſaites à la production des plantes que je cherchois.

Je me procurai auſſi pat là la ſolution du problême de l'exiſtence, & de la génération de l'Acide univetſel, tant vanté par la Secte Cabaliſtique de quelques Chymiſtes anciens. Car les rayons, par la chaleur qu'ils cauſent dans l'eau, y operent la même choſe dans ce vaſte eſpace qui entoure nôtre Globe, que ce que je vis naitre dans l'eau renfermée dans mes verres. Quand ces vapeurs ſecondées de cette façon, & condenſées en pluye, tombent & pénétrent dans la terre, elles y alterent & changent tout ce qu'elles rencontrent, elles diſſolvent & combinent differentes eſpeces de terres. Et c'eſt à cette opération de l'acide univerſel, que nous devons l'exiſtence de ces ſels differents, comme le Vitriol, l'Alun, le Salpetre, le ſel commun &c. que la terre nous ſournit.

Mais, pour retourner à la production & à l'accroiſſement des Vegetaux, nous voyons, (& l'homme le plus ſimple ne l'ignote pas,) que cette action de la Nature n'a lieu que dans cette ſaiſon de l'année, ou le Soleil cauſe un certain degré de chaleut, qui eſt ſuffiſant pour opéter ſut l'eau les effets ſusdits, & qui peut la mettre en mouvement, pout pénétret dans les tuyaux & conduits les plus cachés des plantes, & des arbtes, que la Nature a ſoigneuſement formés, & qu'on y rencontre en forme fluide, & ſous le nom de la ſeve. Quand la chaleur du Soleil, par l'éloignement de cet aſtre, n'a plus la force de procurer ce mouvement dans l'eau, cette action dans les plantes s'atrête, elles reſtent immobiles ; ce que nous voyons arriver

pendant l'hiver, où la chaleur du Soleil diminuë de deux tiers, en comparaiſon du degré où elle parvient dans le coeur de l'Eté.

Certe chaleur ainſi diminuée, n'eſt plus capable d'entretenir le mouvement, ou de conſerver la fluidité dans l'eau; ſes parties ſe joignent alors enſemble, faute de molecules ignées que le Soleil n'elance plus en quantité ſuffiſante pour les ſéparer; elle ſe coagule donc ſous la forme de la glace. Ainſi la fluidité de l'eau eſt uniquement l'effet d'un certain degré de chaleur, qui entretient un mouvement perpetuel entre ſes parties conſtitutives; par conſéquent elle reſſemble entierement à tout autre corps fondu, agité par l'action du feu; ſes parties ſe trouvant ainſi dans une agitation continuelle, entrent facilement dans les pores de la plus-part des corps qu'elles touchent.

Mais certe action de l'eau eſt encore entretenuë, & augmentée par la ſtructure de plantes, dont les racines ſont autant de tuyaux capillaires, par leſquels s'eleve promtement cet élément liquide, ou cette ſeve, dans les vaiſſeaux qui compoſent le tronc, & comme ceux-ci ſont d'une extrême petiteſſe, la chaleur qui les environne pendant l'Eté, y fait paſſer l'eau, probablement ſous la forme de vapeurs, & cette réſolution d'eau en vapeurs, qui ne peuvent ſe condenſer derechef en eau, ſi longtems qu'elles ſont renfermées dans ces tuyaux extrémement petits, eſt apparement la cauſe de certe quantité d'air, que Mr. *Hales* a rencontrée dans ſes Experiences ſur les vegetaux. Quoique la plus part de ces experiences roulent ſur la production de l'air, que la fermentation, ou bien que le combat des acides avec les alcalis, ont produit dans ſes differens mêlanges, quelques autres experiences de cet Auteur dans ſa *Statique des Vegetaux*, nous prouvent, que l'attraction & la diſſipation de la ſeve dans un Tourneſol, comparée à la nourriture & à la tranſpiration d'un homme, eſt comme 17. à 1. Ainſi, proportions égales & en tems égaux, cette plante tire & tranſpire 17. fois plus que l'homme, c'eſt à dire, dans le coeur de l'Eté.

Cette grande difference entre la tranſpiration animale & vegetale ne doit pas nous étonner, ſi nous nous donnons le loiſir de réfléchir un peu

un peu ſur la ſtructure de l'un & de l'autre. Dans le corps de l'homme, & dans celui de tout autre animal, la maſſe du ſang, ou les humeurs qui circulent, ſont diſtribuées par les arteres, dont la ſtructure eſt conique, & où ce liquide trouve une infinité de réſiſtances, par les angles & courbures des vaiſſeaux arteriels, qui compoſent tant de viſceres & d'organes dans les corps des animaux. Dans les plantes au contraire, il ſe dévelope une ſtructure plus ſimple, & plus aiſée pour faire paſſer la ſéve. Les tuyaux qui reçoivent cette humidité, ſont des canaux cylindriques & paralleles, qui ſe touchent étroitement pour compoſer le tronc; à diverſes diſtances ils ſéparent aux angles aigus, des vaiſſeaux cylindriques ſemblables aux premiers, pour en former des boutons, qui ſont la baſe des branches, des fleurs & des fruits, qui ſe dévelopent de ces boutons.

Tous ces Vaiſſeaux cylindriques, qui compoſent le tronc & les branches d'une plante, ou d'un arbre, ſont fermés entre eux & liés enſemble par un tiſſu cellulaire & membraneux, qui communique avec les vaiſſeaux paralleles, & dont les plus petits canaux reçoivent cette matiere phlogiſtique, huileuſe, ou réſineuſe, par une eſpece de ſecretion, & qui eſt charriée dans le tiſſu cellulaire entre le tronc & l'ecorce de la plante, & dans l'ecorce même, pour la garantir contre le froid, & pour en faire un nouveau dépôt, dont les boutons tirent de cette matiere ce qui leur eſt convenable, ſavoir, le plus eſſentiel de la plante, pour en former les fleurs & les fruits. Une eau de pluye colorée d'une certaine façon, & qui n'etoit point nuiſible à la germination des plantes, que je fis entrer par un petit artifice dans quelques rejettons, ou coupures des arbres, m'a montré avec l'aide d'un Microſcope cette ſtructure, & a confirmé ce que *Malpighi, Loewenhoek, Grew, Hales* & *Bradley* en ont écrit.

Mais cette petite digreſſion, où je ne pretends pas donner un détail exact de la ſtructure des plantes dans toute ſon étenduë, m'a mené un peu trop loin de mon but; qui eſt, de faire comprendre la poſſibilité, que l'eau ſeule avec l'aide de la chaleur puiſſe prendre une forme corporelle dans les plantes. J'ai montré plus haut, que ce liquide purifié de toute matiere terreſtre heterogene, a non ſeulement

 pouſſé

pouſſé des germes, mais qu'il a cauſé auſſi un accroiſſement conſiderable dans les oignons des fleurs, & dans les branches d'arbres coupées pendant l'hiver, ou au commencement du printems. Tout ceci fait voir, que la viteſſe étonnante avec laquelle l'humidité, ou la ſéve reçuë par les racines, paſſe par les tuyaux cylindriques d'une plante, ou d'un arbre, y cauſe un frottement trés conſiderable contre les parois des petits canaux. Je ne balance pas d'aſſurer, qu'il arrive ici ce que nous voyons arriver, lorsque nous frottons l'eau commune bien purifiée dans un mortier de verre avec un pilon de la même matiere. L'experience fait voir, que par cette manoeuvre, l'eau priſe en petite quantité dans le mortier, montre en quelques minutes une coagulation blanche, viſcide, terreſtre, que la continuation du broyement convertit dans une eſpece de terre extrémement déliée & fixe.

Par cette métamorphoſe, ſavoir, par la converſion de l'eau en matiere terreſtre, toute plante, ou arbre, acquiert ſa baſe & ſa fermeté; & lorsque dans la ſuite les parties terreſtres ſont tellement augmentées par ce frottement, que quelques vaiſſeaux en ſont remplis, elles ſe joignent enſemble par la cohéſion, qui eſt ſi naturelle à tous les corps qui ſe touchent; le canal bouché refuſe alors le paſſage à la circulation ulterieure de la ſeve, devient une fibre ſolide, & c'eſt par là qu'une plante, ou arbre, gagne ſucceſſivement ſa ſolidité. Cette démonſtration ſemble prouver en meme tems, que la terre d'où les plantes ſortent, pour gagner leur perfection dans l'air, ne contribuë en rien à leur accroiſſement, ſi ce n'eſt qu'elle reçoit & qu'elle garde dans ſon ſein cette eau nouriſſante, ſecondée par les rayons du Soleil, que la pluye fournit, pour la rendre aux racines, leſquelles augmentent en nombre ſous terre, à meſure que la plante s'etend hors de terre, pour attrapper la quantité néceſſaire à la nouriture, & pour l'affermir auſſi, & l'attacher à l'endroit où elle a pouſſé; & nous voyons, que la nature garde toujours une exacte proportion entre les racines & les branches d'une plante, ou d'un arbre, pour ce beſoin ſi néceſſaire à leur conſervation.

La difference presque inconcevable que nous rencontrons dans ce régne de la Nature, merite ici une petite attention. Nous voyons

voyons en général, que les plantes croiſſent & s'aggrandiſſent d'une même maniere; l'eau préparée & ſécondée par la chaleur, & par les rayons du Soleil, eſt leur nouriture commune. Nonobſtant cela, elles ſe diſtinguent presque toutes par leurs figures, & par les qualités differentes que nous y rencontrons par nos ſens. Il paroit fort vraiſemblable que le divin Auteur de la Nature, par ſa ſageſſe infinie, pour la production des eſpeces innombrables, que demande la perfection de ce Tout que nous voyons, a placé cette difference dans la graine de chaque individu. D'habiles Phyſiciens ont montré que chaque graine, ou ſemence, auſſi bien que les boutons, renferme la delineation entiere d'une plante, ou d'un arbre, en racourci: ce que la maniere d'enter en bouton prouve de ces derniers. La ſeve ne fait que développer ſucceſſivement ces empreintes des parties infiniment petites par la circulation; & lorsque la plante s'eſt épanouïe en feuilles, celles-ci attirent de l'air ce qui leur convient pour être converti dans la nature de cette qualité ſpecifique, dont la premiere graine de cette eſpece a reçu la forme & la proprieté dans la Création. Ceci ſe confirme en quelque maniere par l'experience ſuivante. Les Sapins, les Bouleaux & les Chênes, croiſſent ſouvent enſemble dans un terrein ſablonneux & ſterile. Le premier de ces arbres nous offre une grande quantité de réſine & de poix; de ſorte qu'on en peut tirer une cinquantaine de livres quelquefois d'un ſeul arbre de cette eſpece, pendant qu'on auroit de la peine à decouvrir un grain de cette matiere dans les deux autres; & la terre, ou plutot le ſable, desquels ils ont tiré leur nouriture pour croître, ne montre pas le moindre veſtige d'une ſubſtance réſineuſe, quand on en a fait la recherche même la plus exacte. Par conſéquent, puisque nous voyons, que l'humidité commune, que les racines de ces arbres tirent du ſein de la terre, ne fournit point cette difference des Sucs, & de tant d'autres qualités que nous y rencontrons, il faut que la Nature vienne au ſecours par d'autres voyes, qu'elle cache à la groſſiereté de nos ſens. Les experiences de Mr. *Hales*, Obſervateur infatigable, & celles de l'habile Boraniſte *Miller* à Chelſea, nous prouvent ſuffiſamment, que cette attraction ſe fait par les feuilles, qui reſſemblent en cela aux

Veines réſorbentes, que nous rencontrons dans tous les poïnts de la ſurface de nôtre Corps, par leſquelles l'eau, auſſi bien que les eſprits Chymiques, & même le Mercure, appliqués à la peau, entrent dans les vaiſſeaux, & ſe mêlent avec la maſſe du ſang. Cette réfléxion, qui ſe dévelope par les experiences, nous mene à l'origine des veines, qui ſont d'autant plus néceſſaires dans les plantes que leur ſtructure même ſuppoſe leur exiſtence. Elles tranſportent ce qui a été attiré de l'air, & en ſont un dépôt dans la ſubſtance cellulaire, entre le trone & l'ecorce, où elles rencontrent les vaiſſeaux ſecretoires des arteres. Et c'eſt là ſans doute, où les humeurs préparées ſe ſpecifient dans la Nature differente des plantes, ſelon la differente vertu ſpermatique, que chacune a reçuë dans la premiere formation, lorsque l'Univers ſortit de de ſon néant. L'humidité de l'air attirée, & alterée ſans ceſſe, par l'action du Soleil, & renduë feconde par la proprieté incomprehenſible de ſes rayons, eſt cette ſource intariſſable, où toutes les plantes, auſſi bien que les animaux puiſent, & qui ſe change dans la nature prolifique de chaque individu. Cela ſe prouve encore par quelques phénomenes, que nous voyons arriver aux boutons. Ceux-ci renferment, auſſi bien que la graine, l'eſpece de la plante, ou de l'arbre, qui les ont pouſſés; ce qui eſt confirmé par la maniere d'enter en bouton. Nous voyons auſſi que tel bouton qui rëuſſit, quand il eſt enté dans quelques arbres d'une autre eſpece, a été toujours ſoutenu par une feuïlle qui ſe dévelope à la racine de ce bouton. Si on coupe cette feuïlle dans le printems, lorsqu'elle paroit, le bouton n'eſt plus propre à être enté, puisqu'il ne pouſſe pas une branche prolifique; ce qui marque que la feuïlle attire de l'air cette ſorte d'humidité, qui lui convient pour être convertie dans ſa nature, qui la diſtingue de toute autre eſpece. L'experience que j'ai faite, de couper de la branche d'un arbre toutes les feuïlles, avant que les fleurs paruſſent, m'a fait voir, que cette branche reſte ſterile, ſans produire aucun fruit, pendant que les autres branches du même arbre en portent abondament. En un mot, c'eſt l'eau miſe en action par la chaleur, qui forme peu à peu les petites parties ſolides, & corporelles des plantes; Et la vertu ſpermatique primordiale, attachée à la ſemence,

y in-

y introduit & perpetuë ſa proprieté ſpecifique dans chaque eſpece & individu.

Aprés qu'on a compris l'evidence de tout ce qu'on vient de prouver jusqu'ici, il n'eſt pas difficile de comprendre l'origine & la formation des corps dans les animaux; nous y rencontrons une analogie parfaite, ſi nous remontons jusqu'aux premiers commencemens d'un Embrion; nous y voyons l'ebauche de l'animal futur, comme celle de la plante dans la graine, ou dans la ſemence; tout ſe dévelope & s'aggrandit par le mouvement, & par la circulation de l'humidité préparée de la maniere ſusdite. L'accroiſſement d'un Corps animal profite de l'avantage que ſes ſucs nourriciers ſont déjà préparés dans les plantes, dont la pluspart des animaux ſe raſſaſient. L'eau y a déja ſouffert ſa premiere transformation en visqueux terreſtre, mêlé d'onctuoſité phlogiſtique. Ce mixte mis en mouvement par l'action du coeur, & appliqué aux parois des petits vaiſſeaux, s'y inſinuë, les étend, forme des fibres, des membranes, & à meſure que cette viſcidité humide ſe deſſéche & s'affermit, les membranes ſe changent en cartilages, & puis en os, ſelon la premiere delinéation de la ſtructure de l'animal dans ſon embryon. Si on regarde l'extreme petiteſſe des vaiſſeaux lactés, qui ſe dérobent aux Microſcopes dans leur origine, on juge facilement qu'il n'y peut entrer que le plus fluide & le plus délié des humeurs qu'on puiſſe imaginer; néanmoins nous le voyons changé en matiere ſolide & terreſtre dans les os.

Il ne ſera pas trop hardi d'aſſurer ici, que les mêmes principes ſuffiſent à la production des mineraux. Dans l'analyſe de ces Corps, l'eau commune, l'acide, & la matiere inflammable, ſe montrent par tout. Les differens mêlanges des ces trois principes ſuffiſent pour fournir une infinité de productions minerales; mais la choſe eſt d'une trop vaſte etenduë pour être examinée à preſent, comme il faut; elle me fournira des recherches curieuſes dans une autre Diſſertation.

RECHER-

RECHERCHES
SUR LA NATURE ET LES PROPRIETÉS DU FIEL DE VERRE,
PAR Mr. POTT.

Traduit du Latin.

I.

LE ſujet, ſur lequel vont rouler nos recherches, porte communément le nom de *Fiel de Verre.* Il ne lui vient point du fiel, ou de la bile des animaux, que les Phyſiciens prenoient autrefois, pour un pur excrément, comme ſi ce fiel étoit auſſi un excrément que le feu ſeparât du mêlange, d'où ſe forme le verre, & qu'il eut quelque ſorte d'amertume. Cette dénomination vient plutot d'une erreur dans la traduction du nom que cette matiere porte en Allemand. On l'y appelle ordiuairement *Gluſs Galle ;* & comme le ſens propre du mot de *Galle* eſt *fiel*, on a rendu l'expreſſion entiere par *Fiel de verre.* Mais il me paroit beaucoup plus vraiſemblable qu'il faut rappeller ici l'ancienne ſignification du mot de *Galle*, par où l'on entendoit une bulle d'ecume, & qui ſe conſerve encore dans le mot *Waſſer Galle, ecume d'eau*, qui à cauſe de la legereté de l'air qui y eſt renfermé, occupe la ſurface de l'eau. C'eſt de la même maniere que le fiel de verre eſt toujours pouſſé par la force du feu à la ſurface de la matiere

matiere du verre. On lui a encore donné par la même raiſon le nom de *graiſſe*, ou *ſuin de verre*, *axungia vitri*, quoiqu'il n'y ait rien du tout de gras. Enfin quelques uns l'ont appellé abuſivement *ſel de verre*; & *Crollius* avec quelques autres ſe ſont ſervi du nom d'*Anatron*.

II. Cette matiere n'eſt autre choſe qu'un mêlange de terre & de ſel, qui coule comme une écume ſur la ſurface du verre en fuſion, & qui pendant ce flux en eſt ſeparée par abſtraction. En effet, quand on a préparé le mêlange des matieres, dont on a coutume de ſe ſervir pour faire le verre, & qu'on appelle *Fritte*, & que ce mêlange a eu pendant quelque tems un flux liquide, on le remuë avec un fer propre à cet uſage, pour éprouver ſi la fuſion liquide du mêlange eſt parfaite & univerſelle; & aprés s'en être aſſuré, on enleve avec une cucillere de fer l'ecume de ſel ardente, qui eſt au deſſus, & qui n'entre pas dans le mêlange du verre, on la jette dans l'eau, & par la coagulation on en fait des pains blancs, ou cendrés. Entre ces pains, ceux qui viennent de la préparation du verre cryſtallin, ſurpaſſent de beaucoup les autres en blancheur, & ce ſont eux qui conſtituent le *Fiel de verre* proprement ainſi dit. Toutes les eſpeces de verre fourniſſent à la verité une ſemblable matiere, tant le verre verd commun, ou le verre blanc & de craye, que celui de cryſtal. Mais le verre commun en fournit moins à cauſe de la petite quantité de ſels qu'il renferme, au lieu que les verres de craye & de criſtal, qui contiennent beaucoup plus de ſels, donnent bien davantage de ce fiel; d'où l'on peut tirer cette régle certaine, que plus on fait entrer de corps ſalins dans la compoſition de la fritte du verre, plus elle rend de fiel de verre, & réciproquement. Celui qui ſe vend ordinairement, vient presque toujours du verre de craye & de ſoude. Il y en a qui prétendent qu'on peut ſe promettre quelque choſe de particulier du fiel de verre qu'on ſépare du verre de rubis; mais je crois que cette prétenſion eſt tout à fait dénuée de fondement.

III. Voici les eſpeces ordinaires du Fiel de verre. D'abord il y a le nôtre, ou celui qu'on tire de nos verreries, il y a celui d'Italie, & il y a celui qu'on nomme vulgairement de Hollande, mais qui, à

parler plus exactement, eſt d'Eſpagne. Ces eſpeces ont une reſſemblance générale, mais on y remarque auſſi certaines differences dans quelques circonſtances particulieres. Ces differences viennenr du plus ou du moins de pureté des ſels, qui ont été employés, rant ſels alcalis, ou cendres clavelées, que cendres des végetaux, Nitre, Tartre, Soude &c. Elles viennent encore des proporrions plus ou moins grandes de ces ſels, de l'eſpace de tems plus ou moins long, au bout duquel on tire ce fiel du creuſet de la verrerie, & par conſéquent du plus, ou du moins, de tems qu'il eſt demeuré au feu. Toutes ces cauſes font que les maſſes de fiel de verre different, tant à l'egard des parties ſalines qu'à l'egard des parties terreſtres.

IV. Quelques uns préparent eux-mémes le fiel de verre, en mettant en fuſion au creuſet du ſel commun mêlé avec parties egales, ou avec deux parties de verre, ou avec des cailloux, & en ſéparant les ſcories ſuperieures, ou le ſel, de la maſſe inferieure réduite en verre. Mais ce produit ne s'accorde pas parfaitement avec notre fiel ordinaire de verre, parce qu'il contienr encore beaucoup de ſel commun, changé ſimplement en ſel fondu. Il y a auſſi un fiel de verre que les Orfevres font ordinairement de ſel commun, de ſel alcali, & de litarge, & qu'ils employent dans la conferrumination, pour ſuppléer au Borax qui eſt plus cher; mais il n'a pas a non plus une convenance entiere avec le notre, quoique dans certaines circonſtances il puiſſe produire les mêmes effets.

V. Il y a déjà bien des ſiecles que les Phyſiciens, les Chymiſtes, & les Medecins ont fait connoitre dans leurs Ecoles notre Fiel de verre, & q'ils l'ont employé à diverſes opérations Chymiques. Les Ouvriers eux même s'en ſont ſervi, & on en a riré quelques uſages dans la Medecine. Cependant je n'ai rrouvé perſonne encore, qui ſe ſoit propoſé d'enfaire avec exactitude un examen Phyſico-Chymique; & c'eſt ce qui me détermine à l'entreprendre.

VI. Ceux qui, d'aprés les Aureurs qui ont écrit en Phyſique & en Chymie, ont raché jusqu'à preſent de décrire la nature & les proprietés du Fiel de verre, ſe ſont partagés en deux Sectes; les uns le rangeant parmi les eſpeces de ſel commun, & les autres parmi les ſels

alcalis

alcalis fixes. Entre les premiers M. *König*, dans ſon *Regn. Miner.* le définit ; *Une ecume ſalée du verre, qui ſe forme d'une quantité de ſel & de particules terreſtres, & où le ſel s'unit ſi etroitement avec la terre en vitrification qu'il eſt trés difficile de les ſéparer.* Avant lui, *Tackenius* avoit déjà dit à peu prés la même choſe dans ſon *Hippocr. Chym.* où il en fournit cette deſcription. *C'eſt*, dit-il, *un ſel ſalé que les Bergers donnent à lécher à leur bétail en guiſe de ſel commun, qui ſe fond à l'air, & alors la poudre des cailloux entremêlee ſe ſepare, cette liqueur ſe coagule enſuite en ſel commun, comme le prouvent ſa granulation & ſa diſtillation.* Et ailleurs il ajoute ; *Le fiel de verre tire ſa ſalure de l'acidité du caillou ; car il ne précipite pas entierement le Mercure.* C'eſt auſſi pourquoi *Merret* rapporte qu'on s'en ſert en France pour ſaler les viandes. Voilà ſans doute le ſondement ſur lequel *Mort* a dit avec tant de confiance ; * *Le fiel de verre approche de la Nature du ſel foſſile, & on en tire par la diſtillation un eſprit acide, comme l'eſprit de ſel.* La principale raiſon ſur laquelle tous ces Auteurs s'appuyent, c'eſt qu'en Italie & en Eſpagne on employe la ſoude dans la compoſition du verre ; or cette ſoude n'eſt pas un pur ſel alcali, mais elle renferme beaucoup de ſel commun, parce que la plante *Kali* croit ſur le bord de la mer & des lacs ſalés, où elle attire le ſel commun, s'en imbibe, & en conſerve beaucoup, ſans aucun changement. Auſſi peut-on y découvrir au ſimple goût une ſaveur ſalée, & c'eſt en quoi conſiſte ſa difference d'avec l'alcali commun, auſſi bien qu'en ce qu'il s'y trouve auſſi quelques parties de ſel merveilleux. Ajoutez que le nitre qu'on employe pour faire certains verres, n'eſt pas pour l'ordinaire aſſez dépuré, mais qu'il porte de même avec ſoi quelques parties de ſel commun. Cependant, & malgré tout ce qui vient d'etre rapporté, les Experiences ſuivantes ſeront voir de la maniere la plus claire, qu'il reſte ſi peu de ſel commun dans le fiel de verre, qu'on ne peut ſe ſonder ſur aucune raiſon pour le ranger dans la Claſſe du ſel commun. Les Experiences dont on voudroit s'autoriſer pour cet effet, ſont en partie fauſſes, ou ſuperficiellement examinées, en partie mal appliquées.

* *Fac. Chym.* P. 95.

VI. Mr. *Merret* eſtime* que le fiel de verre eſt une eſpece de ſel alcali, qui ſe charge dans la vitrification d'une quantité inſuffiſante de Terre vitrifiable, & qui par conſéquent demeure incomplet. On ne ſauroit nier qu'il n'y ait là dedans quelque apparence de probabilité, puisqu'il eſt conſtant qu'on ne ſauroit faire aucun verre commun, ſans y mettre du ſel alcali, dont il ſeroit poſsible que les parties ſuperfluës ſe ſéparaſſent de cette maniere. De plus, & M. *Merret* ne manque pas non plus d'inſiſter ſur ces circonſtances, le fiel de verre ſe fond à l'air, & il produit ſur le ſyrop de violettes le même effet que les autres ſels alcalis, c'eſt de changer ſa couleur bleuë en verte. Avec tout cela cette opinion ne ſauroit etre adoptée; puisque l'alcali même ſuperflu s'unit etroitement avec la terre vitrifiable, comme on en trouve la preuve dans la maſſe qui ſe prépare pour faire la liqueur des cailloux. Il y a auſſi pluſieurs produits ſalins manifeſtement acides, qui donnent la couleur verte au ſyrop de violettes.

* *In Not. ad Neri Vitr.* p. m. 239.

VII. Je me ſuis donc mis à examiner par moi-même le ſujet en queſtion, & cet examen m'a fourni les phénomenes ſuivans. Le Fiel de verre conſerve aſſez de conſiſtance à l'air, & ne ſe fond pas aiſément par défaillance, à moins quon ne l'ait laiſſé aſſez longtems expoſé dans une cave froide & humide; auquel cas pluſieurs ſels moyens commencent à ſe fondre en quelque ſorte: ce qui ſe remarque auſſi dans le ſel commun, expoſé pendant longtems de la même maniere. Le fiel de verre, comme tous les autres ſels, ſe fond aſſez promtement dans l'eau, & aprés la filtration, il donne une ſolution d'une parfaite transparence, dépoſant dans le filtre une terre blanchatre, tantot plus, tantot moins abondamment; car il y a telle eſpece qui ne m'a donné que fort peu de cette terre, tandis qu'une autre en a rendu plus de quatre onces par livre. Cette terre avec l'huile de vitriol ne reçoit qu'une trés legere ébullition; ce qui prouve qu'elle renferme fort peu de terre alcaline, & qu'elle conſiſte principalement en terre vitrifiable. Dans le feu notre ſel ſe ſoutient, ce qui le met au rang des ſels fixes; & lorsqu'on en répand immédiatement ſur des charbons ardens, il ſe fait une fort petite crépitation, & trés differente de la crépitation ordinaire au ſel commun. Mais au feu

dans

dans le creuſet, il a un flux aſſez promt & coulant, il rougit un peu, & en même tems, il eſt propre à accelerer la liquefaction des corps qui ſe fondent difficilement; ce qui fait que les Orfevres l'employent avec ſuccés pour fondre la limaille d'argent.

VIII. Notre ſel dépuré n'a point d'efferveſcence avec les menſtruës acides, comme l'eſprit de nitre, l'eſprit de ſel commun, & le vinaigre diſtillé, ce qui empêche qu'on puiſſe le mettre au nombre des ſels alcalis. Cependant quelques eſpeces de ce ſel avec l'huile de vitriol ſont voir une eſpece d'ebullition, qui provient non du ſel alcali, mais plutot du ſel commun, dont une petite quantité demeure contenuë dans certaines eſpeces de fiel de verre, & principalement dans celles d'Eſpagne, qui tirent leur origine de la ſoude, & dans celles qui viennent des Verreries, où l'on ajoute beaucoup de ſel commun à la compoſition de la fritte. Car les autres eſpeces, où ce ſel n'entre pas, n'aquierent pour l'ordinaire aucune effervescence avec l'huile de vitriol; au lieu qu'il eſt connu que l'effervescence arrive aſſez promtement, lorsque l'huile de vitriol eſt jointe au ſel commun. Le changement de couleur qu'eprouve le ſyrop de violettes ne mene pas non plus à la conſéquence qu'on veut en tirer; puisque la ſolution de ſel commun fondu, la ſolution de ſel armoniac fixe, & pluſieurs mélanges ſalins qui renferment de la terre alcaline, produiſent le même phénomene, qui ne prouve pas toujours la préſence du ſel alcali. D'ailleurs le fiel de verre ne trouble point la ſolution d'Alun, ce que font pourtant tous les vrais ſels alcalis; il ne précipite point non plus la liqueur de ſel armoniac fixe, d'où l'on eſt pleinement en droit de conclurre l'abſence de l'acide vitriolique.

IX. La ſolution de notre ſel etant filtrée, evaporée, & cryſtalliſée à diverſes repriſes, donne des cryſtaux qui reſſemblent aſſés, en partie au tartre vitriolé, en partie au ſel des eaux minerales. Si cette cryſtalliſation ſe fait lentement, & d'une maniere reïterée, les premiers cryſtaux qui ſe forment ſont oblongs, & les derniers principalement ont pour l'ordinaire une ſorte d'ébullition avec l'huile de vitriol, & exhalent une fumée de ſel acide, qui eſt un indice qu'ils renferment quelque quantité de ſel commun; ce qui ne ſe manifeſte

en aucune maniere dans les premiers. Il arrive par conſéquent, que ſi l'on ſépare par abſtraction quatre parties d'acide nitreux d'une partie de fiel de verre, l'eſprit qui tranſpire fournit une eau régale propre à la ſolution de l'or. La proportion de ce ſel commun dans le Fiel de verre n'eſt pas toujours égale; cependant il n'arrive presque jamais qu'elle aille au de là du quart, & pour l'ordinaire il y en a beaucoup moins, puisqu'il ne faut que trés peu d'acide de ſel pour convertir en eau régale une grande quantite d'acide nitreux. Si l'on pouvoit fonder un jugement aſſuré ſur l'apparence exterieure de notre ſel, lorsqu'il eſt dépuré, on affirmeroit qu'il contient en trés grande partie du tartre vitriolé: mais quand on compare l'extreme réſiſtance que ce tartre vitriolé apporte à la fuſion, avec la grande fuſibilité de notre ſel, cela mene à d'autres idées. Et s'il y a quelque partie de tartre vitriolé dans le fiel de verre, comme il y en a ſurtout dans celui de nos contrées, qui provient de cendres communes peu nettes & clavelées, qui ont été longtems expoſées à l'air, cela ſe connoit d'abord par la maniere dont il crépite & s'ecarte, lorsqu'on le jette ſur des charbons ardens, ou qu'on en preſſe la flamme avec un chalumeau: car ce phénomene ne ſe montre point dans le ſel admirable pur, qui entraîne pourtant avec ſoi en fuſion le tartre vitriolé; ce qui arrive auſſi au tartre vitriolé, qui éprouve une fuſion fort liquide par l'addition du ſel commun, ou du ſel alcali, ou de l'Alun calcine, ou du vitriol ſaoulé de ſon acide. Il faut donc ſuppoſer plutot que notre ſel par rapport à la plus grande & principale partie, s'accorde avec celui qui porte le nom de *ſel admirable de Glauber*. S'il ne ſe forme pas en cryſtaux auſſi grands que ceux de ce ſel admirable, cela ne fait pas une difficulté, car ſa diſpoſition à prendre cette figure eſt détruite par le feu véhément de la vitrification, qui lui fait violer la régle de l'immutabilité de la figure, commune aux ſels. Cela ſe confirme par le ſel admirable lui-même, lorsqu'il eſt pur; ſi on l'expoſe pendant quelque tems à un feu véhément, & qu'enſuite on procede à la ſolution & à la cryſtalliſation, il ne rend que de fort petits cryſtaux. Il eſt néanmoins poſſible que certaines eſpeces de fiel de verre, ſurtout d'Eſpagne, montrent auſſi quelque-

fois

fois une portion de ſel merveilleux dans de grands cryſtaux ; car je vois qu'il eſt arrivé quelque choſe de pareil à Boyle, quoiqu'il n'ait oſé déterminer l'eſpece, ni aſſigner le veritable nom, lorsqu'il rapporte,* *qu'ayant expoſé à la cryſtalliſation du fiel de verre diſſous dans l'eau, il s'en forma divers cryſtaux en forme de nitre, tout à fait transparens, & à la fin du ſel commun cubique*; à quoi il ajoute, que *ces cryſtaux à la chaleur ſe changent en chaux, mais qu'ils reprennent dans l'eau leur forme cryſtalline.* Ce Phyſicien ne pouvoit réſoudre ce phénomene dans le tems où il vivoit, mais il eſt aſſez connu aujourdhuy que le ſel admirable montre les qualités dont il s'agit. De là vient que la ſolution du fiel de verre précipite la ſolution du Mercure par l'eau forte, en lui donnant une couleur jaune, de la même maniere que la ſolution de ſel admirable, lorsque l'acide du Vitriol eſt adherent au Mercure. Il eſt vrai que la couleur du Mercure précipité avec le ſel admirable eſt un peu plus jaune, qu'avec le fiel de verre ; mais je crois qu'il faut en chercher la raiſon dans la Terre alcaline que ce fiel contient. De même la cendre parfaitement edulcorée, ſaoulée enſuite de l'acide du vitriol, & enfin cryſtalliſée, forme une eſpece de ſel amer fuſible, qui a beaucoup de conformité avec le nôtre dans certaines circonſtances.

* Dans ſon Traitté, *de producibil. princ. Chymic.* p. 17.

X. La principale partie du Fiel de verre conſtituë donc une eſpece de Sel admirable, & il ne faut pas ici aller chercher bien loin les ingrediens de ce ſel, puiſque l'on découvre d'abord le ſel commun dans la ſoude, & une eſpece de terre *alcalino-vitreſcible* dans les cendres. Seulement on pourroit former quelque doute ſur l'exiſtence de l'acide vitriolique ; mais comme avec le tems les ſels alcalis s'imbibent d'un ſemblable acide, qu'ils tirent de l'air, & qu'il eſt probable que le feu ardent de la verrerie détruit les qualités ſpecifiques des acides, ce qui fait que le reſte retourne à ſon état primitif, il ne faudra pas non plus aller loin pour trouver l'acide en queſtion. Ajoutez que ſouvent dans les terres vitrifiables, comme dans le ſable, les cailloux, les briques &c. on conjecture qu'il y a de l'acide vitriolique renfermé qui ſe répand de là dans la maſſe. *Tackenius* a même oſé déterminer qu'il y a de l'acide dans les cailloux, ce qui s'accorde aſ-

ſez

ſez avec les principes de *Beccher*, & ſa Terre primitive, ſans compter une experience qui ſemble encore favoriſer cette opinion; c'eſt qu'aprés avoir cuit dans un fourneau de potier de l'alcali, des cailloux & du ſel commun, & en avoir fait la ſolution dans beaucoup d'eau, il s'en forme en partie une eſpece de ſel admirable. C'eſt ce qu'il faudra examiner plus ſoigneuſement.

XI. Quand on procure la cryſtalliſation du Fiel de verre d'Eſpagne, en le faiſant evaporer lentement & à diverſes repriſes ſucceſſives, la derniere matiere qui reſte, & qui ne peut plus être réduite en cryſtaux, fournit un peu de ſel alcali avec une petite quantité de terre alcaline, diſſoute dans l'eſprit acide du ſel; car cette matiere entre en efferveſcence avec l'eau forte & précipite la terre; elle acquiert une efferveſcence encore plus forte avec l'huile de vitriol, elle jette la terre alcaline, & exhale en même tems un eſprit de ſel, qui frappe bientot l'odorat. Que ſi l'on fait evaporer la ſolution de Fiel de verre dans un vaſe de plomb, & qu'on l'expoſe à la cryſtalliſation, il en naît alors des cryſtaux aſſez petits; mais ſi l'evaporation & la cryſtalliſation ſe font dans un vaſe d'etain, les cryſtaux ſont beaucoup plus grands & oblongs. Les uns & les autres cependant, expoſés à un air tiede, s'en vont en pouſſiere blanchâtre, comme cela arrive ordinairement au ſel admirable. On peut inferer de là que les vaſes qu'on employe, cauſent des changemens & des altérations à la cryſtalliſation, ce qu'il faut attribuer au plus grand, ou moindre degré de froid, qui peut être pris plus aiſement par un vaſe que par un autre. Il en eſt de même de toutes les autres Experiences Chymiques ſur ce ſujet; on y apperçoit aiſement l'harmonie de notre ſel avec le ſel admirable; car avec la pouſſiere de charbon, il conſtituë un foye de ſouffre, & forme un ſouffre parfait; avec un egal poids d'Antimoine crud, il ſe fond en foye d'Antimoine, ſans laiſſer aucune trace de régule; mais etant fondu avec une ſemblable portion de régule d'Antimoine, il en détruit une partie, ou la convertit en ſcories, & le reſte du régule demeure ſans aucun changement, ſi ce n'eſt que ſes rayes ſont un peu moindres. Le Fiel de verre employé avec l'Alun, & mis enſemble à la calcination, ou à la fuſion, fournit un ſel admirable plus abon-

abondant, & en aſſez grands cryſtaux, parce que l'on ſaoule abondamment le ſel commun ſuperflu par l'acide de vitriol dans l'Alun. Le fiel de verre, fondu avec de la ſoude dépurée, diſſous, & convenablement évaporé, forme d'aſſez grands cryſtaux. Ce même fiel, fondu avec deux parties de ſoude, & longtems expoſé au feu, fournit une grande quantité de verre fuſible ſouffré; parce que l'acide de notre ſel admirable avec la terre de charbon de ſoude, rend d'abord un ſouffre; & la terre vitrifiable de cet acide ſouffré, en continuant le feu, forme un verre ſouffré noir. Pour faire cette Experience il faut employer de la ſoude cruë: car le fiel de verre avec la ſoude non dépurée fournit, au moyen de la fuſion & de la ſolution un foye de ſouffre; au lieu que l'acide vitriolique de notre Sel, uni à la terre de charbon de ſoude, forme un ſouffre, que le ſel alcali de ſoude diſſout & arrête.

XII. Les rapports de notre ſel avec les terres plus ſimples conviennent aux rapports du ſel admirable avec les mêmes terres. C'eſt ainſi que la craye, ou le marbre, avec deux parties de ſel admirable, confluent en une maſſe, qui a la forme d'un verre jaune tirant ſur le verd. La même craye avec autant de fiel de verre refuſe de ſe fondre; mais avec deux parties de fiel de verre, elle forme de la meme maniere une maſſe comme de verre & verdâtre; cependant elle écume beaucoup au commencement, & ſi le creuſet eſt trop rempli, elle en paſſe aiſément les bords: il eſt même arrivé quelquefois, lorsqu'on a donné un feu trop véhément, que toute la maſſe a tranſpiré à travers le creuſet; mais quand on ſe ſert d'un feu plus moderé, il ſe forme une maſſe conſiſtente, blanche & ſaline. De l'albarre, avec une égale quantité, ou avec deux portions de ſel admirable, forme un corps comme de verre, d'un jaune verdatre; neanmoins, en l'expoſant à un feu plus long & plus fort, toute la matiere pénétre le creuſet. Le même albatre avec autant de fiel de verre demeure en quelque maniere poreux, à cauſe des impuretés, qui ſe trouvent communément mêlées au fiel de verre; par la même raiſon avec deux parties de fiel de verre, il en a reſulté une fois une maſſe d'une couleur un peu brune, & une autrefois une maſſe moins ſerrée & blanchâtre: ce-

cependant à un feu plus violent, elle paſſe tout de même à travers le creuſet. L'argille blanche mêlée avec une, deux, trois ou quatre parties de ſel admirable, & miſe au feu, ſe réunit en une maſſe ſans tranſparence d'un blanc cendré; la même choſe arrive, en remuant de l'argille blanche avec autant, ou avec deux parties, de fiel de verre. Les cailloux remués au feu, avec une, deux, trois, ou quatre parties de ſel admirable, ſe reüniſſent en une maſſe blanche, qui a l'air d'écume, tant ſa texture eſt rare. Les mêmes cailloux, avec une ou deux parties de fiel de verre, ſe reüniſſent en une maſſe ſemblable blanchâtre. Deux parties de fiel de verre avec une partie de *Quartz*, ſe raſſemblent auſſi, mais ſuperficiellement, & ſans qu'il y ait une parfaite union, ou combinaiſon. De même auſſi deux parties de fiel de verre avec une partie de *Spathum fluxile*, forment une ſemblable maſſe, mais jaunâtre & en partie rouge. Enfin le fiel de verre avec un poids égal de verre pulveriſé, aprés qu'on l'a fait fondre pendant longtems, laiſſe un verre imbu d'une couleur blanche, & d'une ſi grande dureté qu'il rend des etincelles, en le frappant contre l'acier; mais cette grande véhémence du feu détruit la plus grande partie du fiel de verre.

XIII. Il reſte encore quelque choſe à ajouter ſur l'uſage du ſujet que nous venons d'examiner. Ayant fait voir ci-deſſus, que lorsque notre fiel de verre eſt dépuré, on trouve que la principale partie conſiſte en ſel admirable, cela ouvre un moyen d'acquerir à meilleur prix ce ſel qui eſt cher, & d'employer à ſa place dans les Experiences de Chymie, & les uſages de Medecine, celui que le fiel de verre fournit. Juſqu'à preſent le plus grand parti qu'on tiroit de ce ſel, conſiſtoit à s'en ſervir, comme le font les Orfevres, pour fondre la limaille d'or & d'argent, & pour ſuppléer au Borax dans la ferrumination. Ceux qui travaillent aux Mines, l'employent auſſi dans la fonte des minieres, ſurtout de celles qui réſiſtent à la fuſion; il y ſert à donner de la fluidité aux parties roides & terreſtres, & à les ſéparer des parties metalliques, en ſorte que celles-ci puiſſent conflüer & s'unir. Mais ce fiel a de la peine à ſuffire ſeul partout, parce que le régule retient aiſément quelque choſe de ſalin, ſurtout s'il y a un

mêlan-

mêlange de ſouffre dans la miniere; car alors notre ſel admirable le réſout en foye de ſouffre, lequel foye s'empare de nouveau d'une quantité aſſez conſiderable de métal, le diſſout, & le convertit en ſcories: effet que nous avons déjà remarqué ci-deſſus dans l'Experience avec l'Antimoine. On employe avec plus de ſuccés le fiel de verre pour diverſes vitrifications, parce qu'il ne cauſe point de réduction aux corps métalliques calcinés, à cauſe de l'abſence du *phlogiſton*, mais qu'au contraire en les attenuant, il les diſpoſe à la vitrification. Il augmente par conſéquent la fuſibilité du verre de Saturne, tant ſimple que compoſé; & en les couvrant, il empêche qu'ils ne s'evaporent ſi aiſément, ou fait que l'air exterieur durcit plus promtement la croute de la ſurface. La raiſon en eſt que cette matiere ne ſe mêle, ni au verre, ni au metal, mais qu'elle ſe tient toujours au deſſus. Voilà pourquoi encore les Potiers l'employent pour le vernifſement des vaſes de terre. Le fiel de verre eſt auſſi de quelque uſage pour augmenter la malleabilité des metaux, qui à cauſe du mêlange des matieres etrangeres, refuſent d'obeïr au marteau, & il agit ſur eux en s'imbibant, pendant le flux coulant de la fuſion, dans les parties terreſtres les plus legeres, qu'il enleve. *Merret* donne la ſolution du fiel de verre, comme une Recette, pour empêcher dans les Jardins les inſectes de toucher aux herbes & aux fleurs, qu'il faut en arroſer, & vû ſon amertume la choſe ne manque pas de vraiſemblance.

Enfin, dans la Medecine, notre ſel, ſurtout lorsqu'il eſt dépuré, peut etre employé fort heureuſement & en toute ſureté, comme laxatif, aperitif & ſervant à la digeſtion; il convient auſſi pendant la cure des Eaux minerales, auſſi bien qu'en cent autres occaſions; & cela dans la même proportion, & avec les mêmes effets, que l'on a eprouvé jusqu'ici de la part du Sel admirable, ou de celui d'Angleterre. Cependant je ne conſeillerois pas le fiel de verre, qui réſulte des compoſitions de cryſtal artificiel, où l'Arſenic entre.

SUR LES MOYENS PROPRES À DÉCOUVRIR LA CONSTRUCTION DES VISCERES,

PAR M. LIEBERKÜHN.

TOus ceux qui s'appliquent à l'etude du Corps humain, & qui tâchent d'expliquer par la ſtructure même de cette Machine, ce qu'elle fait, & ce qu'elle peut faire, tous ceux, dis-je, qui ſont verſés dans ces connoiſſances, ſavent ſuffiſamment que nous ne ſommes pas encore parvenus aſſez loin, pour pouvoir démontrer comment ſe font toutes les actions naturelles. Je ne parle pas de celles que nous appellons animales, parce que les premiers organes par le moyen desquels elles s'executent, ſont d'une ſi grande delicateſſe, qu'elle les rend non ſeulement imperceptibles à nos Obſervations, mais même qu'elle ne nous permet presque pas d'en concevoir aucune idée. Nous ignorons, par exemple, encore, comment ſe fait la bile dans le foye, & comment s'opere la ſécretion de l'urine dans les Reins, quoique *Gliſſon*, *Bellini* & *Euſtachius*, ayent fait là deſſus de trés belles découvertes, qu'on peut trouver dans leurs excellens Ouvrages.

J'omets bien d'autres preuves des bornes étroites de nos connoiſſances. Cependant nous pouſſons tous les jours plus loin nos recherches, & je ne doute pas qu'avec le tems on ne vienne à bout d'expliquer bien des choſes qui ſont encore inexpliquables pour nous, & en particulier de faire des découvertes, dont on tirera beaucoup d'uſages dans la Medecine.

Qu'eſt-

Qu'eſt-ce qui nous empêche de trouver le Mechanisme de ces parties, que nous pouvons néanmoins ſi bien injecter avec de la cire colorée, qu'on ne ſauroit douter que la matiere injectée ne paſſe par tous les vaiſſeaux, dont ces parties ſont compoſées? C'eſt ce qui a lieu ſurtout dans le Foye, & dans les Reins.

Il eſt vrai que *Ruyſch* a déjà pouſſé en quelque ſorte ſes injections dans tous les vaiſſeaux de ces parties là; mais à quoi cela l'a-t-il mené? Il n'y trouve, comme ailleurs, que ce qu'on nomme les *pinceaux* des vaiſſeaux, qui ne nous expliquent pas grand' choſe.

Lorsque ce célébre Anatomiſte avoit injecté quelques viſceres avec une matiere molle, ou liquide, dont il n'etoit pas trop le maître, il la maceroit, & en la contractant beaucoup avec les mains ſous l'eau qu'il rafraichiſſoit ſouvent, il faiſoit paroître partout les *pinceaux* en queſtion.

Mais que produiſoit il par ce moyen? Il détruiſoit la liaiſon des vaiſſeaux plus ſubtils, changeoit leur ſituation, les déchiroit tous, & faiſoit tomber dans l'eau ce qu'il cherchoit à connoitre. Que diroit l'Horloger le moins habile, s'il voyoit qu'on s'y prit de cette maniere pour démontrer la ſtructure d'une Montre?

Auſſi la matiere molle dont *Ruyſch* s'eſt ſervi, ne convient-elle point à cet uſage. Car, dés qu'on en coupe un petit morceau pour l'expoſer au Microſcope, elle ſort des vaiſſeaux par où elle etoit entrée, ils deviennent flasques, la matiere ſéparée ne montre plus que de petits points marqués, ſans apparence de liaiſon; enfin, & en un mot, cette matiere enduit le tout d'une graiſſe, qui ne permet gueres de voir autre choſe que cette graiſſe même.

Il faut s'y prendre plus doucement avec des ouvrages de la Nature auſſi délicatement travaillés, & ſe ſervir d'une matiere plus dure & cohérente pour injecter ces vaiſſeaux, lorsqu'on veut avoir le plaiſir d'en découvrir les merveilles. Voici une idée abregée des moyens dont je me ſuis ſervi pour examiner les parties nobles de notre Corps.

J'appelle *grands vaiſſeaux* des viſceres, ceux qui n'ont pas encore de connexion avec les vaiſſeaux excretoires; & je nomme

petits vaiſſeaux, tant ceux qui ont cette connexion, que les extretoires eux-mêmes.

Telle eſt la maniere d'injecter les grands vaiſſeaux des viſceres.

Prenez de la cire blanche, bien exemte de toute graiſſe de boeuf, ou de mouton, autant que vous en voulez. Joignez y une cinquieme partie de Colophonie, une dixieme de Therebentine de Veniſe; & du Vermillon, ou autre couleur, autant qu'il en faut, pour donner aſſez de teinte & de cohéſion à la matiere réfroidie. Injectez enſuite les grands vaiſſeaux avec cette matiere, au point que vous voulez, en y employant toute la dexterité que demande cette Opération.

Donnons à preſent la maniere de ſéparer les vaiſſeaux fins d'avec les grands, par le moyen de la matiere injectée, en obſervant l'eſpace des cavités des grands vaiſſeaux.

Mettez la partie injectée dans de l'eſprit de nitre aſſez fort, ou dans de l'huile de vitriol, détrempée dans de l'eau. Laiſſez-la dedans, jusqu'à ce que l'acide ait diſſous ce qui n'eſt pas de la cire. Prenez la enſuite, lavez la dans de l'eau fraîche, & vous aurez le plaiſir de voir les cavités des grands vaiſſeaux, formées en cire.

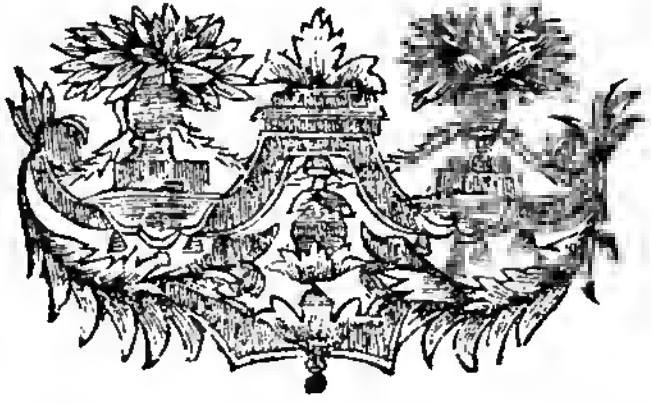
Comme ces ſortes de préparations ſont les plus curieuſes de toutes celles que les Anatomiſtes peuvent garder dans leurs Cabinets, mais quelles y ſont expoſees à être facilement gâtées & caſſées; je vais fournir encore une methode propre à les rendre plus durables, avant que d'expoſer celle que demande l'examen des vaiſſeaux fins.

Prenez deux parties de gypſe en poudre très ſubtiliſé, & une partie de tuiles pulveriſées. Mêlez bien enſemble ces poudres ſeches dans un vaiſſeau, mettez y enſuite autant d'eau de fontaine qu'il en faut, pour faire une pâte aſſez fluide, aprés avoir mêlé rapidement ces maſſes avec la main. Jettez dans cette maſſe votre préparation de cire, & tenez l'y, jusqu'à ce quelle ait durci. Aprés qu'elle a durci, & qu'on l'a fait ſécher à l'air, mettez la au feu, & de degré en degré faites la chauffer jusqu'à la rougeur. Quand cette rougeur paroit, & que toute la cire eſt brulée, vous avez le moule. Dans ce moule verſez de l'argent bien fondu; aprés quoi mettez le moule dans du vinaigre, & vous trouverez aſſez de facilité à le ſéparer de l'argent.

De

De cette façon on peut injecter les vaiſſeaux de degré en degré, & les préparer jusqu'aux vaiſſeaux les plus fins, que l'on injecte enſuite de cette maniere.

Prenez la matiere que j'ai indiquée pour les grands vaiſſeaux, & ajoutez y ſeulement autant d'huile de Therebentine qu'il en faut, pour l'inſinuer enſuite dans les vaiſſeaux plus fins. Coupez aprés cela un petit morceau de la partie que vous voulez examiner, verſez une goute d'eau forte ſur la ſurface, & laiſſez l'y jusqu'à ce qu'elle ait ſeparé les membranes des vaiſſeaux. Expoſez la enfin au Microſcope avec le miroir de réfléxion, & vous verrez un ouvrage bien plus accompli que celui que les Graveurs peuvent executer ſur des plaques de cuivre, & dans lequel vous découvrirez & développerez tout ce que vous ſouhaitez.



OBSER-

OBSERVATIONS
SUR LA VERITABLE OSTEOCOLLE DE LA MARCHE DE BRANDEBOURG,
PAR M. GLEDITSCH.

Traduit du Latin.

I.

LOrsque Sa Majeſté voulut bien m'accorder, il y a quelques années, la charge de *Phyſicien provincial* du Cercle de *Lebus*, & qu'habitant à la Campagne, je cultivois mes études de Botanique dans les contrées qui ſont en deça & en delà de l'Oder, auſſi bien que dans celles qu'arroſe la Sprée, je trouvai l'occaſion la plus favorable de faire dans des lieux ſablonneux & incultes pluſieurs découvertes par rapport aux pierres, aux terres, & aux productions figurées, ou pétrifiées. C'eſt, par exemple, dans de ſemblables lieux que j'ai ſouvent recueilli de vieilles pieces d'un certain foſſile, ſur le nom & l'origine duquel j'etois d'abord fort incertain; mais je me procurai enſuite la certitude que c'etoit de veritables branches du *Lapis fabuloſus* de *Thomas Eraſtus*, (*) qu'on nomme vulgairement *Oſteocolle*, quoique d'autres luy ayent

(*) Voyez la Lettre qu'il écrivit à Conr. Gesner en 1572. *de natura, materia, ortu & uſu LAPIDIS SABULOSI, qui in Palatinatu ad Rhenum reperitur.* On la trouve à la fin de la II. Part. de ſa *Diſput. de Medicina nova Phil. Theophraſti.*

ayent impoſé les noms de *Pſammoſteum*, *Holoſteum*, *Foſſile arborescens* &c. (*)

II. Ce foſſile, l'un des plus curieux, n'a été gueres connu des Auteurs qui ont écrit ſur l'Hiſtoire Naturelle, ou ſur la matiere Medicale, on n'en trouve que des deſcriptions imparfaites & confuſes; & c'eſt ce qui m'a engagé à le ſoumettre à un examen plus attentif. Il n'etoit gueres queſtion que de la figure externe de notre foſſile, & du lieu de ſon origine, dans les principales rélations qu'on en a données jusqu'ici, & ne faiſant pas beaucoup d'attention à la choſe même, on avoit confondu pluſieurs productions étrangeres, par exemple, les *gypſeuſes*, les *arenaires*, les *ſelenitiques*, les *ſtophacées*, les *ſtalactitiques*, les *argilleuſes*, & même les *concretions ſalines*, avec les productions *martiales*, & autres *metalliques figurées*. C'eſt ce qui me donnera lieu de relever pluſieurs erreurs, & de les rectifier ſuivant la meſure de mes forces.

III. Pour arriver à mon but, j'ai fait en divers tems, & dans des ſaiſons differentes, des courſes dans les lieux ſablonneux & incultes des deux Marches, où ce foſſile étoit depuis pluſieurs ſiecles connu de tout le monde, recueilli & employé à des uſages tant internes qu'externes. J'en ai pris les informations les plus exactes, & j'ai mis par écrit tout ce qui concernoit notre foſſile, par rapport au *lieu*, à la *ſituation*, à la *figure*, à la *grandeur*, à la *proportion*, & à la *matiere*.

IV. Il y a des terrains aſſez étendus dans la Marche Electorale & dans la Nouvelle, qui, bien qu'environnés de toutes parts de campagnes plus fertiles, & même excellentes, ne laiſſent pas d'etre entierement ſablonneux & pierreux. C'eſt ce qui fait qu'aucune plante ne ſauroit presque y vivre, ou du moins y proſperer, excepté le *Tithymale*, la *Bruyere*, la *Statice*, l'*Yvraye*, le *Jaſion*, le *Pié de Chat*, le *Bouleau*, le *Pin*, & trés peu de *Chiendent*. S'il en faut croire les anciens monumens, toutes ces contrées du tems de nos Ancêtres n'etoient que d'immenſes forêts, que la négligence, ou l'avarice des habitans ont détruites, & que l'on a mal à propos entrepris de défricher,

(*) Voy. *Hermann. Maſſograph.* p. 183. & ſ.

cher, pour en faire des champs, ou des prés, au lieu qu'on n'en a fait que des terres ingrates & miſerables, qui ſeroient à peine rétablies & fertiliſées par le travail & l'induſtrie d'un ſiecle entier. Il eſt réſulté de cet attentat oeconomique, ſi je puis m'exprimer ainſi, les inconveniens les plus fâcheux. En labourant, on détruit le peu de mouſſe dont la terre ſablonneuſe eſt revêtuë, elle meurt, & enſuite l'ardeur du Soleil attenuë le ſable, & la violence du vent l'emporte de toutes parts. Il arrive quelquefois, dans de grandes tempêtes, que des lieux élevés s'applaniſſent, ou qu'il ſe forme des montagnes dans les plaines; de ſorte qu'il ne reſte presque aûcune eſperance de voir une croute mouſſeuſe regarnir ces contrées.

V. Il eſt fort vraiſemblable que les anciennes forêts dont nous avons parlé, n'etoient compoſées, outre les diverſes eſpeces de *Chênes*, que de *Bouleaux*, de *Pins*, de *Peupliers tremblans*, de *Charmes*, & d'*Aunes*; la ſtenlité du terroir auroit eu peine à en nourrir d'autres. Aprés les avoir abattus, nos Ancêtres qui avoient du bois en abondance, ne ſe ſont pas mis en peine d'en arracher les troncs & les racines; comme le prouvent ces amas de racines qu'on trouve enſevelis ça & là ſous le ſable, & qui avec le tems s'y ſont enfoncés de plus en plus.

VI. C'eſt dans les endroits que nous venons de décrire qu'on rencontre une quantité conſiderable de notre foſſile, dans un ſable plus ou moins leger, blanc, gris, rouge, ou jaunâtre, fort reſſemblant à l'eſpece de ſable, qu'on trouve ordinairement au fonds des rivieres. Celui qui touche immediatement notre foſſile eſt plus blanc, & plus mou que le reſte, & annonce ſuffiſament l'exiſtence d'une terre plus déliée, qui eſt d'une blancheur de neige, & qui ſous la forme & l'apparence de farine s'attache fortement aux mains. Quand dans les tems pluvieux cette terre vient à ſe diſſoudre dans des lieux élevés, les eaux l'entrainent en forme d'emulſion dans les creux qui ſe trouvent placés au deſſous.

VII. Cette terre ſubtile ne differe gueres de la *Marne*, & conformément à l'examen que M. *Pott* en a fait, on peut la mettre au rang des veritables terres de chaux. Elle ſe trouve attachée au ſable

dans

dans des proportions trés differentes, depuis la hauteur de trois ou quatre pieds jusqu'à celle de huit; & plus le ſable eſt voiſin des branches de notre foſſile, plus la quantité de cette terre augmente. On peut même dire qu'il n'y a pas grande difference entr'elle & la matiere même, qui conſtituë le corps du foſſile.

VIII. Quoique nous ayons inſinué que cette terre deſcend le plus ſouvent des lieux elevés dans d'autres plus bas, cela n'empêche pas qu'on n'en trouve quelquefois des lits entiers mêlés au ſable, à la profondeur de quinze ou vint pieds, & même tout le fonds de quelques étangs en eſt, comme on peut aiſément s'en convaincre en éxaminant celui de divers étangs des cercles de *Barnim* & de *Lebus*. Il y en a ſurtout un bien remarquable, ſitué dans le bois fort connu de *Lapenow*, entre les villages de *Friedland* & d'*Hermersdorff*, auquel on a ſpecialement donné le nom de *Weiſſenſee*, à cauſe de la couleur blanche de ſon fonds. Et, pour ajouter ceci en paſſant, ce qui augmente la celebrité de cet Etang dans toute la Province, & dans celles qui y confinent, c'eſt que les poiſſons & autres animaux aquatiques y ſont blancs, ou du moins plus blanes, en ſorte qu'à la couleur ſeule on peut les diſtinguer aiſément de ceux qu'on prend dans les Etangs voiſins. *

*Voy. une petite Diſſ. que j'ai publiée *de Foco ſubglobofo, ſeſſili, & molli.*

IX. Pour ce qui concerne le tems de l'année, où notre foſſile s'offre aux regards des curieux, il n'y en a point de particulier, comme quelques uns le prétendent; mais ce qu'il y a de vrai, c'eſt que les tems venteux, ou pluvieux, font diſtinguer beaucoup plus aiſément les pieces de ce foſſile, en ſorte qu'elles s'offrent, pour ainſi dire, d'elles mêmes aux yeux. L'impetuoſité du vent enleve, par exemple, quelquefois tout le ſable, & laiſſe entiérement à nud les extremités du foſſile, ou au contraire, le vent raſſemble de petits monceaux d'un ſable plus luiſant, ſous leſquels on juge aiſément que le foſſile ſe trouve caché. Pareillement une pluye un peu longue, ou une fonte ſubite de neige, venant à laver diverſes branches du foſſile, qui pouſſent vers la ſurface, les découvre tout à fait, & ſépare d'avec le ſable le reſte de la terre qui les environne. Car ces branches inhérentes indiquent avec beaucoup plus de certitude le tronc entier du foſſile qui eſt ca-

 ché,

ché, que les pieces rompuës qu'on trouve çà & là comme egarées ſur la ſurface du ſable, & que le vulgaire des *Lithophiles* prend pour des indices certains & indubitables. Mais ces bonnes gens ſe trompent le plus ſouvent, & ſont dans le cas de ceux qui, faute de connoiſſances métalliques aſſez etenduës, s'imaginent, en voyant des fragmens de mines, ou des pierres qu'on nomme *gemmes*, épars dans une contrée, qu'on doit infailliblement trouver, en creuſant au même endroit, des lits entiers & ſouterrains de metaux, ou de gemmes. C'eſt auſſi quelque choſe de bien ridicule que ce que *Zorn* rapporte de *Colerus*, (*) qui prenoit " l'Oſteocolle pour une veritable plante, à laquelle il at-
„ tribuoit une petite fleur bleuë, qui laiſſe en tombant ſur le ſable
„ des traces, par le moyen desquelles on découvre le foſſile entier." On trouve à peuprés des choſes du même ordre dans le petit conte ſuivant, par lequel *Anſelme Boetius de Boode* en impoſoit à la crédulité d'un certain *Uldaric de Burchsdorff*, Maître d'Hotel de l'Empereur Frederic Rodolphe II. Il lui diſoit, " que dans ſa Patrie le *La-*
„ *pis fabuloſus* croiſſoit comme une plante, d'une maniere tout à fait
„ admirable, & qu'au commencement du Printems on le voyoit
„ pouſſer de terre ſous l'apparence d'un petit Chou cabut, avec de
„ petites feüilles cendrées, & noirâtres, qui ſe dévelopoient enſuite,
„ & s'etendoient du coté de la terre. Que dans cette petite tête qui
„ ſortoit, on trouvoit une moëlle, ou pouſſiere, qui ſe fondoit aiſe-
„ ment en liqueur, & que les branches de cette plante étoient oſ-
„ ſeuſes." Se peut-il des obſervations plus fauſſes, & un récit plus ridicule?

X. A l'aide du vent, ou des pluyes, les branches de notre foſſile ſe découvrent beaucoup plus aiſément dans les lieux elevés que dans les plaines. Quand on les a trouvées, on détache avec précaution le ſable d'un coté en ſuivant la branche juſqu'à ce qu'on ſoit arrivé au tronc de tout le foſſile, & qu'on l'ait mis à nud avec toutes les racines qu'il jette de coté & d'autre. La longueur de la racine, qu'il n'eſt pas bien poſſible de déterminer, mene auſſi quelquefois obliquement

(*) Botanolog. Med. p. 488. Ajoutez à ce que nous diſons ici *Schwenckfeldt, Catal. Foſſil. Sileſ.* L. III. p. 387. & *Athan. Kircher. Muſ.* p. 207.

quement au tronc même ; & quand on y eſt parvenu, il faut ôter tout le ſable, (qui a pour l'ordinaire deux pieds au moins de hauteur,) de maniere qu'on puiſſe appercevoir commodément du même coup d'oeil le partage & le cours des racines. Au reſte, tout le ſable qui eſt à decouvert dans les bois, dans les champs, & dans les bruyeres, eſt ordinairement ſec à la profondeur de deux pieds ; mais dans les endroits, où notre foſſile croit, on trouve déjà l'humidité à un pied ; & cette humidité va en augmentant d'une maniere ſenſible etant même plus grande, à proportion qu'il y a dans le ſable une plus grande quantité de cette terre de chaux, dont nous avons parlé ci-deſſus. Cette quantité d'humeur croupiſſante humecte perpetuellement le bas des plus grandes branches de notre foſſile, autour desquelles elle ſe rencontre.

XI. Tant que le tronc entier eſt encore renfermé dans le ſable, la forme du foſſile ne s'offre aux yeux que d'un coté, & alors elle repréſente aſſez parfaitement le bas du tronc d'un vieil arbre champêtre, par rapport à la figure, à la grandeur, à la ſituation & aux proportions ; & ſes racines en partie deſcendent jusqu'à la profondeur de quatre à ſix pieds, en partie s'etendent obliquement de tous cotés. Il faut relever ici ce que quelques uns des Auteurs, qui ont écrit ſur l'Hiſtoire Naturelle, avancent de contradictoire à la vraye ſituation de ce foſſile, en diſant que *ſes branches croiſſent à la ſurface de la terre.* Il y a pourtant des rélations qui ſont aſſez d'accord avec notre expoſé, comme celles de *Beckmann*, (*) d'*Hermann*, (**) & d'*Eraſtus*, (***) Profeſſeur autrefois aſſez célèbre à Heidelberg, qui s'exprime ainſi au ſujet de la grandeur & de la figure de notre foſſile. " Aux environs du " même endroit, nous avons trouvé le tronc, qui conſervoit la même " grandeur jusqu'aux racines, enſorte qu'il reſſembloit à un tronc " d'arbre recourbé dans cet endroit. "

(*) Dans une Lettre à *Henri Oldenbourg*, inſerée dans les *Tranſ. Phil.* du mois de Septembre 1668.

(**) *Maslogr.* p. 184 & ſ. où l'Auteur donne la figure, non de tout le foſſile, mais d'une groſſe branche, & encore peu fidelement.

(***) *loc. cit.* Voy. le Note ſur le §. I.

XII. Ce que nous avons dit jusqu'ici, ſert non ſeulement à faire connoitre la figure de notre foſſile, mais on y apperçoit encore pluſieurs circonſtances, qui menent à des concluſions fort probables ſur la génération. Le tronc même du foſſile, dont la grandeur & l'epaiſſeur varient, doit ſans doute ſon origine au tronc de quelque arbre mort, & en partie carié: ce qui ſe prouve ſuffiſamment par la léſion & la deſtruction de ſa ſtructure interieure. Car le tronc exterieurement raboteux, eſt rompu d'un coté, & creuſé par une eſpece de carie, qui enleve non ſeulement toute le ſubſtance interieure, dont le défaut eſt ſuppléé par la terre de chaux, ou par le ſable, mais même ne laiſſe ſouvent aucun veſtige de l'ecorce, ni des cercles du corps ligneux. Quelquefois pourtant, mais rarement, on trouve encore le parenchyme à l'extremité des racines.

XIII. Les racines les plus fortes, & les plus voiſines du trone, ſoit qu'elles deſcendent profondément en ligne droite dans le ſable, ſoit qu'elles s'etendent obliquement, ſont presque toujours plus groſſes que le bras, mais elles s'aminciſſent peu à peu au ſe diviſant, de ſorte que les dernieres ramifications ont à peine une circonference, qui égale le diametre d'une plume d'oye. Pour les productions capillaires des racines, elles ne ſe trouvent en aucun endroit du foſſile, ſans doute parce que la tenuité de leur texture ne leur permet pas de reſiſter à la putrefaction; mais on ne laiſſe pas d'obſerver dans les racines des traces abondantes de leur exiſtence, telles que ſont, par exemple, divers tubercules, des noeuds, des avances, des éminences, & de petits creux diſperſés ſur la ſurface.

XIV. Quelquefois une *Matrice* d'une figure ſinguliere entoure les racines, ſurtout les plus grandes, & les ſerre étroitement. Sa ſubſtance n'eſt pas fort cohérente, & reſſemble à de la limaille. C'eſt un compoſé d'ecorce en pouſſiere, & de bois pourri; & l'on y trouve un témoignage certain de la corruption à laquelle a été réduit un arbre auparavant vivant. C'eſt ce qui fait que, quoique le ſable ne manque pas d'humidité, on ne ſauroit détacher cette matrice entiere, mais qu'elle tombe auſſi-tot en une maſſe informe, en ſe confondant avec la terre de chaux & le ſable. Surtout quand le ſable domine

dans

dans le mêlange avec la terre. La matiere de notre fosſile eſt un mixte qu'on a peine à définir: au moins ne peut-on le faire qu'à l'egard des fragmens les plus purs; tous les autres montrent une extrême inconſtance, tant à l'egard de leur compoſition, que de leur humidité & de leur dureté. C'eſt ainſi, par exemple, comme des obſervations fréquemment répetées le prouvent, qu'on trouve rarement le tronc & les groſſes racines, durcies ou petrifiées dans le ſable; elles y ſont plutot un peu humides, & molles; & lorsqu'on les expoſe à l'air, elles deviennent ſéches & friables. On peut établir quelques proportions dans leur compoſition, mais on en découvre moins dans les autres, qui ſont plus petites, & qui, tant dans le ſable qu'à la ſurface, conſervent rarement le même ordre de compoſition. Ces dernieres ont outre cela une écorce purement ſablonneuſe, raboteuſe, d'une couleur cendrée ou mêlée; & ſous ce ſable on trouve une ſubſtance, qui a quelque humidité, mais qui eſt pourtant dure, & presque entierement pierreuſe. Cette difference a été, ſi je ne me trompe, inconnüe aux Auteurs, qui jusqu'à preſent n'avoient entrepris l'hiſtoire de l'Oſteocolle, que d'aprés les fragmens qui ſe trouvent dans les Apoticaireries, & qui ſont de ceux qui ont ſouffert les injures du mauvais tems.

XV. La couleur du ſoſſile encore enſeveli ſous le ſable, eſt ordinairement d'un blanc tirant ſur le jaune; mais pourtant quelques parties ont la blancheur de la neige, tandis que d'autres ſont cendrées, ou noirâtres. Cela dépend ſouvent du ſable ſeul, & quand on l'a ecarté, la blancheur de la matiere ſe manifeſte. Quelquefois auſſi, ce changement de couleur arrive par la ſimple expoſition à l'air.

XVI. Les circonſtances du tems & du lieu, la figure externe, la ſituation, & le mêlange des parties, ſe trouvent donc déterminées au ſujet de notre ſoſſile, par les Obſervations que nous venons de propoſer. Il ſembleroit convenable d'en offrir à préſent la figure aux yeux du Lecteur; mais divers obſtacles déjà inſinués ci-deſſus ne le permettent pas. On en approcheroit aſſez, vû le rapport extreme de la figure exterieure, en faiſant graver des racines de divers arbres, mortes & cariées. En effet, il n'y auroit aucune contradiction à dire,

que

que des changemens d'une même eſpece, *pierreux*, par exemple, ou *ſalins*, ou *metalliques*, peuvent arriver aux racines d'arbres de pluſieurs eſpeces differentes; & l'experience le confirme. Il n'y auroit par conſéquent non plus aucune abſurdité dans l'opinion, que des arbres de diverſes eſpeces venant à mourir, & enſuite à ſe pourrir & ſe creuſer, concourent à la formation d'un ſeul & même foſſile, aſſavoir le notre.

XVII. Conſiderons préſentement l'interieur de ce foſſile avec plus d'attention; nous y trouverons pluſieurs choſes fort remarquables. Et d'abord à l'egard des racines, les principales ſont tout à fait entieres, & d'une ſubſtance presque uniforme. Cette ſubſtance eſt plus rare au milieu, & vers l'ecorce plus dure, & en quelque ſorte graveleuſe. Il y a cette difference entre les branches plus groſſes & plus épaiſſes, & les moindres, que les premieres ſont compoſées d'une matiere beaucoup plus déliée, plus pure, & qui, à cauſe du défaut d'une ſorte de glu naturelle, à moins de cohéſion; au lieu que celles-ci, c'eſt à dire, les moindres & les plus petites, admettent le plus ſouvent deux ſubſtances dans leur compoſition. Certaines petites branches d'un ſeul & même tronc, quoique cachées dans un ſable aſſez humide, ſont dures, & leur dureté augmente, au point qu'elles deviennent de veritables pierres, qui rendent des étincelles en les frappant contre l'acier. Quelquefois j'en ai vu à la ſurface du ſable pluſieurs, dont le centre eſt creuſé; mais ce ſont le Soleil & la temperature de l'air, qui les ont calcinées hors du lieu de leur formation; elles appartiennent à la Claſſe de celles que nous avons indiquées ci-deſſus §. I. & IX.

XVIII. Cependant, quoique les racines de notre foſſile ſoient moins creuſées en forme de tuyaux, lorsqu'elles ne ſortent pas de leur place naturelle, on y remarque encore d'autres differences. Il y en a, par exemple, quelques unes dont la ſubſtance eſt tellement uniforme, qu'on ne ſauroit diſtinguer l'ecorce d'avec le centre, au lieu que dans d'autres le centre eſt tout percé de petits trous, qui le font reſſembler exactement à la *diploë* des Os; phénomene, dont nous expliquerons plus bas la raiſon, qui dérive de la formation même du foſſile.

file. Dans certaines groſſes branches il demeure quelquefois des reſtes de bois pourri, ſans ſuc, & comme de la limaille; tandis que dans d'autres le centre du corps ligneux eſt ſec, dur, & presque comme de corne: ce qui s'etend quelquefois à diverſes repriſes jusqu'à la longeur de quatre, ou de ſix pieds. Cette portion *cornée* du corps ligneux n'eſt point une des moindres racines, une racine capillaire, (comme pourroit ſe l'imaginer une perſonne peu au fait de ces matieres;) pour s'aſſurer du contraire, il n'y a qu'à examiner les troncs d'arbre, qui dans les lieux marêcageux viennent à ſe détruire peu à peu, etant creuſés, & rendus poreux par l'humidité naturelle du terroir.

XIX. Nous avons deja donné une idée de la matiere de notre foſſile, & nous avons fait connoitre l'extreme rapport qu'il y a entr'elle, & la terre de chaux mêlée au ſable: pour achever de dire ici ce que nous en penſons, il n'y presque point, ou même point de difference entre ces matieres. Il faut ſeulement prendre garde qu'il ne s'agit point de ces pieces, qui étant expoſées à l'air, y éprouvent des changemens. La maſſe terreſtre, qui, à proprement parler, conſtituë notre foſſile, eſt une vraye terre de chaux, & quand on l'a nettoyée du ſable & de la pourriture qui peut y reſter, l'acide vitrioli-que, avec lequel elle prend une forte effervescence, la diſſout en partie: mais je ſuis pourtant en doute, ſi c'eſt une Terre pure, & entierement dégagée de la liqueur du bois pourri, ou de l'acide. Le ſavant *Henckel* * nie l'effervescence & la ſolution de l'Oſteocolle dans l'acide du vitriol; mais il faut qu'il ait pris quelque autre foſſile pour l'Oſteocolle de la Marche.

* *Flora Saturn* p. 285.

XX. La matiere de notre foſſile, lorsqu'elle eſt encore renfermée dans le ſable, eſt molle, elle a de l'humidité, ſa cohérence eſt lâche, & elle exhale une odeur acre, aſſez foible cependant; ou bien elle forme un corps graveleux, pierreux, inſipide & ſans odeur. Tout cela met en évidence, que la terre de chaux de ce foſſile n'eſt point *du gravier fin, lié par le moyen d'une glu*, comme le prétendent *Th. Erafius* † & *Hermann*; * ce dernier etant même perſuadé, *que le ſable fin ſe convertit avec le tems dans la matiere de notre foſſile.* Cela répugne aux principes reçus, ſuivant leſquels toute eſpece de

† *ub ſup.* p. 140.

* *Maßlogr.* p. 185.

ſable étant une terre vitrifiable, ſe trouve par là en oppoſition avec les terres de chaux, & ne peut jamais ſe changer en elles.

XXI. Lorsqu'on peut remarquer quelque proportion dans la compoſition de la matiere de notre foſſile, elle conſiſte pour l'ordinaire en parties égales de ſable & de terre de chaux, comme je m'en ſuis aſſuré en les ſéparant dans l'eau. De cette maniere, une once de matiere pure a rendu une demi-once & cinq grains de terre de chaux trés deliée, où ſe trouvoit mêlée une portion de ſable commun, groſſier & peſant, qui alloit au poids d'une drachme & quinze grains; à quoi il faloit ajouter enfin deux drachmes d'un ſable trés fin, qu'on avoit plus de peine à ſéparer du reſte de la terre de chaux. Ainſi il ne manquoit au poids entier de la matiere que deux ſcrupules qui s'etoient perdus dans la ſolution. L'examen Chymique de notre foſſile a été fait par Mrs. *Kundmann*, *Neumann*, *Pott*, & quelques autres, aux écrits desquels nous renvoyons ceux qui en ſont curieux, le ſujet n'etant pas de notre reſſort. Nous attendons une nouvelle analyſe de l'Oſteocolle, que M. *Marggraff* nous fait eſperer. *

* C'eſt celle qui ſuit ce Mémoire.

XXII. Par rapport à la génération de notre foſſile, les Auteurs ſe partagent en divers ſentimens; mais les contradictions où ils tombent, viennent ſurtout de ce qu'ils confondent d'une maniere étonnante des corps étrangers, & entiérement differens. Il y en a auſſi, qui déduiſent, par exemple, l'origine de notre foſſile d'une eſpece d'incruſtation fortuite & confuſe, ſalino-terreſtre, ou glutineuſe, pareille à celle qui produit le *Zingiberites*, auſſi bien que pluſieurs veines mêlées d'argille & de ſable. Mais lorsqu'en comparant ſoigneuſement toutes les circonſtances qui concernent notre foſſile, nous l'examinons attentivement, & ſuivant les régles de l'Hiſtoire Naturelle, dans le lieu même de ſa formation, nous n'avons plus beſoin de recourir à aucune de ces fictions. Quelques Auteurs ont été plus prés du vrai, mais en trés petit nombre, comme *Neumann*, qui a pris notre foſſile pour *une racine d'arbre petrifiée*, & *Ferrantes Imperatus*, † qui dit; que l'Oſteocolle eſt *une racine changée en pierre, molle comme du ciment, & d'une ſubſtance ſablonneuſe.* Ces derniéres opinions ſont plus ſolidement appuyées. En effet notre foſſile, dont

† *Hiſt. Nat.* p. 255.

dont la figure naturelle & conſtante eſt celle d'une racine d'arbre champêtre, n'eſt réellement autre choſe qu'*une ſemblable racine avec le bas du tronc, qui etant morte a été pourrie dans le ſable par l'humidité croupiſſante, & dont le tems a changé l'apparence, en la rempliſſant de terre de chaux.* Les obſervations que nous rapporterons encore dans la ſuite, acheveront de juſtifier notre hypotheſe.

XXIII. Outre le témoignage de l'experience, on peut encore prendre pour garans les caracteres ſuivans, qui conviennent à tout corps naturel & vrai, qui a ſubi le changement de la pétrification, & qui le diſtinguent ſenſiblement de toutes les incruſtations, ou productions figurées quelconques. Ces caracteres ſont la *figure*, la *grandeur*, le *nombre*, la *ſituation*, & la *proportion naturelle*. Quand ils ſe trouvent réünis dans un corps petrifié, & le rendent conſtamment ſemblable à un corps tel qu'il etoit dans ſon état de vie, cela détruit entiérement tout ſoupçon d'incruſtation, ou de telle autre formation fortuite & confuſe.

XXIV. En parcourant des lieux champêtres & marécageux, on rencontre çà & là des troncs d'arbre pourris, qui ont une parfaite reſſemblance avec les troncs vivans les plus ſains, & qui, à en juger par leur grandeur, devroient avoir un poids trés conſiderable, quoique ſouvent ils ayent à peine quelques livres. C'eſt qu'ils n'ont point de ſubſtance ligneuſe interieure ; en ſorte que depuis la tige juſqu'aux racines c'eſt une pure cavité, où il ne reſte presque que les nerfs qu'on nomme *cornés*, & un petit nombre de vaiſſeaux cartilagineux du corps ligneux, toutes les apparences néanmoins s'y conſervant. Cet effet ſingulier eſt cauſé par l'abord perpetuel de l'humidité, & par l'état croupiſſant, qui pourriſſent peu à peu toute cette ſubſtance interieure, comme l'experience en fait foi.

XXV. Cette humeur putride & croupiſſante pénétre la tige par le moyen de ſon acreté, en paſſant à travers la texture celluleuſe juſqu'au cercle ligneux, elle obſtruë partout les fibres du bois, les amollit, & les ronge, de maniere qu'il en réſulte la ſolution de tout le continu, à la reſerve d'un trés petit nombre des parties les plus pures, qui ſemblent réſiſter entiérement à la putréfaction. Des

troncs & des racines dans cet état ſont ce que l'on peut imaginer de plus propre à la génération de notre foſſile dans le ſable; & voici comment la choſe ſe paſſe. Il ſe forme dans ces troncs, & dans ces racines, des cavités, où s'inſinuë facilement par le moyen de l'eau la ſolution de ſable & de terre de chaux, en entrant par tous les trous & les endroits cariés, & en deſcendant jusqu'aux extremités de toute la tige & des racines, jusqu'à ce qu'avec le tems toutes ces cavités ſe trouvent exactement remplies. L'eau ſuperfluë trouve aiſément une iſſuë, dont les traces ſe manifeſtent dans le centre poreux (voy. §. XVIII.) des branches les plus pures qui ſont moindres. C'eſt là l'unique maniere dont arrive la formation de notre foſſile; la choſe eſt inconteſtablement appuyée ſur l'experience, & c'eſt par là que l'on explique ſans peine, comment l'Oſteocolle reçoit & conſerve la figure, la grandeur, la ſituation, & la proportion exactement naturelle qu'on y remarque. Qu'eſt ce qui pourroit donc nous empêcher d'imiter la formation de ce foſſile, & de produire nous-mêmes en un moindre eſpace de tems de l'Oſteocolle, faite avec plus d'art, & plus pure? Je n'y vois point de difficulté.

XXVI. Au reſte on découvre la raiſon de cette molleſſe des plus groſſes branches de notre foſſile, dont nous avons parlé §§. XVI. XVII. en réflêchiſſant ſurtout, que toute l'humidité diſtille pendant un plus long eſpace de tems, & ſans diſcontinuer, à travers le ſable jusqu'au tronc. En effet le corps de l'Oſteocolle déjà tout formé ſe trouve plus denſe que le ſable, & trop ſerré pour transmettre l'eau, & s'il le fait, ce n'eſt qu'avec beaucoup de lenteur & de difficulté, ce qui fait qu'il y a autour du foſſile une humidité qui croupit perpetuellement, & qui eſt un veritable obſtacle à la pétrification. *M. Henckel* a déjà touché cette idée aſſez heureuſement, dans celui de ſes Ouvrages que nous avons cité plus haut. D'ailleurs il n'y a point de contradiction entre ce que nous avançons ici, & ce que nous avons dit §. XIV. des plus petites branches qui ſont aux extremités, & qui étant comme diſperſées, & fort éloignées du centre, ſont polies & presque de pur ſable.

XXVII. Ce

XXVII. Ce que l'Auteur de la *Meſſlographie*, & quelques autres, diſent au ſujet de l'incruſtation, ne s'accorde point avec la verité, tant à cauſe qu'il ne s'y trouve point de glu naturelle propre à produire cet effet, ou du moins qu'elle eſt trop délayée, que parce qu'on trouve ſouvent dans la maſſe de notre foſſile une portion égale de ſable & d'ordures. Outre cela il y a divers bois morts, ou pierres, qui ſe trouvent environnées de matiere pareille à celle qui forme l'Oſteocolle, c'eſt à dire, de ſable & de terre de chaux, & qui ne reçoivent point pour cela d'incruſtation.

XXVIII. (*) Je vais continuer à dégager l'hiſtoire de l'Oſteocolle de toutes les fictions, dont on l'avoit embaraſſée. Pour cet effet je mettrai ſous les yeux de l'Academie les nouvelles pieces de ce foſſile, que j'ai dernierement recueillies, & j'y joindrai les Obſervations inconteſtables, que j'ai réïterées pluſieurs fois, & avec toute l'exactitude dont je ſuis capable, ſur les lieux mêmes de la formation.

XXIX. J'ai toujours eu une veritable ardeur pour l'etude de l'Hiſtoire Naturelle, & j'ai parcouru avidement tous les Treſors qui ont été publiés, pour en étendre les bornes. L'Oſteocolle m'a fourni une nouvelle occaſion de les feuïlleter avec attention. Mais j'avoüe ingenüement, que je n'y ai jamais rien trouvé, qui pût mener à quelque certitude ſur la connoiſſance de ce foſſile, & procurer en particulier un jugement aſſuré ſur ſa génération. Au contraire je n'ai presque rencontré partout qu'une extreme confuſion. Quelques uns des échantillons que les Auteurs produiſent, approchent à la verité de la forme & de la couleur de l'Oſteocolle; mais la plupart n'ont même aucune reſſemblance avec ce foſſile, qui puiſſe leur en faire porter le nom.

XXX. Il m'eſt arrivé ſurtout de rencontrer fréquemment, tant dans les Cabinets des Curieux, que dans les Apoticaireries, une certaine eſpece de tuf, en partie informe, en partie compoſé de l'aſſemblage de pluſieurs petits tuyaux de differente nature, qu'on faiſoit

(*) Ici commence un ſecond Mémoire, que M. *Gleditſch* lut à l'Academie un an. aprés le premier, pour lui rendre compte de nouvelles Obſervations, qu'il avoit faites depuis ce tems-là.

paſſer pour de l'Oſteocolle. Ce tuf ſe trouve en abondance dans pluſieurs contrées de la Thuringe, par exemple, autour de *Tennſtædt, Sondersbauſen, Oſt & Weſt-Creiſen, Groſen-Ebrig* &c. ſur les bords de l'*Helpa*, & en d'autres endroits, & il eſt caché à la profondeur d'un pied ou de deux, ſous les terres les plus fertiles. On prétend qu'aprés avoir réduit une grande quantité de ce tuf en poudre par le moyen de certaines machines particulieres, on la porte tous les ans à *Meiſſen*, pour entrer dans la compoſition de la Porcelaine.

XXXI. Il m'eſt bien arrivé auſſi aſſez ſouvent de trouver de la vraye Oſteocolle, mais elle étoit ſi vieille, & ſi gâtée par l'action de l'air, qu'il étoit impoſſible de s'en ſervir pour faire des Obſervations. En voulant employer de ſemblables pieces alterées, pour en tirer des concluſions ſur la nature & la génération de tout le foſſile, on pourroit tomber dans des erreurs pareilles à celles des perſonnes, qui prennent pour des os de quelques Géans d'une grandeur étonnante, les os des animaux marins qu'on rencontre ſous terre. J'ai encore remarqué une plus grande confuſion à cet egard dans les Apoticaireries qui ſont hors de la Marche, & où l'on devroit trouver de veritable Oſteocolle, auſſi bien que dans les nôtres. On n'y employe, ſurtout vers les confins de la Forêt noire, que du Gypſe le plus commun, qui prenant le titre d'Oſteocolle, ſert à tous les uſages de Chirurgie, par une erreur trés dangereuſe, mais à laquelle perſonne ne s'oppoſe.

XXXII. Il ſemble qu'on ait quelque raiſon de demander ici, pourquoi les Phyſiciens n'ont encore dit que des choſes ſi incertaines ſur l'origine de notre foſſile, quoiqu'il y ait environ trois ſiecles qu'on en fait mention dans les Ecrits des Medecins. Mais il faut remarquer que, malgré l'ancienneté de ſon uſage, les pieces d'Oſteocolle ont été conſiderées fort négligemment, parce qu'elles paroiſſent peu pures, & qu'elles tombent aiſement en pouſſiere. Le petit peuple ramaſſant ces pieces, les alloit porter à bas prix aux Apoticaires, & leur livroit pêle-mêle les branches trouvées ſous le ſable, ou celles qui s'étoient calcinées à la ſurface, blanches, gâtées, dures, entamées, &c. Et c'eſt d'aprés cet état que les Auteurs ont fait leurs rélations, qui y conviennent fort bien. Il y a longtems que je m'etois apperçu

apperçu que les opinions erronées de ces Auteurs dérivoient principalement de cette source. Si les pauvres gens qui ramassoient l'Osteocolle, n'avoient voulu en apporter aux Apoticaires que de bien nette, & dégagée de toute pourriture de bois & d'ecorce, ceux-ci ne leur en auroient pas su beaucoup plus de gré, & ne les auroient gueres mieux payé.

XXXIII. Le seul Ecrivain que je sache, qui dans le siecle passé ait assez bien connu l'Osteocolle, est *Ferrantes Imperatus*. Il en a donné une courte description dans son *Histoire Naturelle*, & a joint la figure fort nette d'une piece, qui paroit avoir été formée dans un tronc de Bouleau. Quoique depuis lui quelques uns ayent parlé par ci par là dans leurs Ecrits de l'Osteocolle, & en ayent même dit certaines choses nécessaires à savoir, personne néanmoins n'a pu démontrer solidement l'origine de ce fossile, & cela faute d'Observations.

XXXIV. A l'egard du terroir natal de l'Osteocolle, où elle habite, pour ainsi dire, & a coutume de se former, l'Experience jointe au consentement de plusieurs Auteurs, dépose que le plus convenable est un terroir sterile, sablonneux, & leger. Au contraire toute Terre grasse, consistente, argilleuse, onctueuse, limoneuse, &c. lorsqu'elle vient à etre délayée par quelque écoulement abondant d'eaux, laisse passer lentement & difficilement l'eau *elle-même*, à plus forte raison quelques autres terres, comme celle dont l'Osteocolle est formée. L'Osteocolle se mêleroit intimément à la terre grasse, ou elle formeroit des lits plats au dedans d'elle, plutot que de pénétrer une substance aussi consistente.

XXXV. Voici le nom des endroits sablonneux & incultes des deux Marches, ou j'ai spécialement recueilli des fragmens d'Osteocolle, & en ai observé la génération. Le premier lieu qui m'ait fourni de veritable Osteocolle, c'est une campagne fort sablonneuse, qui confine aux Villes de *Potsdam*, *Treuenbritzen*, & *Belitz*, où je fis cette decouverte en 1735. A ces premiers fragmens j'en joignis d'autres, que me fournit Mr. *Feldmann*, habile Medecin & Physicien de *Ruppin*, qui les avoit tirés de la montagne sablonneuse de *Cremme*. En 1737. je fis une récolte abondante d'Osteocolle dans le territoire même

même de Berlin, hors de la porte qu'on nomme de Halle, & dans les terres ſablonneuſes, qui vont du Village de Schoeneberg à Charlottenbourg; mais les pieces etoient aſſez petites & vieilles. J'ai encore rencontré ce foſſile dans pluſieurs endroits du Cercle de *Lebus*, entr'autres autour de la Ville de *Münchenberg*, & des Villages de *Hoppengarten*, *Quilitz*, *Roſenthal* & *Friedland*, où j'ai recueilli beaucoup de pieces d'Oſteocolle en divers tems, depuis 1738. jusqu'en 1741. auſſi bien que dans les diſtricts voiſins de la baſſe Luſace, autour des Villes de *Beskow*, *Storckow* & *Lieberoſe*. Mais l'abondance & la varieté de l'Oſteocolle régnent ſurtout dans les petites collines ſeches & ſablonneuſes de la Nouvelle Marche, & principalement dans les champs, vignobles & bruyeres, qui ſont autour de la Ville de *Droſſen*, & de *Sonnembourg*. C'eſt là où depuis 1742 jusqu'en 1747. j'ai fait mes plus importantes Obſervations ſur la veritable génération de l'Oſteocolle.

XXXVI. J'ai deja parlé §. VIII. de la matiere de notre foſſile, quand il eſt enſéveli dans ces lits, qu'on trouve quelquefois mêlés en grand nombre au ſable. Dans la derniere courſe que j'ai faite ſur le territoire de *Droſſen*, j'ai eu occaſion d'examiner de nouveau de ſemblables lits, qui ſe trouvoient auprés d'une vigne abandonnée. Le terroir de la vigne, ſterile & ſablonneux, étoit couvert jusqu'à la profondeur d'environ un pied d'une eſpece de ſable blanc, leger, & pur, ſous lequel ſe trouvoient quelques lits de terre de chaux, qui alloient obliquement de haut embas à ſix ou huit pieds le profondeur, (étant à peu prés diſpoſés comme une certaine ſorte de pierre de taille.) Chaque lit de cette terre de chaux, de l'epaiſſeur d'environ deux pouces, & qu'on auroit pu appeller plutot une *lame*, ou *plaque*, de terre de chaux, étoit un peu humide & molle; la ſubſtance en étoit beaucoup plus épaiſſe & plus denſe que celle de l'Oſteocolle deja formée dans le creux d'un arbre pourri, mais elle étoit tout auſſi fragile.

XXXVII. Cependant la ſubſtance de cette lame groſſiere permet le paſſage à travers ſa partie inferieure, où elle a le plus d'humidité & de molleſſe, à diverſes petites racines d'arbres & d'arbuſtes, tels que le Ceriſier, le Cornoillier, le Coudrier, l'Eglantier &c. dont

les

les ramificatinns capillaires ſe diſperſent presque par toute la lame. J'ai auſſi obſervé des morceaux de bois autour de ces lames, ſans en avoir jamais remarqué un ſeul, qui ait ſouffert d'incruſtation, ni de pétrification.

XXXVIII. Dans les endroits de la vigne en queſtion, oppoſés à ceux-ci, & qui ſont les plus élevés, on trouve ſous le gazon des veines de terre de chaux, dont le mêlange eſt confus & incertain, & au milieu desquelles ſe rencontrent des amas de feüilles de Coudrier, qui ne ſont pas encore pourries. Ces veines ſe forment & s'accroiſſent tous les ans dans les tems de pluye, lorsque l'ecoulement des eaux entraîne avec ſoi vers les lieux ſitués plus bas, la terre de chaux, avec la terre ordinaire, les feüilles, le ſable & les autres ordures, plus ou moins diviſées, ſous la forme & l'apparence de rayons. Mais, ni ces veines, que les ignorans confondent avec l'Oſteocolle, ni les lames dont nous avons parlé, ne conſtituënt point la veritable Oſteocolle, quoiqu'elles renferment une partie de terre de chaux, qui eſt même quelquefois la plus forte dans le ſable. En effet toute terre de chaux, & figurée, n'eſt pas de l'Oſteocolle; celle là ſeule doit porter ce nom, qui par le moyen de la terre de chaux a ſubi un changement & une concretion, qui la rendent ſemblable à une vraye racine d'arbre, ou celle qui a été effectivement formée dans une racine d'arbre creuſe & cariée, que l'eau pourrit & remplit peu à peu de terre de chaux, de maniere qu'elle renferme une partie de la ſubſtance vegetale diſſoute, & quelle retient les caracteres naturels d'une racine d'arbre, ſavoir la figure, la grandeur, la ſituation & la proportion. Voilà la ſeule production qu'on puiſſe nnmmet à juſte titre *Oſteocolle*, & la ſeule qui devroit avoir le droit d'entrer dans les Apoticaireries, pour fournir des uſages dans la Medecine.

XXXIX. A la descente des mêmes lieux, vers une aunaye marêcageuſe, j'ai fait une petite Obſervation, à laquelle je ne m'attendois point du tout, & qui m'a cauſé une veritable admiration. Il y a dans un lieu eſcarpé un haut Pin d'environ ſoixante ans, qui étend ſes branches au loin, & qui eſt d'une verdure éclatante. Un débordement ſubit d'eaux a entraîné autrefois d'autour de cet arbre une

quantité de ſable, qui couvre les couches humides du terrain voiſin. Cela a mis entierement à nud ſes racines de devant, elles ſont expoſées à l'air, & par là ce bel arbre menace à toute heure ruïne.

XL. Cela m'a fait naitre l'envie d'examiner ſes racines de derriere, qui ſont, ou enfoncées dans le ſable, ou convertes de mouſſe. En levant la petite envelope mouſſeuſe, il s'eſt offert à ma vuë un ſpectacle tout à fait agréable, ſavoir, une branche de la groſſeur du bras, continuë au tronc, dont toute la ſubſtance morte étoit changée en veritable Oſteocolle, la terre ligneuſe & pourrie étant demeurée au centre; Cas certainement des plus rares, & qui fournit une preuve de mon hypotheſe au deſſus de toute exception, puiſqu'on y voit la pétrification d'une racine encore enſévelie de la longeur de ſix pieds dans le ſable, & qui tient à l'arbre vivant. Je ne crois pas qu'aprés cela on puiſſe encore former le moindre doute ſur la génération de l'Oſteocolle.

XLI. Rien ne fait plus de peine que l'extreme fragilité de notre foſſile, lorſqu'il eſt encore tout frais; fragilité qui ne permet pas d'en conſerver aucune belle piece entiere pendant longtems, la ſeule action de l'air, ou le moindre mouvement, y produiſant mille fentes, qui le font tomber par pieces entre les mains.

XLII. Enfin j'ai trouvé l'occaſion la plus favorable de répeter toutes mes Experiences ſur l'Oſteocolle, & de leur donner tout le degré poſſible de certitude. Le lieu qui me l'a fournie, eſt un monticule ſablonneux & deſert, qui termine un petit bois de pins dans la contrée de *Sonnenbourg*.

XLIII. J'y ai vu la veritable Oſteocolle déjà formée en diverſes manieres, dans les racines de pluſieurs arbres, creuſées par la pourriture. Ces racines, ſuivant la diverſité de leur diſpoſition, étoient plus ou moins profondément remplies; tantôt des troncs entiers étoient convertis en Oſteocolle, tantôt une, ou pluſieurs racines, les autres n'etant pleines que de cette terre noirâtre de bois pourri, qu'on nomme en Allemand *Holtz-Erde*, ou même de pur ſable. Dans quelques arbres dont l'ecorce étoit fenduë vers le bas, on voyoit la matiere de l'Oſteocolle, en maſſe encore groſſiere, chercher une iſſuë vers

les

les extremités ou elle s'etoit raſſemblée; dans d'autres, l'Oſteocolle n'avoit pu occuper profondément les cavités, à cauſe de la quantité de ſable, ou de terre pourrie, qui s'y etoit déjà inſinuée.

XLIV. J'ai auſſi compris que pluſieurs troncs étoient uniquement remplis de terre de bois, ou de ſable, parce que dans la plupart des autres le mêlange des ces matieres en parties presque egales, rendoit l'Oſteocolle très impure, & ne permettoit presque pas de la reconnoître hors du lieu de ſa formation. J'ai en effet trouvé la ſubſtance ligneuſe de quelques uns, réduite dans une pouſſiere qui ne ſe diſſipoit pas, mais qui mêlée avec l'Oſteocolle, formoit une concretion pierreuſe, plus ou moins dure.

XLV. C'eſt ainſi qu'à force de voyages pénibles, mais agréables, je me flatte d'avoir raſſemblé toutes les Obſervations qui ſervent à expliquer l'origine, la forme, & la génération de l'Oſteocolle, & à rendre complette la veritable hiſtoire de ce foſſile.

EXPERIENCES CHYMIQUES

FAITES

SUR L'OSTEOCOLLE DE LA MARCHE,

PAR M. MARGGRAF.

Traduit du Latin.

I.

CE qui m'a fourni la principale occaſion de faire un examen chymique de ce mixte qu'on nomme *Oſteocolle*, c'eſt la connoiſſance plus exacte que nous en a donnée M. *Gleditſch*, * & les pieces mêmes de ce foſſile, qu'il a bien voulu me fournir, & qui m'ont procuré la certitude, que je travaillois ſur la veritable Oſteocolle, & non ſur quelcune des matieres, auxquelles on a fauſſement donné ce nom.

* Voyez le Mémoire précedent.

II. Toutes les Experiences Chymiques que je vais rapporter, ont donc uniquement pour objet cette eſpece d'Oſteocolle, que M. *Gleditſch* a trouvée dans les contrées de *Sonnenbourg* & de *Droſſen*, entre l'*Oder* & la *Warte*: & il ne faut les entendre d'aucune autre eſpece.

III. Entre les diverſes pieces d'Oſteocolle, que j'ai reçuës de M. *Gleditſch*, j'ai cru ne devoir ſoumettre à l'examen chymique, que celles qui étoient les plus pures, & dans leſquelles le mêlange paroiſſoit le plus parfait. J'ai fait choix en particulier de cette branche remarquable, dont M. *Gleditſch* a parlé dans ſon Mémoire, † comme

† ub. ſup. §. XL.

ayant

ayant encore fait partie d'un Pin vivant, lorsqu'elle a été convertie en Oſteocolle. C'étoit un morceau épais, pas trop dur, qui répréſentoit exactement une Racine d'arbre, & qui contenoit par-ci par-là quelques fibres de la racine, dont il avoit été formé, mais en petit nombre, & fort minces.

IV. La principale raiſon, pour laquelle j'ai préferé cette piece d'Oſteocolle à toutes les autres, pour en faire le ſujet de mes Expériences, c'eſt que je l'ai trouvée moins ſablonneuſe, & moins mêlée de particules végetales que les autres; & auſſi, parce que j'en ai pû tirer par la lotion une plus grande quantité de terre ſubtile que des autres.

V. J'ai donc commencé mes opérations par la lotion, ou élutriation, de l'Oſteocolle. Pour cet effet j'en ai pris une demi-livre, que j'ai d'abord bien pilée dans un mortier de verre net, je l'ai miſe enſuite dans un vaſe de verre, dont l'orifice étoit large, j'y ai verſé de l'eau claire, & j'ai bien remué le tout; aprés quoi la partie la plus peſante s'etant répoſée au fonds, j'ai verſé un inſtant aprés la liqueur encore trouble dans un autre vaſe. J'ai verſé de nouvelle eau ſur ce qui étoit reſté dans le verre aprés la décantation, laquelle j'ai réïteré de la même maniere, continuant ce travail, jusqu'à ce que l'eau ne parût plus trouble, J'ai mis repoſer l'eau trouble, & peu à peu j'ai vû une terre blanche ſubtile gagner le ſonds. Cette terre, aprés avoir été deſſechée, peſoit quatre onces & demie. Cela étant fait, j'ai auſſi procuré l'exſiccation de la partie plus peſante, qui étoit demeurée dans le premier verre, & j'ai trouvé trois onces & demie d'un ſable fin.

VI. Ayant fait la décantation & la filtration de l'eau claire, qui reſtoit aprés que la terre ſubtile s'étoit repoſée, je l'ai evaporée jusqu'à la ſéchereſſe, & j'en ai tiré une trés petite quantité de ſubſtance ſalino-terreſtre; qui etant délayée dans de l'eau, a cauſé une foible précipitation de la ſolution d'argent, de Mercure, & de plomb, faite dans l'acide du nitre; mais c'étoit ſi peu de choſe, que cela ne méritoit presque point d'attention.

VII. Ayant exactement ſéparé de la maniere ſusdite, tant la terre ſubtile, que la terre ſablonneuſe plus peſante, je me ſuis premierement mis à l'examen de la terre ſubtile, & j'ai obſervé qu'elle entroit en efferveſcence avec tous les acides, par exemple, avec l'acide de ſel commun, de nitre, & de vitriol, auſſi bien qu'avec les acides des végétaux. L'acide vitriolique attaque cette terre ſubtile avec beaucoup de véhémence, en la faiſant écumer. Cette même terre, jettée peu à peu dans l'eſprit de vitriol, s'en imbibe presque entiérement; & lorsqu'elle en eſt parfaitement ſaoulée, forme une maſſe épaiſſe, comme de la bouïllie. J'ai verſé de l'eau chaude ſur cette maſſe, je l'ai bien remuée, j'ai enſuite fait la filtration, & par une évaporation convenable, je l'ai diſpoſée à la cryſtalliſation; ce qui étant fait, cela m'a donné de petits cryſtaux oblongs, mais en trés petit nombre. L'acide vitriolique paroit avoir ici les mêmes rélations avec notre ſujet, qu'il a avec la pierre de chaux, à la partie terreſtre de laquelle il s'attache principalement; & c'eſt par la même raiſon qu'on ne peut ſéparer de ce ſujet que trés peu de particules ſalines.

VIII. Au contraire, l'acide du nitre s'empare de notre terre avec une plus grande véhémence, & la diſſout entiérement, à la reſerve d'une fort petite quantité, qui tombe au fonds du vaſe, & qui n'eſt autre choſe que la partie la plus ſubtile de cette terre ſablonneuſe, qui s'y étoit mêlée pendant l'elutriation. Quand l'acide du nitre a été parfaitement ſaoulé de cette terre, il en réſulte une ſolution, qui a une parfaite reſſemblance avec la ſolution de la pierre de chaux par l'eſprit de nitre. L'ayant filtrée, je lui ai procuré la conſiſtence convenable par l'exhalation, mais il ne s'eſt point voulu former en cryſtaux. C'eſt ce qui m'a engagé à deſſécher cette ſolution par l'évaporation; ce qui étant fait, j'ai obſervé que cette maſſe deſſéchée, lorsqu'on l'expoſe à l'air, attire facilement l'humidité, & ſe fond en une liqueur bruoâtre. J'ai auſſi mis une portion de cette ſolution deſſéchée dans un petit creuſet, je l'ai expoſée au feu, cette maſſe s'eſt miſe à écumer, & l'eſprit de nitre s'eſt envolé copieuſement par voye d'exhalation. Enfin, tout l'eſprit de nitre étant presque évaporé, j'ai gouverné le feu de la même maniere, dont les Chymiſtes

miſtes ont accoutumé de le faire dans la préparation du Phosphore de *Balduinus*, & par cette voye j'ai moi-même produit un Phosphore, auſſi beau que celui qu'on prépare ordinairement, en employant la craye & l'eſprit de nitre. En traittant de même la pierre de chaux avec l'eſprit de nitre, j'ai eu un ſemblable produit, c'eſt à dire, un beau Phoſphore. Les experiences que renferme cette opération, font donc voir la convenance de la terre de chaux avec la terre de craye.

IX. Notre terre ſubtile d'Oſteocolle eſt auſſi ſaiſie aſſez rapidement par l'acide du ſel commun, & ſe diſſout entiérement, de la même façon que nous avons déjà indiquée, en parlant de l'eſprit de nitre; à cauſe de quelques particules ſablonneuſes, qui ſe ſont mêlées avec cette terre ſubtile dans l'elutriation. Ici auſſi, pendant la ſolution, il tombe quelque choſe au fonds, quoiqu'en trés petite quantité. Quand l'acide du ſel eſt parfaitement ſaoulé de cette terre, & qu'enſuite on filtre cette ſolution, & qu'on la fait evaporer jusqu'a la ſechereſſe, parce qu'elle ſe refuſe à la cryſtalliſation; les mêmes rélations ſe manifeſtent, que lorsqu'on diſſout la pierre de chaux dans cet acide, & que l'on continuë le même procédé. En effet cette ſolution deſſéchée ſe fond à l'air au bout de quelque tems, & il lui arrive d'ailleurs préciſement la même choſe, qu'au ſel armoniac fixe, ou à toute autre ſolution faite avec la chaux vive & l'acide de ſel, & puis deſſéchée.

X. J'ai enſuite ajouté du ſel armoniac à cette terre ſubtile d'Oſteocolle, ſavoir, deux parties de terre avec une de ſel armoniac dépuré, je les ai mêlées exactement par voye de trituration; mais de ce mélange, non plus que d'un ſemblable fait de pierre de chaux cruë, & de ſel armoniac, je n'ai pu dégager rien d'urineux; car mon mixte ne rendoit aucune odeur. Mais, lorsqu'en l'approchant du feu il a commencé à s'y embraſer, non ſeulement l'urineux s'eſt envolé en abondance, mais même ce qui eſt reſté dans le creuſet a formé um mixte ſalin vrai & parfait, qui étoit un ſel armoniac fixe, pareil à celui que produiſent ordinairement la pierre de chaux, ou la chaux vive, avec le ſel armoniac.

XI. Je

XI. Je n'ai pas cru devoir oublier non plus d'examiner, ſi cette terre d'Oſteocolle, traittée düement, pourroit produire de la chaux vive? Pour cet effet j'en ai pris environ une once que j'ai exactement calcinée, pendant l'eſpace d'une heure, dans un creuſet fermé; & aprés le réfroidiſſement, j'ai remarqué qu'elle poſſedoit parfaitement toutes les qualités & les proprietés de la pierre de chaux calcinée. En effet cette terre d'Oſteocolle, traittée de la maniere précedente, quand on la pile enſuite au mortier avec le ſel armoniac, dégage auſſitot, comme la chaux vive, la partie urineuſe; ou ſi l'on jette cette terre calcinée dans l'eau froide, elle s'echauffe, & aprés cette inceleſcence, l'eau qui ſurnage, montre toutes les proprietés de l'eau de chaux vive; car elle précipite la ſolution de Mercure ſubliné, en donnant à ce précipité une couleur d'un jaune clair; elle précipite de même la ſolution de Mercure faite dans l'eau forte, en lui donnant une couleur brunâtre; elle trouble les ſolutions d'Argent, de Cuivre, de Plomb, de Fer, de Zinc & de Bismuth, faites dans l'acide du nitre, auſſi bien que la ſolution d'Etain dans l'eau régale; enfin elle donne une belle couleur verte à une eau blëue extraite des Violettes.

XII. Cette terre toujours traittée de la même maniere, comme la chaux vive, rend cauſtique le ſel alcali fixe, & en le cuiſant, le rend auſſi acre, que pourroit faire la chaux vive elle même. Elle diſſout auſſi fort volontiers le ſouffre commun: car, en mêlant quatre parties de cette terre calcinée, avec une partie de ſouffre, & y ajoutant environ ſix ou huit parties d'eau, le ſouffre ſe diſſout fort bien dans la coction, & enſuite ſe précipite aiſément de la leſſive filtrée, en y ajoutant des acides. Ainſi, dans toute cette opération, la conformité entre la terre d'Oſteocolle & la chaux vive ſe manifeſte de la maniere la plus évidente.

XIII. Enfin, j'ai auſſi mêlé deux parties de ſel alcali fixe avec une partie de cette terre, & les ayant mis en fuſion, j'en ai tiré une maſſe opaque, d'une couleur blanchâtre, qui eſt parfaitement ſemblable à la maſſe que produiſent deux parties de ſel alcali fixe, miſes en fuſion avec une partie de chaux vive.

XIV. Par

XIX. Par rapport à l'autre partie terreſtre, que j'ai indiquée §. V. & que l'elutriation ſépare de l'Oſteocolle, en la faiſant tomber au fonds, comme la partie la plus peſante; ce n'eſt autre choſe qu'un ſable fin, & par conſéquent une vraye & belle terre vitrifiable. En effet, quoique cette partie de l'Oſteocolle entre encore dans une efferveſcence aſſez forte avec les acides, cela ne vient que de l'union des acides avec un petit nombre de particules de chaux, qui demeurent adhérentes à cette terre, & qui n'ont pas pu ſouffrir une exacte ſéparation. J'ai verſé ſur une portion de cette terre de l'Eſprit de nitre, qui a pris encore à la verité avec elle une forte efferveſcence, mais qui a laiſſé, ſans y toucher, la terre ſablonneuſe la plus pure, parce qu'en effet cette terre, aprés la lotion & l'exſiccation, ne préſente autre choſe qu'un ſable ſubtil trés pur. J'ai bien mêlé dans le mortier une partie de cette terre ſablonneuſe, deſſechée avec partie égale de ſel alcali fixe, & je les ai miſes en fuſion, en y employant le plus violent degré de feu; ce qui a produit un beau verre jaune, couleur qui lui vient peut-etre du petit nombre de particules de fer, qui s'y trouvent encore mêlées. Cette opération montre donc clairement que la terre d'Oſteocolle dont il s'agit ici, appartient à l'eſpece des cailloux, ou du ſable, & que par conſéquent c'eſt une terre vitrifiable.

XV. Tout ce que nous avons dit jusqu'ici, met donc en evidence, que les parties qui conſtituent proprement l'Oſteocolle, ſont la terre de chaux, & la terre ſablonneuſe. Je paſſe à préſent aux rélations qu'on découvre dans l'Oſteocolle même crüe, en l'expoſant à un feu découvert dans des vaiſſeaux fermés. J'ai mis pour cet effet huit onces d'Oſteocolle criie dans une retorte de terre, & y ayant adapté le récipient, & luté exactement toutes les jointures, j'ai donné un degré violent de feu, pouſſé jusqu'à l'incandeſcence. Enſuite, aprés le réfroidiſſement, j'ai trouvé dans le récipient environ deux dragmes de liqueur, qui

1. exhaloit une odeur urineuſe, & en même tems empyreumatique, pareille à celle d'un foible eſprit de corne de cerf rectifié;

2. teignoit en verd le ſyrop de violettes, comme le fait l'alcali volatil;

3. entroit dans une efferveſcence ſenſible avec les acides;

4. n'en recevoit abſolument aucune avec l'alcali fixe diſſous, (quoique M. *Neumann* ait affirmé le contraire,) mais jettoit plutôt quelquefois une odeur urineuſe plus forte;

5. précipitoit les ſolutions des metaux faites dans les acides, par exemple, la ſolution d'argent, de Mercure & de cuivre, en donnant à cette derniere une belle couleur d'azur, comme le font ordinairement tous les eſprits urineux purs.

Pour renfermer pluſieurs choſes en peu de mots, cette liqueur poſſede toutes les qualités & proprietés de l'eſprit urineux. A l'egard de cette huile empyreumatique, ſemblable à la Petrole, que M. *Neumann* aſſure y avoir obſervé, il ne s'en eſt pas montré une ſeule goutée à mes yeux, quoique j'aye reïteré ce travail plus d'une fois. La terre auſſi, que j'ai tirée de la retorte, aprés que la diſtillation a été finie, a toutes les qualités & tous les caracteres de la chaux vive, quoique le même M. *Neumann* * ſoutienne le contraire. Au reſte, il faut encore remarquer ici, que cet eſprit urineux d'Oſteocolle dont nous avons parlé, tire ſans doute ſon origine des particules de vegetaux pourries, qui ſe trouvent mêlées à l'Oſteocolle.

* V. *Neum. Prælect.* P. 1595.

XVI. L'Auteur que je viens de nommer, affirme auſſi, qu'ayant verſé de l'huile de vitriol ſur de l'Oſteocolle qu'il avoit miſe dans une retorte à tuyau, il en avoit tiré, par la diſtillation de l'eſprit de ſel. Pour verifier cette aſſertion, j'ai auſſi mis quatre onces d'Oſteocolle cruë pulveriſée dans une retorte à tuyau, & y ayant adapté le récipient, j'ai échauffé cette retorte, poſée ſur une coupelle remplie de ſable, en mettant du feu deſſous; enſuite j'y ai verſé à diverſes repriſes une once d'huile de vitriol, tenant le tuyau toujours ſoigneuſement fermé, & à la fin j'ai donné un degré véhément de feu; ce qui étant fait, j'ai bien trouvé une eſpece de liquide dans le récipient, mais qui ne donnoit pas le moindre indice qu'il contint de l'acide.

Au contraire

1. il étoit inſipide, ou tout au plus, il avoit une petite ſaveur de brûlé;

2. il ne précipitoit les ſolutions d'aucuns metaux;

3. il

3. il n'entroit en effervescence avec aucun sel alcali, &

4. n'apportoit point de changement à la couleur du Syrop de violettes.

Pour abréger, c'étoit un pur mixte aqueux. Mais, comme ce n'est pas M. *Neumann* lui-même, qui a donné au public cet examen de l'Osteocolle, il se peut que l'Editeur de ses *Leçons Chymico-pharmaceutiques*, M. *Zimmermann*, ait rencontré une Copie peu exacte, & qu'ainsi il ne faille pas rejetter cette erreur sur M. *Neumann*.

XVII. Toutes les Experiences Chymiques, qui viennent d'etre rapportées, & qui ont eu pour objet l'Osteocolle, & les produits qui en résultent, font voir clairement que c'est *un mixte terrestre composé*

de pierre de chaux,
de sable fin, &
de particules des vegetaux pourries.

Les §§. VII-XII. établissent l'existence de la pierre de chaux. Celle du sable fin est prouvée au §. XIV.

Et pour ce qui regarde la troisieme sorte de parties, ce sont ces particules des vegetaux, copieusement mêlées à l'Osteocolle, qui, tant à cause de leur putréfaction, que de diverses parties animales des insectes, qui s'y trouvent contenuës, & qui s'attachent ordinairement en quantité au bois pourri; ce sont, dis-je, ces parties, dont conformément au §. XV. on tire avec facilité l'esprit urineux par la voye de la distillation.

CONJECTURE
SUR L'USAGE DES CORPS DIAPHANES
DE *MICHELIUS*
DANS LES CHAMPIGNONS A LAMES,
PAR M. GLEDITSCH.

Traduit du Latin.

EN examinant les eſpeces d'Agaric, & la maniere dont elles fructifient, on trouve trois choſes principales dans les petites lames des Champignons, qui ſont tout à fait dignes d'un examen attentif. Ces petites lames, dont il eſt queſtion, ſe trouvent raſſemblées au revers du *pileole*, & il y en a de deux ſortes. Les unes ſont tout à fait entiéres, & s'etendent du centre, où le *petiole* eſt planté, jusqu'à la circonference; les autres, plus petites & plus étroites, ſont comme entremêlées parmi les premieres, & commençant tantot à la circonference, tantot au centre, elles s'arrêtent vers le milieu.

Ces petites lames ſont les vrais réſervoirs de la génération: car de l'extremité de leur bord pendent les vraies étamines avec leurs *capſules*, & leurs pouſſieres; & les deux ſurfaces de chaque lame ſont abon-

abondamment garnies de ſemences, & couvertes d'eminences papillaires diaphanes.

La premiere des choſes remarquables, dont je veux parler, ce ſont donc ces *organes mâles*, ces étamines mêmes, qui dans une ſeule & même plante ſont ſi eloignés des organes *femelles*. La ſeconde choſe remarquable, ce ſont ces ſemences diſperſées ſur la partie plane de chaque lame, qui ſont fort eloignées des étamines, & qu'on ne peut diſtinguer les unes des autres qu'à l'aide du Microſcope. Enfin, la troiſieme choſe qui excite l'attention, ce ſont certains corps que *Michelius* a nommé *diaphanes*, lesquels ſe trouvent auſſi en abondance, étant diſtincts des étamines, & placés alternativement entre les ſemences.

C'eſt une choſe ſurprenante que les organes mâles s'étant déjà montrés à l'oeil armé du Microſcope, les organes femelles, à cauſe de leur extreme petiteſſe, ayent echappé juſqu'ici à toute l'induſtrie des Phyſiciens, & s'y refuſent encore actuellement; puiſqu'à l'exception des ſemences, on n'a pû encore y découvrir aucune autre partie. Neanmoins la chute de la pouſſiere qui tombe des capſules au dedans des corps diaphanes, met hors de tout doute que les organes femelles doivent être cachés dans la ſubſtance de chaque lame, & leurs petites embouchures ſervent apparemment à recevoir les molecules infiniment ſubtiles de la pouſſiere ſeminale, ou du moins elles admettent cette eſpece de vapeur génitale, qui y eſt contenuë ſous l'apparence d'un ſouffle trés leger.

Ce n'eſt donc point une conjecture à rejetter, que celle qui ſuppoſé *de petits pores des organes femelles, ouverts au dedans des corps diaphanes, qui ſont à la ſurface des lames*: puiſque, non ſeulement la pouſſiere ſeminale parvient effectivement à ces petits eſpaces, qui entrecoupent les corps diaphanes, mais encore qu'on apperçoit peu aprés des ſemences parfaites dans ces endroits. La maniere dont les *Agarics* fructifient eſt donc fort curieuſe, & reſſemble beaucoup à celle qui a lieu dans les plantes plus parfaites, dans leſquelles les organes mâles & ſemelles exiſtent ſéparément, quoique dans la même plante (*Monoica.*)

On auroit tort de prendre les Corps mêmes diaphanes de *Michelius* pour les organes femelles, ſurtout puiſqu'ils ſe préſentent d'abord & dés le commencement ſous la même figure, & de la meme groſſeur, qu'ils conſervent d'une maniere immuable presque juſqu'à l'entiere deſtruction du Champignon ; ce qui, ſuivant les loix de la génération, arrive & doit arriver tout autrement dans les organes femelles des végetaux.

Voici la deſcription que le ſavant *Michelius* donne de ſes Corps diaphanes. „ Il y a de plus, dit-il, * dans quelques eſpeces de „ Champignons, & ſurtout dans ceux qui naiſſent du fumier des „ chevaux, des boeufs, & de ſemblables animaux, une choſe qui „ nous a paru bien digne d'etre obſervée, c'eſt que la ſurface de leurs „ lames eſt non ſeulement, Tab. 23. fig. 1. garnie de ſemences, mais „ qu'on y découvre auſſi certains *corps diaphanes*, dont dans quel- „ ques eſpeces la figure eſt conique *k*, & dans d'autres pyramidale *l*. „ Ces corps, par un ſage arrangement de la Nature, empêchent „ qu'une des lames ne touche l'autre, afin que les ſemences qui ſont „ entre ces lames, ne viennent point à ſe gâter, ou à tomber, avant „ qu'il en ſoit tems; & ces corps eux-mêmes tombent, quand la „ ſemence eſt mure, ou qu'elle s'eſt détachée. "

* *Nov. Plant. Gen.* p. 132.

Je vais ajouter à cette deſcription certaines particularités, qui d'un coté mettront dans un plus grand jour l'uſage de ces Corps, & de l'autre rectifieront à quelques égards l'opinion de ce célébre Botaniſte. En effet je me ſuis aſſuré, tant par un examen reïteré des fleurs plus parfaites, que par la contemplation des Champignons mêmes; que ces *corps diaphanes* ont un uſage beaucoup plus important & plus decidé dans les Champignons à lames.

D'abord, pour ce qui regarde les eſpeces de Champignons, l'Auteur n'en a point entendu d'autres que celles à lame, leſquelles dans ma *Methode des Champignons* j'ai toutes rapportées à l'Agaric, en me fondant ſur leur caractere naturel. Mais je ne ſuis pas du même avis que *Michelius* en ce qu'il ajoute, que ce Corps diaphanes n'exiſtent que dans certains Champignons, & principalement, dans ceux qui naiſſent du fumier des animaux. Car dans l'Eté & dans l'Au-

l'Automne, j'ai découvert avec le Microſcope ces mêmes corps dans d'autres eſpeces de Champignons, qui croiſſent à l'ombre, & ſe plaiſent dans des lieux humides, & non expoſés à l'air.

Mais pour les autres eſpeces d'Agarics, dont les lames ſont plus dures, plus ſéches, cartilagineuſes, & presque immarcescibles, je n'y ai point encore trouvé de *corps diaphanes papillaires*, quoique je ſois perſuadé qu'ils ſe trouvent, & peuvent naturellement ſe trouver de même dans la plupart, bien qu'ils ne s'y offrent pas aux ſens avec la même facilité que dans les précedens. Le raiſonnement, l'uſage, la neceſſité même, dictent que cela doit être ainſi.

Ces *Corpuſcules*, que le Microſcope ſeul découvre, comme je l'ai déjà dit plus haut, ſont des *eminences papillaires* de diverſes grandeurs, dont les plus petites ſont mêlées en trés copieuſe quantité aux plus grandes ſur toute la ſurface de la lame.

Dans les diverſes eſpeces la figure de ces Corpuſcules differe, étant tantot obtuſe & conique, tantot pyramidale & anguleuſe; & les petits eſpaces entremêlés parmi ces eminences ſont dans le tems de la fleur tout remplis de la pouſſiere ſeminale, ou peu aprés, des ſemences elles-mêmes, rangées quelquefois quatre à quatre, quelquefois ſans aucun ordre.

A l'egard de la ſituation de ces Corpuſcules dans les petites lames des Agarics, elle eſt toujours horizontale à l'egard de chaque lame, & pour l'ordinaire, on les remarque plus aiſément d'un des cotés que de l'autre.

C'eſt avec beaucoup de raiſon que *Michelius* a nommé ces Corps *diaphanes*, car ils ſont en effet d'une texture trés mince, & tranſparens, comme certaine croute cryſtalline, qu'on appelle en Allemand, *eine Druſe*, ou comme ces croutes ſalines, qui dans les carrieres metalliques ſouteraines, occupent, ou même forment quelquefois de petites cavernes entieres.

Le même Botaniſte attribuë un double uſage à ces corpuſcules, & infere de leur ſituation, qu'ils ont été principalement donnés aux Champignons; premiérement, afin d'empêcher l'affaiſſement des lames,

mes, chargées de ſemences, ou la compreſſion de ces ſemences; & enſuite, afin que les ſemences ne tombent pas avant leur maturité.

Je ſouſcrirois à ces idées, ſi un examen reïteré des Champignons ne m'en avoit fourni d'autres. J'ai obſervé que ces Corpuſcules diaphanes, entremêlés de toutes parts parmi les petites lames, naiſſoient vers le tems de la fructification, & qu'ayant une petite roideur, ils aidoient par leur dévelopement ſucceſſif, les petites lames, auparavant tout à fait fermées & bouchées, à ſe dilater peu à peu, à s'eloigner les unes des autres, & à ouvrir leurs cavités pour laiſſer entrer l'air, & recevoir la pouſſiere ſeminale. Enſuite, quand le tems de la fleur eſt paſſé, tout le champignon ſe dévelope, & les petites lames, couvertes auparavant de la pouſſiere ſeminale, ſont alors tout enflées de la ſemence, qui prend des accroiſſemens inſenſibles, & elles s'eloignent l'une de l'autre, de maniere qu'elles n'ont plus beſoin de ces corps. A' quoi il faut ajouter que ces Corps diaphanes de *Michelius*, alors extrêmement tendres & petits, ne touchent point les lames oppoſées, & n'ont pas la force de les ſéparer l'une d'avec l'autre.

Il y a de plus quelques Champignons, auxquels la nature ne paroit point avoir donné les Corps diaphanes pour empêcher la chute prématurée des ſemences, puiſque ces ſemences, lorſqu'elles ſont fécondes, & n'ont aucune maladie, ſont ſi fortement emboëtées dans leur étui, qu'elles n'en tombent jamais, à moins que la morſure des inſectes, ou quelque autre attaque exterieure, ne les en tirent.

Or les lames étant dans les Agarics les vrais réſervoirs de la fructification, ſur la partie plane desquels tombe non ſeulement la ſemence mâle, mais où cette ſemence s'arrête dans des organes particuliers, après quoi s'enſuit la perfection de la ſemence fécondée; il eſt manifeſte que ces corps diaphanes de *Michelius*, environnés d'organes femelles, dont ils ſont par conſéquent très proches, & demeurant dans cette ſituation, depuis que les parties qui ſervent à la fructification, commencent a ſe développer, juſqu'à la perfection de la ſemence, doivent être deſtinés à un uſage beaucoup plus important. Et en effet les circonſtances qu'on obſerve, confirment que ces corps diaphanes ont été accordés à quel-

à quelques eſpeces de Champignons en faveur de la pouſſiere ſeminale.

Ce ſont des organes ſecondaires, qui dans l'un & dans l'autre ſexe des plantes, aident beaucoup à faire fleurir ; il y a pluſieurs fleurs plus parfaites, dans leſquelles ils ſe rencontrent, tant dans les piſtilles, ou organes feminins, que dans les capſules, ou organes maſculins. Ils s'y préſentent ſous toutes ſortes de figures ; arrondis, anguleux, droits, d'une ſeule piece, avec des branches, roides, velus, étendus, avec des feuïlles, ou des tuyaux, dans un état de contraction, réfléchis, crochus, inclinés d'un coté ou de l'autre, ou ſe portant de tous les cotés à la fois, &c.

Dans le piſtille ils occupent pour l'ordinaire cet organe particulier, ſur lequel ſe fait ſuivant les voyes de la nature la chute de la ſemence. Un exemple peut ſuffire pour tous, c'eſt celui de ce qui arrive à l'ouverture du ſtigmate, dans la fleur de melon, & de Lis blanc.

Dans le Lis blanc ce ſtigmate, qui eſt aſſez grand & triangulaire, ſe montre, pour ainſi dire, tout heriſſé de corps diaphanes aſſez conſiderables, qui ont leur direction en tout ſens, & qui environnent auſſi l'orifice ſuperieur de ſa cavité cylindrique. Ces corps reçoivent avec abondance dans leurs interſtices la pouſſiere ſeminale qui eſt ſecouée par l'elaſticité des fibres, & il n'eſt pas rare qu'ils la retiennent juſqu'à la chute du piſtille entier.

Ajoutez que ce qui facilite merveilleuſement toute cette opération, c'eſt la figure même de la pouſſiere ſeminale, qui eſt celle d'un globe oblong, ou ſphérique, & dont la ſurface eſt pour l'ordinaire toute heriſſée de pointes.

Il eſt vrai que les fruits de la plante avortent quelquefois, mais j'ai pourtant acquis dans le cours de cet Eté une pleine certitude de l'entrée de la ſemence mâle par le ſtigmate dans la cavité du *ſtyle*. Pour cet effet j'ai examiné tous les mois les piſtilles de pluſieurs Lis, & j'ai quelquefois vû la chute de la pouſſiere ſur l'ouverture du piſtille blanc. Il en étoit presque tout couvert, & une partie de cette pouſſiere, qui étoit adhérente à la ſuperficie des eminences papillaires diaphanes, ſe diſſipoit pour l'ordinaire au bout de trois ou quatre

jours, excepté ſeulement la partie du ſtigmate, où la pouſſiere s'étoit inſinuée plus profondément dans les interſtices des corpuſcules diaphanes.

Un ſeul de ces petits corpuſcules, attrapant la cavité du *ſtyle*, deſcend plus bas que le milieu, vers le ſein de l'ovaire. Sa figure s'y change tellement qu'il ſemble détruit, & l'ovaire de ſon coté acquiert une autre forme en ſe gonflant.

J'ai encore trouvé cette année une autre eſpece de Corps diaphanes, qui eſt plus épaiſſe, & arrondie vers le bas, au lieu qu'elle eſt pointuë vers le haut. C'eſt dans la capſule du melon que je l'ai obſervée, au moment même où s'executoit l'acte de la profuſion ſeminale.

La capſule eſt formée par un corps cylindrique & droit, qui eſt comme couvert par une ligne qui fait divers tours de haut embas, & de bas en haut, & qui eſt chargée de farine. Les corpuſcules diaphanes, tantot en plus grande, tantot en moindre quantité, s'elevent comme des coins hors des cavités de cette ligne farineuſe, & en perçant les bords des lames de cette ligne, ils les irritent peu à peu, les piquent, & les diſpoſent à une rupture ſubite. C'eſt ce qui produit la diſperſion rapide de la ſemence, parce que les bords des lames, picotés par les eminences papillaires, éclatent avec un certain degré d'elaſticité.

Mes Obſervations ſe bornent ici, & je n'ai garde de rien affirmer au delà de ce que j'ai vû. C'eſt la reſſemblance des corps diaphances de *Michelius*, dans les *Agarics* de *Linnæus*, avec les autres eminences papillaires, qui naiſſent dans les capſules & dans les piſtilles des fleurs plus parfaites; c'eſt, dis-je, cette reſſemblance qui m'a principalement conduit aux conjectures que je viens de propoſer.

MEMOIRES

DE

L'ACADEMIE ROYALE

DES

SCIENCES

ET

BELLES LETTRES.

CLASSE DE MATHEMATIQUE.

* *
*

SUR LA VIBRATION DES CORDES,

PAR M. EULER.

Traduit du Latin.

I.

QUoique tout ce que *Mrs. Taylor*, *Bernoulli*, & quelques autres, ont dit & découvert jusqu'à preſent au ſujet du mouvement vibratoire des cordes, ſemble avoir épuiſé la matiere, il y reſte néanmoins une double limitation, qui la reſtreint tellement, qu'à peine y a-t-il aucun cas, où l'on puiſſe déterminer le veritable mouvement d'une corde en vibration. Car d'abord, ils ont ſuppoſé que les cordes tenduës faiſoient ſeulement des vibrations quaſi infiniment petites, en ſorte que dans ce mouvement, la corde, ſoit qu'elle ait une ſituation droite, ou courbe, peut pourtant être cenſée conſerver toujours la même longueur. L'autre limitation conſiſte, en ce qu'ils ont ſuppoſé toutes les vibrations régulieres, prétendant que dans chaque vibration la corde entiére, & tout à la fois, s'etend directement, & cherchant hors de cette ſituation ſa figure courbe, qu'ils ont trouvé être une trochoïde prolongée à l'infini.

II. A' la verité la premiere limitation, par laquelle les vibrations de la corde ſont regardées comme infiniment petites, quoique réellement elles conſervent toujours une raiſon finie à la longueur de la

corde, cela ne dérange presque en rien les conclusions qu'on en tire, parce qu'en effet ces vibrations sont pour l'ordinaire si petites, qu'elles peuvent être prises pour infiniment petites, sans qu'il en résulte d'erreur sensible. D'ailleurs on n'a pas encore poussé assez loin, ni la Mechanique, ni l'Analyse, pour être en état de déterminer les mouvemens dans les vibrations finies. A l'egard de l'autre limitation, qui suppose toutes les vibrations régulieres, on tâche de la défendre en disant, que bien qu'elles s'ecartent de cette loi au commencement du mouvement, elles ne laissent pas de s'assujettir au bout d'un trés court espace de tems à l'uniformité, de sorte qu'à chaque vibration la corde s'étend tout à la fois, & ensemble en ligne droite, affectant hors de cette situation la figure d'une trochoïde prolongée.

III. Il est effectivement prouvé d'une maniere suffisante, que si une seule vibration est conforme à cette régle, toutes les suivantes doivent l'observer aussi, On voit en même tems par là, comment l'etat des vibrations suivantes dépend des précedentes, & peut être déterminé par elles; comme réciproquement, par l'etat des suivantes, on peut conclure la disposition de celles qui ont precedé. C'est pourquoi, si les vibrations suivantes sont régulieres, il ne sera en aucune maniere possible que les précedentes se soient écartées de la régle; d'où résulte aussi évidemment, que si la premiere vibration a été irréguliere, les suivantes ne peuvent jamais parvenir à une parfaite régularité. Or la premiere vibration dépend de notre bon plaisir, puisqu'on peut, avant que de lacher la corde, lui donner une figure quelconque; ce qui fait que le mouvement vibratoire de la même corde peut varier à l'infini, suivant qu'on donne à la corde telle ou telle figure au commencement du mouvement.

IV. De là naît donc la Question suivante, dans laquelle toute cette recherche est comprise.

Si une corde d'une longueur, & d'une masse donnée, est tenduë par une force, ou un poids donné; qu'au lieu de la situation droite, on lui donne une figure quelconque, qui ne differe cependant de la droite qu'infiniment peu, & qu'ensuite on la lache tout à coup; déterminer le mouvement vibratoire total, dont elle sera agitée,

M. d'A-

M, d'Alembert s'eſt attaché le premier, avec un ſuccés des plus heureux, à l'examen de ce Problême, ſi difficile tant dans la Mecanique que dans l'Analyſe, & il en a communiqué à notre Academie une trés belle ſolution. Mais, comme dans ces diſcuſſions ſublimes on tire ſouvent un fruit fort conſiderable de la comparaiſon de pluſieurs ſolutions différentes du même problême, je ne balance point à propoſer celle que j'ai trouvée ſur cette queſtion. Quoiqu'elle ne differe pas beaucoup de celle de M. d'Alembert; cependant la grande étenduë de ce ſujet fait que je me perſuade d'avoir ajouté quelques obſervations aſſez intereſſantes dans l'application des formules générales.

V. Je commencerai donc par propoſer le Problême d'une façon bien nette, afin qu'il paroiſſe quels ſecours on a beſoin de tirer, tant de l'Analyſe que de la Mecanique, pour arriver à la ſolution. Soit donc la corde propoſée A B, fixement attachée à ſes extremités A & B, & tendüe ſuivant la direction A F par une force quelconque, comme cela ſe fait ordinairement dans les Inſtrumens de Muſique. Que cette corde ſoit partout d'une égale épaiſſeur, & qu'on appelle Fig. 1.

ſa longueur A B = *a*

ſa maſſe, ou ſon poids = M

& que la force tendante A F ſoit égale à un poids = F. Fig. 1.

Qu'alors on faſſe paſſer cette corde de ſon état naturel A B à un etat de courbure quelconque A L / B, qui pourtant ne differera qu'infiniment peu de l'etat naturel droit A B, de maniere que la longueur A L / B ne ſurpaſſe pas ſenſiblement la longueur A B; & que cette figure A L / B donnée d'abord à la corde, ſoit connüe. On demande, en ſuppoſant que la corde ſoit lachée ſubitement de cet état, quel mouvement elle aquerra, & quelles ſeront les vibrations qu'elle ſera?

VI. Auſſi-tot donc que la corde ſera lachée de ſon etat A L / B, la force tendante la preſſera d'abord vers la ſituation naturelle A B, que tous ſes points atteindront, ou à la fois, ou en divers momens: par conſéquent, la corde changera continuellement de figure, & tous ſes points participeront au mouvement vibratoire, jusqu'à ce que la réſiſtan-

réſiſtance ait calmé toute l'agitation. Or pour connoître parfaitement en quoi conſiſte ce mouvement, il ſuffira d'avoir aſſigné pour chaque tems l'etat de la corde, c'eſt à dire, ſa figure. Car, tandis que d'un coté on définit le changement de figure par la ſucceſſion inſtantanée, on détermine en même tems de l'autre la viteſſe de chaque point de la corde, & ainſi on parvient à la connoiſſance de tout le mouvement. Il ne ſera donc pas beſoin dans cette recherche de faire attention aux vîteſſes de chacun des points de la corde; ce qui diminuë conſidérablement la difficulté de cette ſolution.

VII. Puisque nous avons ſuppoſé, que la longueur de la corde ne ſouffre aucun changement, tandis qu'elle revêt ſucceſſivement toutes ces figures, en ſorte que $AL/B = AB$, il en réſulte qu'en menant les appliquées quelconques PL, pl, normales à l'axe AB, les arcs AL, Al ſeront égaux aux abſciſſes AP, Ap; & par conſéquent les appliquées PL, pl, ſeront comme infiniment petites à l'egard des abſciſſes. Par conſéquent, ſi l'on appelle l'abſciſſe $AP = x$, l'appliquée PL ſera infiniment petite en comparaiſon de x, & l'arc même AL ſera $= x$; d'où l' on aura $Pp = Ll = dx$. Cela fait comprendre, que lorsque la corde reçoit diverſes figures ſucceſſives, chacun de ſes points L ſe meut perpetuellement ſelon la direction de l'appliquée LP, en ſorte que chaque appliquée LP repréſente le chemin, par lequel le point L de la corde s'approche de l'etat naturel AB: mais alors, à cauſe du mouvement reçu, ſuivant la même direction normale à AB, il tendra du coté oppoſé.

VIII. Aprés avoir fait ces remarques, poſons qu'au bout du tems t la corde ſoit arrivée à la ſituation AMmB, ayant quitté ſa ſituation primitive AL/B, de ſorte que le point L ſoit parvenu en M. En ſuppoſant donc l'abſciſſe quelconque $AP = x$, qui exprime en même tems la longueur de l'arc AM, ſoit l'appliquée dans cette courbe AMB répondante à $PM = y$; & parce que cette courbe AMB dépend du tems écoulé $= t$, y ſera une fonction des deux variables x & t; en ſorte qu'en poſant $t = o$, la valeur de y fourniſſe l'appliquée de la courbe primitive ALB. Or il eſt clair que ſi l'on connoit la nature de cette fonction de x & t, qui exprime la quantité de l'appliquée y, on

y, on peut par ſon moyen aſſigner la figure même de la corde pour un tems quelconque t; & de plus on conclura aiſément de la mutabilité le mouvement de toute la corde.

IX. Ainſi y etant une fonction de x & t, ſon differentiel aura une forme telle, $dy = p\,dx + q\,dt$, laquelle formule comprend non ſeulement la variabilité de y par la courbe AMB, mais encore eu égard au tems qui s'ecoule. En effet, ſi le tems t eſt etabli conſtant, ou $dt = 0$, l'equation $dy = p\,dx$ exprimera la nature de la courbe AMB; mais ſi l'abſciſſe x eſt ſuppoſée conſtante, ou $dx = 0$, l'equation $dy = q\,dt$ définira le mouvement du point L pour tout le tems que le mouvement de la corde dure, parce que par elle on peut aſſigner pour un tems quelconque t ecoulé depuis le commencement, le lieu M, auquel le point L ſera parvenu. Or p & q ſeront de nouveau des fonctions de x & t, dont les differentiels, en poſant x & t l'une & l'autre variable, ſoient,

$$dp = r\,dx + s\,dt \;\&\; dq = s\,dx + u\,dt.$$

Car il eſt conſtant par la nature des differentiels, que l'element dt en dp, & l'element dx en dq, doivent avoir un coëfficient commun.

X. Comme il s'agit préſentement de déterminer le mouvement de la corde par les forces ſollicitantes, ſoit la force acceleratrice, par laquelle le point M de la corde eſt acceléré vers l'axe AB = P, & il eſt clair que toutes ces forces, par leſquelles chacun des élemens de la corde eſt preſſé vers l'axe AB. priſes enſemble doivent être équivalentes à la force, par laquelle la corde eſt actuellement tenduë, & que nous avons poſée AF = F; ou bien, ſi nous concevons des forces contraires & égales à P, appliquées ſuivant ML dans chacun des points M de la corde, alors elles devront ſe trouver en équilibre avec la force qui tend la corde AF = F, & par cette proprieté on pourra déterminer la veritable force acceleratrice P, par laquelle chaque élément Mm de la corde eſt actuellement ſollicité.

XI. La maſſe, ou le poids de toute la corde etant = M, & ſe diſtribuant également par toute la longueur AB, le poids de la portion AP, ou AM, ſera $= \frac{Mx}{a}$, & par conſéquent le petit poids de

l'élément $Mm = dx$ ſera $= \frac{M\,dx}{a}$; lequel etant ſollicité ſuivant ML par la force accélératrice $= P$, la force motrice de cet élément ſera $= \frac{M\,dx}{a} P$, & la ſomme de toutes les forces motrices par l'arc AM ſera $= \frac{M}{a} \int P\,dx$. Mais parce que le point A eſt ſuppoſé fixe, il eſt permis de concevoir une certaine force $AG = G$, qui lui ſoit appliquée dans la direction AG normale à AB, & aſſez grande, pour que le point A ſoit conſervé en repos. Ces choſes etant poſées, la theorie de l'equilibre des forces appliquées à un fil parfaitement fléxible, fournira l'equation ſuivante :

$$Fy - Gx + \frac{M}{a} \int dx \int P\,dx = o$$

ou Fy & Gx ſont les momens des forces F & G à l'egard du point M, & $\frac{M}{a} \int dx \int P\,dx$ eſt la ſomme de tous les momens des forces élémentaires à l'egard du même point M.

XII. Que l'on conſidere à préſent la courbe AMB, que la corde forme dans ce moment, dont la nature ſera exprimée par les formules données ci-deſſus, ſi le tems t eſt pris conſtant, ou $dt = o$, & par conſéquent on aura $dy = p\,dx$, & $dp = r\,dx$. Par là l'equation que l'etat d'équilibre a fait trouver, étant differentiée, & en poſant $p\,dx$, au lieu de dy, donnera diviſée par dx

$$Fp - G + \frac{M}{a} \int P\,dx = o.$$

Qu'on differentie de nouveau cette équation, en poſant $r\,dx$ pour dp, & en diviſant par dx, on obtiendra $Fr + \frac{M}{a} P = o$; d'où l'on tire la force accélératrice P du point M ſuivant la direction MP,

MP, ſavoir $P = -\frac{Far}{M}$. C'eſt pourquoi ſi la courbe AMB étoit connuë, on pourroit déterminer par ſa nature la force accélératrice de chacun des élémens.

XIII. Conſiderons à préſent le mouvement du ſeul point M, par lequel il s'approche de P, étant ſollicité par la force accélératrice P, & l'abſciſſe $AP = x$ doit être cenſée invariable. Or comme à cauſe de $dx = o$, il y a l'increment momentané de l'appliquée PM, $dy = q\,dt$ & $dq = u\,dt$, dans le petit tems dt le point M s'approche de P par le petit eſpace $= -q\,dt$, dont le differentiel en poſant l'element du tems dt, conſtant, ſera $= -dq\,dt = -u\,dt^2 = -ddy$. Mais, de l'accelération qui naît de la force P par les principes mecaniques on déduit cette équation $P = -\frac{2\,ddy}{dt^2} = -2u$, ſi l'on expoſe, comme c'eſt la coutume l'elément du tems dt par l'elément de l'eſpace appliqué à la viteſſe, & que la viteſſe elle même ſoit répreſentée par la racine quarrée de la hauteur duë à cette viteſſe. Ainſi, puisque nous avons trouvé $P = -\frac{Far}{M}$ auſſi bien que $P = -2u$, il en réſultera $2u = \frac{Far}{M}$ ou $u = \frac{Far}{2M}$.

XIV. Ces deux conditions, que nous avons rappellées au calcul, renferment toute la Queſtion propoſée; & par conſéquent, ſi un tems quelconque t étant ecoulé, on poſe pour un point quelconque M de la corde l'abſciſſe $AP = x$, & l'appliquée $PM = y$, celle-ci s'exprimera par une fonction de x & t, telle qu'en poſant $dy = p\,dx + q\,dt$, le caractere des fonctions p & q ſe tirera de ces formules

$$dp = r\,dx + s\,dt, \text{ \& } dq = s\,dx + \frac{F'a}{2M}\,r\,dt.$$

La queſtion mecanique propoſée ſe réduit donc à ce problême analytique, de chercher des fonctions r & s de x & t, telles que

ces formules differentielles $rdx + sdt$, & $sdx + \frac{2M}{Fa} rdt$, deviennent intégrables. Car de femblables fonctions étant trouvées pour r & s, on pourra aſſigner les valeurs $p = \int (rdx + sdt)$ & $q = \int (sdx + \frac{Fa}{2M} rdt,)$ d'où l'on inferera enſuite la valeur de l'appliquée même $y = \int (pdx + qdt.)$

XV. Ce Problême analytique conſideré en ſoi eſt extrémement indéterminé; ainſi, pour l'accommoder à quelque cas qui ſe préſenteroit, il faut faire les remarques ſuivantes. Premierement dans les intégrations, il faut régler les conſtantes de maniere qu'en poſant $x = o$, quelle que ſoit la valeur qu'on attribuë à t, on ait toujours $y = o$. Enſuite, on doit en faire autant dans le cas de $x = a$. Troiſiémement, ces précautions étant priſes, d'entre les fonctions infinies r & s, qui ſatisfont aux conditions ci-deſſus exprimées; on doit pour chaque cas propoſé choiſir celles, qui en poſant $t = o$, font que la valeur de l'appliquée y qui en réſulte, fournit cette courbure arbitraire, que l'on avoit donnée à la corde au commencement du mouvement. Cela étant executé, il ne reſtera plus dans la ſolution aucune conſtante indéterminée, & le vrai mouvement de la corde pourra être repreſenté d'une maniere abſoluë.

XVI. Afin donc que la figure initiale de la corde puiſſe être réglée arbitrairement, la ſolution doit avoir la plus grande étenduë. C'eſt pourquoi, la recherche devant commencer par ces formules $dp = rdx + sdt$, & $dq = sdx + \frac{Fa}{2M} rdt$, on doit découvrir en général toutes les valeurs poſſibles pour r & s, qui rendent ces formules intégrables enſemble. Multiplions pour cet effet ces formules à part par les conſtantes m & n, & ajoutons les produits, de maniere que ſoit

$$mdp + ndq = dx\,(mr + ns) + dt\,(ms + \frac{Fa}{2M} nr)$$

cette

cette formule doit être encore intégrable, quelles que ſoient les valeurs conſtantes attribuées aux lettres m & n. Qu'on faſſe donc $m:n = \frac{Fa}{2M}\, n:m$, ou $mm = \frac{Fa}{2M}\, nn$, d'où vient $m = 1$ & $n = \pm \sqrt{\frac{2M}{Fa}}$, & l'on aura $dp \pm dq \sqrt{\frac{2M}{Fa}} = (dx \pm dt \sqrt{\frac{Fa}{2M}})(r \pm s \sqrt{\frac{2M}{Fa}})$.

XVII. Pour abréger, ſoit $\frac{Fa}{2M} = b$, & l'on aura $dp \pm dq \sqrt{\frac{1}{b}} = (dx \pm dt \sqrt{b})(r \pm s \sqrt{\frac{1}{b}})$ ou $dp\sqrt{b} \pm dq = (dx \pm dt\sqrt{b})(r\sqrt{b} \pm s)$ ou auſſi $dq \pm dp\sqrt{b} = (dx \pm dt\sqrt{b})(s \pm r\sqrt{b})$.
Comme donc cette formule $(dx \pm dt\sqrt{b})(s \pm r\sqrt{b})$ doit être intégrable, il eſt néceſſaire que $s \pm r\sqrt{b}$ ſoit une fonction de $x \pm t\sqrt{b}$. Poſons, pour tenir compte de l'un & de l'autre ſigne

$$x + t\sqrt{b} = v \qquad x = \frac{v+u}{2}$$
$$\text{& il ſera}$$
$$x - t\sqrt{b} = u \qquad t\sqrt{b} = \frac{v-u}{2}$$

& nous aurons ces équations :
$dq + dp\sqrt{b} = dv\,(s + r\sqrt{b})$ & $dq - dp\sqrt{b} = du\,(s - r\sqrt{b})$
où il faut que $s + r\sqrt{b}$ ſoit une fonction de v, & $s - r\sqrt{b}$ une fonction de u ; car autrement l'intégration ne reüſſiroit pas.

XVIII. Cette double intégration étant donc faite, $q + p\sqrt{b}$ deviendra = à une fonction de v, & $q - p\sqrt{b} =$ à une fonction de u. Soit donc, pour donner une pleine etenduë à la ſolution,

V fonction quelconque de $v = x + t\sqrt{b}$.
U fonction quelconque de $u = x - t\sqrt{b}$,
& l'on ſatisfera aux conditions rapportées, en poſant

$$q + p\sqrt{b} = V \qquad q = \frac{V + U}{2}$$

d'où ſe fait

$$q - p\sqrt{b} = U \qquad p = \frac{V - U}{2\sqrt{b}}.$$

Comme donc $dy = p\,dx + q\,dt$, on aura en ſubſtituant à p & q, de même qu'à dx & dt les valeurs trouvées

$$dy = \frac{(dv + du)(V - U)}{4\sqrt{b}} + \frac{(dv - du)(V + U)}{4\sqrt{b}},$$

qui aprés l'evolution fournit

$$dy = \frac{V\,dv - U\,du}{2\sqrt{b}} \text{ \& } y = \frac{1}{2\sqrt{b}}(\int V\,dv - \int U\,du).$$

XIX. Or $\int V\,dv$ ſera fonction de $v = x + t\sqrt{b}$, & $\int U\,du$ fonction de $u = x - t\sqrt{b}$, b etant $= \frac{F}{2M}\frac{a}{}$; d'où, ſi l'on employe les caracteres f & φ pour indiquer des fonctions quelconques des quantités, devant leſquelles on les met, nous aurons l'expreſſion générale ſuivante pour l'appliquée y, qui repréſente ſa quantité pour un tems quelconque t, ecoulé depuis le commencement, & pour une abſciſſe quelconque x

$$y = f:(x + t\sqrt{b}) + \varphi:(x - t\sqrt{b}).$$

Car pour retourner ſur nos pas, & faire un eſſai ſur la formule $dy = p\,dx + q\,dt$ on aura les valeurs ſuivantes p & q:

$$p = f':(x + t\sqrt{b}) + \varphi':(x - t\sqrt{b})$$
$$q = \sqrt{b}\,(f':(x + t\sqrt{b}) - \varphi':(x - t\sqrt{b}))$$

& au lieu des formules $dp = r\,dx + s\,dt$ & $dq = s\,dx + b\,r\,dt$, on aura, comme la nature de la choſe le demande,

$$r = f''.(x + t\sqrt{b}) + \varphi''.(x - t\sqrt{b})$$
$$r = \sqrt{b}.(f''.(x + t\sqrt{b}) - \varphi''.(x - t\sqrt{b}))$$

pourvu

pourvu que nous marquions le differentiel de la fonction $f:z$ par $dzf':z$, & le differentiel de la fonction $f':z$ par $dzf'':z$.

XX. Jusqu'à preſent les caracteres f & φ, dans l'equation

$$y = f:(x + t\sqrt{b}) + \varphi:(x - t\sqrt{b})$$

ſignifient des fonctions quelconques, qui different en raiſon de la compoſition, & leur relation ſe determine davantage par les autres conditions. Car comme en poſant $x = o$, on doit toujours avoir $y = o$, il doit etre $f:(+t\sqrt{b}) + \varphi\ (-t\sqrt{b}) = o$, & par conſequent $\varphi\ (-t\sqrt{b}) = -f:(t\sqrt{b})$. Or alors, parce qu'en poſant $x = a$, la valeur de y doit pareillement evanoüir, on aura auſſi $f:(a + t\sqrt{b}) + \varphi:(a - t\sqrt{b}) = o$; & ainſi la nature des fonctions f & φ doit etre définie de maniere qu'elle ſatisfaſſe à ces conditions.

$$\varphi:-t\sqrt{b} = -f:t\sqrt{b}$$
$$\varphi:(a - t\sqrt{b}) = -f:(a + t\sqrt{b})$$

XXI. Comme $f:z$ peut être repreſenté en général par l'appliquée d'une certaine courbe, dont l'abſciſſe eſt z, ſoit A M B la courbe dont les appliquées P M fourniſſent les fonctions des abſciſſes A P qui ſont déſignées par le caractere $f:$ en ſorte que P M ſoit $= f:t\sqrt{b}$; auquel $\varphi:-t\sqrt{b}$ devant être negativement égal, qu'on prenne A p = A P, de ſorte que A p $= t\sqrt{b}$; & en poſant la courbe Amb au deſſous de l'axe de la courbe ſemblable A MB, on aura pm $= -f:t\sqrt{b} = \varphi:-t\sqrt{b}$. Donc la courbe Amb ſemblable à la courbe AMB expoſera la nature de l'autre fonction φ. Alors la courbe AMB exiſtant d'une maniere ſemblable au delà de B, ſoit AB $= a$ continué au deſſous de l'axe, afin que la portion BN a ſoit ſemblable & égale à la courbe BnA, & en prenant BQ = Bq, on aura AQ $= a + t\sqrt{b}$, QN $= f:(a + t\sqrt{b})$, & pareillement à cauſe de Aq $= a - t\sqrt{b}$, il ſera qn $= f:(a - t\sqrt{b})$ d'où il paroit qu'une courbe de cette forme AMB, qui eſt continuée de part & d'autre à l'infini par des parties ſemblables & égales à elle même Amb, BNa, & qui ſoient ſituées alternativement en haut & en bas, eſt propre à repréſenter la nature de l'une & l'autre fonction f & φ. Fig. 2.

XXII. Ayant

XXII. Ayant donc décrit une ſemblable courbe anguiforme, ſoit réguliere, contenüe dans une certaine équation, ſoit irreguliere, ou méchanique, ſon appliquée quelconque PM fournira les fonctions, dont nous avons beſoin pour la ſolution du Problême. En effet ſi l'on poſe une abſciſſe quelconque AP $= z$, on aura l'appliquée PM $= f: z$. De là donc, en attribuant à l'abſciſſe z, les valeurs $x + t\sqrt{b}$ & $x - t\sqrt{b}$, on aura $y = f: (x + t\sqrt{b}) + f: (x - t\sqrt{b})$; en conſéquence de quoi on pourra aſsigner pour un tems quelconque dans la corde vibrante l'appliquée y, qui convient pour une abſciſſe quelconque. Or poſons $t = o$, pour obtenir la courbe initiale de la corde, & l'on aura AP $= x$, & l'appliquée dans la corde vibrante $y = f: x = 2$ PM; ou, parce qu'il eſt permis de prendre les moitiés des fonctions ſuperieures, en ſorte que

$$y = \tfrac{1}{2} f: (x + t\sqrt{b}) + \tfrac{1}{2} f: (x - t\sqrt{b})$$

la courbe même AMB repréſentera la figure donnée à la corde au commencement du mouvement.

XXIII. Réciproquement donc, s'il y a une courbe donnée, ou figure, que la corde ait reçüe au commencement, on pourra en tirer la détermination de la figure de la corde pour un tems quelconque écoulé depuis le commencement. Car, en décrivant au deſſus de l'axe AB $= a$, qui ſoit égal à la longueur de la corde, la figure initiale de la corde AMB, qu'on la repete de part & d'autre en ſituation inverſe, en ſorte que Amb $=$ AMB & BNa $=$ BnA, & que l'on conçoive la répetition continuelle de cette courbe de part & d'autre à l'infini ſuivant la même loi. Alors, ſi cette courbe eſt employeé pour exprimer les fonctions trouvées, aprés un tems écoulé $= t$ l'appliqueé qui répondra à l'abſciſſe x, dans la corde en vibration ſera:

$$y = \tfrac{1}{2} f: (x + t\sqrt{b}) + \tfrac{1}{2} f: (x - t\sqrt{b})$$

d'où l'on pourra recueillir aiſément la conſtruction de la courbe, que la corde forme dans un tems quelconque.

XXIV. Mais afin que cette formule ne paroiſſe pas renfermer des quantités heterogenes, il faut remarquer que $t\sqrt{b}$ eſt répreſenté par une ligne droite, & eſt par conſéquent homogene à x. Car, ſoit z la

hauteur

hauteur de laquelle un corps pesant tombe dans le tems t, en donnant l'expression du tems de la maniere indiquée ci-dessus, on aura $t = 2\sqrt{z}$; & ainsi au lieu de t, on pourra écrire $2\sqrt{z}$, & réciproquement par la hauteur z on connoitra le tems t écoulé depuis le commencement du mouvement. Donc $t\sqrt{b}$ sera $= 2\sqrt{bz} = 2\sqrt{\frac{Faz}{2M}} = \sqrt{\frac{2Faz}{M}}$, & par conséquent sera exprimé par une ligne droite. Or posons, pour abréger, $\sqrt{\frac{2Faz}{M}} = v$, en sorte que la valeur de v puisse être assignée pour un tems quelconque, & aprés le tems écoulé, pendant lequel un corps pesant tombe par la hauteur $= z$, on aura

$$y = \tfrac{1}{2} f:(x+v) + \tfrac{1}{2} f:(x-v)$$

XXV. Si l'on a donc donné au commencement la figure AMB à la corde $AB = a$, & que sa répétition ait ensuite formé la ligne courbe anguiforme $n'bAMBaN$, la figure que la corde doit avoir au bout du tems t, pendant lequel un corps pesant tombe par la hauteur $= z$, sera ainsi définie. De cette hauteur z connüe qu'on cherche la valeur $v = \sqrt{\frac{2Faz}{M}}$, & qu'en proposant l'abscisse quelconque $AP = x$, on prenne de part & d'autre $PQ = Pq = v$, en menant aux points Q & q les appliquées QN & qn, on aura à cause de $QN = f:(x+v)$ & de $qn = f:(x-v)$, l'appliquée qui répond à l'abscisse $AP = x$ de la corde, $y = \frac{1}{2}QN + \frac{1}{2}qn$; ou bien, qu'on prenne $Pm = \frac{QN + qn}{2}$, m étant le lieu du point M, & si l'on employe cette construction pour tous les points de l'axe AB, les points m donneront la figure présente de la corde Am B. De cette maniere la figure, que la corde prend dans les vibrations, sera facilement décrite pour un tems quelconque.

XXVI. Cherchons la figure de la corde, aprés qu'il ſera écoulé un tems tel que v ſoit $= a$, ou $z = \frac{M\,a}{2\,F}$, & cela donnera

$$y = \tfrac{1}{2} f:(x+a) + \tfrac{1}{2} f:(x-a)$$

Or par la nature de la courbe décrite $f:(x+a)$ ſera $= -f:(a-x)$ & $f:(a+x) = -f:(a-x)$ d'où réſultera

$$y = -f:(a-x)$$

ce qui fait voir que la corde ſera plieé toute entiere au deſſous de l'axe, & prendra la figure AM'B égale à la figure donnée AMB, mais poſée en ſituation inverſe; de ſorte qu'en prenant l'abſciſſe BP' $=$ AP, l'appliquée ſera P'M' $=$ PM. Et de là réciproquement, s'il s'ecoule de nouveau un tems égal t, d'où réſulte $v = a$, toute la corde retournera à la ſituation AMB, qui lui avoit été donnée au commencement; ce qui ſe déduit auſsi de ce que s'etant écoulé depuis le commencement un tems, d'où ſe fait $v = 2\,a$, il en réſulte,

$$y = \tfrac{1}{2} f:(x+2a) + \tfrac{1}{2} f:(x-2a)$$

Mais en prenant PQ' $=$ Pq' $= 2\,a$, par la nature de la courbe Q'N' ſera $=$ PM $=$ q'n', & par conſéquent $y =$ PM, comme au commencement du mouvement.

XXVII. Quelle que ſoit donc la figure donnée d'abord à la corde, elle la reprend à chacune des vibrations, autant que le permet la diminution causée par la réſiſtance; ce qui fait voir bien clairement qu'il n'y a aucune vérité dans l'opinion rapportée ci-deſſus, ſavoir que les vibrations de la corde, quelque irreguliéres qu'elles ayent été d'abord, rentrent auſsi-tot aprés dans l'uniformité, de maniere que la figure dégénere en une trochöide prolongée. Cependant il n'eſt pas moins clair, que quelle que ſoit la figure de la corde en vibration, les vibrations ne laiſſeront pas d'etre aſſez régulieres; car comme, en poſant $v = 2\,a$, la corde retourne à ſon premier etat, elle doit etre cenſée avoir fait pendant ce tems là deux vibrations; & par conſéquent on définira de la valeur $v = a$ le tems d'une vibration, qui ſera égal au tems pendant lequel un corps peſant tombe par

la

la hauteur $\frac{M\,a}{2\,F}$; ou, ſi l'on exprime la longueur de la corde AB $= a$ en milliemes de pieds de Rhin, le tems d'une vibration exprimé en ſecondes ſera $= \frac{1}{125}\sqrt{\frac{M\,a}{2\,F}}$, où la corde ſera autant de vibrations à chaque ſeconde, que cette expreſſion $125\sqrt{\frac{2\,F}{M\,a}}$ contiendra d'unités, tout comme ſi la corde achevoit ſes vibrations ſuivant la loi d'uniformité décrite par *Taylor*.

XXVIII. Comme la figure AMB donnée au commencement à la corde, fournit ſa premiere & plus grande excurſion, de même une vibration étant achevée, la corde ſe trouvera dans l'autre excurſion la plus grande AM'B, que nous avons fait voir être égale à la premiere inverſe. Voyons donc à preſent, ſi dans le milieu du tems qu'emportent ces deux vibrations, la corde ſe tend d'une maniere parfaitement droite, & reprend la ſituation naturelle, ou non? Puiſque du tems d'une vibration naît $v = a$, poſons pour le moment du milieu $v = \frac{1}{2}\,a$, & l'on aura de la formule génerale

$$y = \tfrac{1}{2}\,f:(x + \tfrac{1}{2}\,a) + \tfrac{1}{2}\,f:(x - \tfrac{1}{2}\,a)$$

dont la valeur evanouïra, ſi $f:(\frac{1}{2}\,a - x)$ eſt $= f:(\frac{1}{2}\,a + x)$ c'eſt à dire, ſi la figure ADB donnée au commencement à la corde eſt telle qu'aux abciſſes $\frac{1}{2}\,a + x$ & $\frac{1}{2}\,a - x$ répondent des appliquées égales: ce qui arrive ſi l'appliquée CD dreſſée au point du milieu C de la longueur AB eſt un diametre de la courbe ADB, & que la partie DB ſoit ſemblable & égale à la partie DA. Toutes les fois donc que la courbe initiale a cette propriété, tout autant de fois la corde s'etend en ligne droite au milieu de chaque vibration; & comme cela peut arriver en nombre innombrable de manieres, il eſt manifeſte que cette condition elle-même ne requiert pas, que la corde prenne perpetuellement dans ſes vibrations la figure d'une trochoïde prolongée. Fig. 1.

XXIX. Or, bien qu'à conſiderer la choſe en général, les tems des vibrations ne dépendent pas de la figure que prend la corde vibrante,

Fig. 3. mais qu'ils ſe déterminent par les ſeules quantités a, M & F, dont la premiere a dénote la longueur de la corde, M le poids de la corde, & F le poids égal à la force qui tend ; cependant il y a des cas ſinguliers, dans leſquels les tems des vibrations peuvent être réduits à la moitié, au tiers, au quart, ou même à une partie aliquote quelconque de toute la longueur. Car, ſi toute la longueur de la corde étoit A a = a, & qu'elle ſe courbât au commencement, de maniere qu'elle fit deux parties AMB & B a, qui fuſſent parfaitement ſemblables & égales entr'elles, elle fera alors ſes vibrations, comme ſi elle n'avoit que la demie longueur AB, & par conſéquent ces vibrations ſeront deux fois plus rapides. De même, ſi la figure initiale de la corde avoit trois parties ſemblables & égales bABa, comme elles ſont repréſentées dans la figure, la corde alors fera ſes vibrations, comme ſi ſa longueur étoit trois fois moindre, & chaque vibration deviendra trois fois plus courte ; par où l'on comprend aſſez, comment ces mêmes vibrations peuvent devenir quatre fois, cinq fois &c. plus courtes.

XXX. Ayant ainſi donné la ſolution générale, comprenons y encore quelques cas, auxquels la courbe anguiforme Fig. 3. eſt une courbe continuë, dont les parties ſoient liées en vertu de la loi de de continuité, de maniere que ſa nature puiſſe être compriſe par une équation. Et d'abord il eſt conſtant, que ces courbes, puiſqu'elles ſont coupées par l'axe en une infinité de points, ſeront tranſcendentes. En poſant la longueur de la corde AB = a, & une abſciſſe quelconque AB = u, ſoit $1 : \pi$, comme le diametre du cercle à la circonference, & il eſt manifeſte que l'equation ſuivante, exprimée par les ſinus, fournit une courbe requiſe ;

$$PM = \alpha \sin \frac{\pi u}{a} + \beta \sin \frac{2\pi u}{a} + \gamma \sin \frac{3\pi u}{a} + \delta \sin \frac{4\pi u}{a} + \&c.$$

Car ſi, au lieu de u, on poſe ou a, ou $2a$, ou $3a$, ou $4a$ &c. l'appliquée PM evanoüit, & en poſant u negatif, l'appliquée elle même ſe change en ſon négatif. Si donc la courbe AMB étoit la figure primitive de la corde, au bout du tems t, pendant lequel le corps peſant

ſant deſcend par la hauteur $= z$, en poſant $v = V \frac{2Fgz}{M}$, à l'abſciſſe x dans la figure de la corde répondra l'appliquée y, de ſorte qu'on aura :

$$y = + \tfrac{1}{2}\alpha \sin\tfrac{\pi}{a}(x+v) + \tfrac{1}{2}b\sin\tfrac{2\pi}{a}(x+v) + \tfrac{1}{2}\gamma\sin\tfrac{3\pi}{a}(x+v)\ \&c.$$

$$+ \tfrac{1}{2}\alpha\sin\tfrac{\pi}{a}(x-v) + \tfrac{1}{2}\delta\sin\tfrac{2\pi}{a}(x-v) + \tfrac{1}{2}\gamma\sin\tfrac{3\pi}{a}(x-v)\ \&c.$$

XXXI. Or comme $\sin(a+b) + \sin(a-b)$ eſt $= 2\sin a\cos b$, cette équation ſe transformera en cette forme :

$$y = \alpha\sin\tfrac{\pi x}{a}\cos\tfrac{\pi v}{a} + \delta\sin\tfrac{2\pi x}{a}\cos\tfrac{2\pi v}{a} + \gamma\sin\tfrac{3\pi x}{a}\cos\tfrac{3\pi v}{a}\ \&c.$$

& la figure primitive de la corde ſera exprimée par cette équation,

$$y = \alpha\sin\tfrac{\pi x}{a} + \delta\sin\tfrac{2\pi x}{a} + \gamma\sin\tfrac{3\pi x}{a} + \&c.$$

laquelle revient la même, toutes les fois que v devient ou $2a$, ou $4a$, ou $6a$ &c. Mais ſi v eſt ou a, ou $3a$, ou $5a$ &c. la figure de la corde ſera

$$y = -\alpha\sin\tfrac{\pi x}{a} + \delta\sin\tfrac{2\pi x}{a} - \gamma\sin\tfrac{3\pi x}{a} + \&c.$$

où il faut remarquer que ſi β eſt $= o$, $\gamma = o$, $\delta = o$, &c. il en réſulte le cas qu'on croit communément être le ſeul qui ait lieu dans la vibration des cordes, ſavoir $y = \alpha\sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi v}{a}$, dans lequel la courbure de la corde eſt perpetuellement la ligne des ſinus, ou une trochoïde prolongée à l'infini. Mais ſi le ſeul terme β, ou γ, ou δ, &c. s'y trouve, cela forme des cas où le tems de la vibration eſt moindre, ou du double, ou du triple, ou du quadruple &c.

SUR L' ACCORD DES DEUX DERNIERES ECLIPSES DU SOLEIL ET DE LA LUNE AVEC MES TABLES POUR TROUVER LES VRAIS MOMENS DES PLENI-LUNES ET NOVI-LUNES,

PAR M. EULER.

I.

* Voy. les *Memoires* de 1747. p. 250. & ſuiv.

On calcul, que j'ai expoſé dans un Mémoire * précedent, pour l'Eclipſe du Soleil, que nous avons vuë ici le 25 Juillet de cette année 1748, eſt ſi bien d'accord avec les obſervations du commencement & de la fin de cette Eclipſe, qu'à peine on s'en ſauroit promettre un plus grand. Suivant mes tables j'avois établi le commencement de cette Eclipſe à $10^h, 17', 45''$, & la fin à $1^h, 24', 0''$: or, quoique le commencement de cette Eclipſe ne fut pas appercû, on étoit pourtant aſſés ſûr de le conclure à $10^h, 18'$ par la phaſe qui parût a' $10^h, 20'$, & la fin de cette Eclipſe a été remarquée a' $1^h, 24', 30''$ Nous ne nous ſommes pas trompés non plus dans l'attente de l'anneau, que j'avois annoncé: mais ſa durée, que j'avois miſe à $5', 10''$, étoit beaucoup plus courte, ſavoir de $1', 20''$, ce qui ne paroit pas trop favoriſer mes tables, quoique les autres tables qui paſſent pour les meilleures, ne montraſſent cette Eclipſe, que partiale, & que leurs erreurs par rapport au commencement & à la fin montaſſent à quelques minutes entieres. Mais, pour ôter ce ſcrupule par rapport à la durée de l'anneau, je dois remar-

remarquer que dans mon calcul j'avois ſuppoſé l'elevation du Pole de Berlin de 52°, 36′: Or les dernieres obſervations, que Mr. Kies vient de faire avec l'excellent Quart de cercle, que Mr. de Maupertuis'a donné à l'Academie ne donnerent cette elevation du Pole que de 52°, 31′, 30″, de ſorte que j'avois placé Berlin trop vers le Nord de 4′, 30″. On n'a qu'à jetter les yeux ſur la carte de cette Eclipſe, qui a été publiée à Nurnberg, pour s'aſſurer, que ſi Berlin étoit ſitué de 4 ½′ plus au nord, la durée de l'anneau auroit été beaucoup plus conſiderable & qu'elle auroit été aſſés d'accord avec mon calcul,

II. Pour l'Eclipſe de Lune, qui parut entre le 8 & le 9 Dec. mois d'Août, ſi l'on regarde l'article, qui ſe trouve à la fin de l'Almanac Aſtronomique, on remarquera, que les momens de cette Eclipſe qui ſont allegués ſous le titre de mes tables, ne ſont pas trop d'accord avec l'obſervation. Car le commencement y etant marqué à 11ʰ, 0′, 14″ & la fin à 1ʰ, 14′, 4″, on a trouvé par l'obſervation le commencement a 11ʰ, 5′ & la fin a 1ʰ, 18′: J'avoüe que cette difference anéantiroit tout à fait la bonne opinion de mes tables, que l'accord de l'Eclipſe du Soleil auroit pu inſpirer: & cela me paroit d'autant plus ſurprenant, que j'avois rectifié mes tables ſur un grand nombre d'Eclipſes lunaires. J'ai cru donc avant que de porter un jugement ſi peu favorable de mes tables, devoir refaire mes calculs, pour voir s'il ne s'y étoit pas gliſſé quelque faute, ayant fait alors ces calculs à la hâte. En voicy donc le détail de tous mes calculs.

III. Je commence donc par chercher le tems de l'oppoſition moyenne, qui arrive vers le 8 Août de l'Année 1748. dont le calcul ſera ſuivant mes tables imprimées dans l'Almanac latin pour l'an 1749. comme il ſuit:

	☽ⓐ⊙	L. moy: ⊙	An. moy: ⊙	An. moy: ☽	L. moy: ☊
A 1741, 1ȷ, 20ʰ, 44′, 15″	6	9ˢ, 12ᶜ, 1′, 38″	6ˢ, 3°, 25′, 46″	9ˢ, 27°, 15, 46″	3ˢ, 40, 9′, 52″
Ano 7, 13, 3, 52, 28	0	0, 12, 17, 11	0, 12, 9, 51	2, 26, 3, 39	4, 16, 3, 2
Juill. 25, 17, 8, 21	0	6, 23, 44, 49	6, 23, 44, 14	6, 0, 43, 3	0, 10, 56, 47
Juill. 40, 17, 45, 4	6	4, 18, 3, 38	1, 9, 19, 51	6, 24, 2, 28	4, 26, 59, 49
ou Août 8, 17, 45, 4					10, 7, 10, 3

Car

Car le 4ome Juillet convient avec le 9me Août; mais parceque cette année eſt biſextile, il en faut retrancher un jour, dont le mois de Fevrier a eté allongé. Donc, ſelon le mouvement moyen, l'oppoſition arrive à Paris A. 1748 Août 8j, 17h, 45′, 4″ tems moyen: & l'équation du tems étant 5′, 0″ à ſoutraire, le tems de cette oppoſition moyenne ſera à Paris A. 1748 Août 8j, 17h, 40′, 4″, & pour Berlin il y faut ajouter la difference de longitude, qui eſt 44′, 36″, par conſéquent cette oppoſition moyenne a du arriver à Berlin

A. 1748 Août 8j, 18h, 24′, 40″ tems vrai.

IV. Ayant pour ce tems les anomalies moyennes du Soleil & de la Lune, on en déterminera à l'aide des mêmes tables les anomalies excentriques, en y appliquant les équations qui conviennent, & on trouvera

L'anomalie excentrique du Soleil 1s, 8°, 43′, 44″

L'anomalie excentrique de la Lune 6, 23, 25, 27

Et de là on formera aiſément les argumens des tables d'équations & les equations mêmes.

Table	Argument	Eq: additives	Eq: ſoutractives
☌ I	6s, 25°, 23′, 27	- - - - -	3h, 44″, 18″
II	1, 8, 43, 44	- - - - -	2, 35, 59
III	8, 4, 7, 11	0h, 8′, 15″	
VI	5, 16, 39, 43	0, 2, 31	
V	2, 29, 30, 33	- - - -	0, 1, 1
VI	0, 12, 3, 10	31	
		+ 0, 11, 17	— 6 21, 18
			+ 0, 11, 17
	Equation totale à ſoutraire		6, 10, 1

Il faut donc ſoutraire 6h, 10′, 1″ du tems de l'oppoſition moyenne pour avoir le tems de l'oppoſition vraie dans l'orbite.

Oppoſition moyenne à Berlin Ann. 1748 Août 8j, 18h, 24′, 40″

otez 6, 10, 1

Oppoſition dans l'orbite à Berlin Ann. 1748 Août 8, 12, 14, 39
ſelon le tems vrai.

V. Main-

V. Maintenant je cherche pour ce tems les vrais lieux du Soleil, de la Lune, leurs anomalies excentriques avec le lieu moyen du noeud ascendant.

Tems & moyenne	Long. moy: ☉	An. moy: ☉	An. moy: ☽	Long. moy: ☊
ôtez	4, 18, 3, 38	1, 9, 19, 51	6, 24, 2, 28	10, 7, 10, 3
6h, 10′, 1″	— 15, 12	— 15, 12	— 3, 21, 26	+ 49
Tems & de l'orbite	4, 17, 48, 26	1, 9, 4, 39	6, 20, 41, 2	10, 7, 10, 52
Equat:	— 1, 11, 37	— 35, 56	— 1, 10, 18	
	4, 16, 36, 49	1, 8, 28, 43	6, 21, 51, 20	
	Long. vraie ☉	An. exc. ☉	An. exc. ☽	

Donc la longitude vraie du Soleil étant 4ˢ, 16°, 36′, 49
La longitude de la Lune dans son orbite est 10, 16, 36, 49
puisque nous savons que dans ce moment le lieu de la Lune dans son orbite differe de 6. signes de celui du Soleil.

VI. A présent il s'agit de determiner le vrai lieu du noeud ascendant ☊ avec l'inclinaison de l'orbite lunaire à l'ecliptique, ce qui se fera par le moyen des tables de la Lune, que j'ai publiées dans le recueil de mes pieces.

Tables pour	Argument	Long. moy: ☊			Inclin.		
le ☊ & l'Incl.		10ˢ,	7°,	10′,	52″		
I	6, 21, 51, 20	Eq.		+	38		
II	1, 8, 28, 43	Eq.	+	4,	30		
☉	4, 16, 36, 49	10,	7,	16,	0		
☊	10, 7, 16, 0						
III	6, 9, 20, 49	Eq.	+	0,	29, 49	50,	16′, 39″
		10,	7,	45,	49		
IV	6, 0, 0, 0	Eq.	0,	0,	0	Eq.	— 42
V	0, 9, 20, 49	Eq.	+	2,	14	Eq.	+ 36
		10.	7,	48,	3	5,	16, 33
		Long. vraye du ☊				Inclinaison vraie.	

Donc la longitude vraie du noeud ☊ est 10ˢ, 7°, 48′, 3″
& l'inclinaison de l'orbite lunaire 5, 16, 33.

VII. Pour avoir tous les élémens, ſur leſquels le calcul de l'Eclipſe ſe fonde, il faut encore chercher les diametres apparens, les parallaxes horizontales & les mouvemens horaires du Soleil & de la Lune, ce qui ſe trouvera aiſément par les tables, qu'on a jointes à l'Almanac Aſtronomique pour l'année 1749. On pourra auſſi ſe ſervir des formules ſuivantes, où v marque l'anomalie excentrique de la Lune, & u celle du Soleil. De là on aura :

Le diametre apparent du Soleil $=$ $1933'' - 32'',4 \cos u$
la parallaxe horizontale du ⊙ $=$ $12''$
le mouvement horaire du ⊙ $=$ $147'',87 - 4'',95 \cos u$

Pour la Lune dans les oppoſitions :

Diam. app. horiz. de la Lune $=$ $1892'' - 122'' \cos v + 4'' \cos 2v$
Parallaxe horiz. de la Lune $=$ $3430 - 222 \cos v - 8 \frac{1}{2} \cos 2v$
Mouv. horaire de la Lune $=$ $2023'',1 - 258,3 \cos v + 11,7 \cos 2v$
$- 1,8 \cos u + 1,4 \cos(v-u)$

Pour les conjonctions on n'a qu'à retrancher $2''$ pour le diametre apparent, & $3''$ pour la parallaxe & le mouvement horaire.

VIII. Par le moyen de ces formules, puiſqu'il y a
$u = 1, 8, 28, 43$ & $v = 6, 21, 51, 20$
nous trouverons :

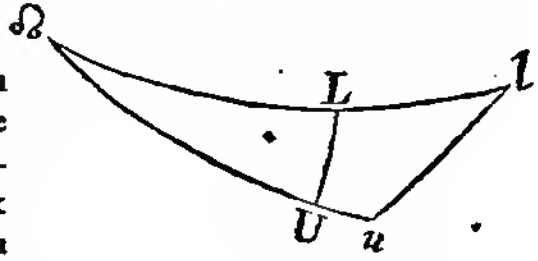
Le Diamatre apparent du Soleil	$=$	$1908''$	$=$	$31', 48''$
La parall. horizont. du Soleil	$=$	$12''$		
Le mouvement horaire du Soleil	$=$	144	$=$	2, 24
Le Diametre horiz. appar. de la ☽	$=$	2008	$=$	33, 28
La parallaxe horiz. de la Lune	$=$	3642	$=$	60, 42
Le mouvem. horaire de la Lune	$=$	2269	$=$	37, 49

Or le mouvement horaire du noeud eſt de $8''$
De plus la ſomme des parallaxes étant $60', 54''$
ſi l'on en retranche le demi-diametre du Soleil $15', 54''$
on aura le demi-diametre de l'ombre $=$ $45', 0''$

Mais l'atmoſphere de la terre augmentant l'ombre autant qu'on peut conclure par les obſervations, il ſemble qu'on y doit ajouter $40''$, de ſorte que le demi diametre rectifié de l'ombre ſera $=$ $45', 40''$.

XI. Soit

IX. Soit maintenant dans la figure cy-jointe ☊ U *u* l'Ecliptique, ☊ L *l* l'orbite de la Lune, & ☊ le noeud aſcendant. De plus, au moment de l'oppoſition dans l'orbite, ſoit U le centre de l'ombre & L celui de la Lune, & pour rendre le probleme plus général, ſoit



☊ U = ☊ L = *a*

lequel arc ſe trouve ſi l'on ote la longitude du noeud ☊ du lieu de la Lune; & ſoit ω l'angle de l'inclinaiſon ☊ des deux orbites: & nous aurons par les régles de la trigonometrie ſphærique:

$$\text{cof UL} = \text{cof}\,\omega \text{ ſin } a^2 + \text{cof } a^2 = \text{cof}\,\omega \text{ ſin } a^2 + 1 - \text{ſin } a^2$$

Or $1 - \text{cof}\,\omega$ étant $= 2 \text{ ſin } \frac{1}{2}\omega^2$, nous aurons

$$2 \text{ ſin } a^2 \text{ ſin } \tfrac{1}{2}\omega^2 = 2 \text{ ſin } \tfrac{1}{2}\text{UL}^2$$

& partant $\text{ſin } \frac{1}{2}\text{UL} = \text{ſin } a \text{ ſin } \frac{1}{2}\omega$.

X. Qu'on cherche à preſent la diſtance des centre *u*, & *l*, de l'ombre & de la Lune aprés *x* heures depuis le moment de l'oppoſition dans l'orbite. Soit pour cet effet *m* le mouvement horaire du Soleil ou de l'ombre depuis le noeud, & *n* le mouvement horaire de la Lune depuis le noeud qu'on aura ſi l'on ajoute 8″ au movement horaire tant du Soleil que de la Lune trouvé par les tables données cy-deſſus: & nous aurons ☊ $u = a + mx$ & ☊ $l = a + nx$. Nommant donc la diſtance des centres $ul = z$, nous aurons:

$$\text{cof } z = \text{cof}\,\omega \text{ ſin } (a+mx) \text{ ſin } (a+nx) + \text{cof}(a+mx)\,\text{cof}(a+nx)$$

ou puiſque $\text{ſin } b \text{ ſin } c = \frac{1}{2}\,\text{cof } (b-c) - \frac{1}{2}\,\text{cof } (b+c)$, & $\text{cof } b\,\text{cof } c = \frac{1}{2}\,\text{cof } (b-c) + \frac{1}{2}\,\text{cof}(b+c)$, cette équation ſe changera en cette cy:

$$\text{cof } z = \tfrac{1}{2}\,\text{cof}\,\omega\,\text{cof}(n-m)x - \tfrac{1}{2}\,\text{cof}\,\omega\,\text{cof}\,(2a+(n+m)\,x) + \tfrac{1}{2}\,\text{cof}(n-m)\,x + \tfrac{1}{2}\,\text{cof}\,(2a+(n+m)\,x)$$

ou bien $\text{cof } z = \text{cof } \frac{1}{2}\,\omega^2\,\text{cof}(n-m)\,x + \text{ſin } \frac{1}{2}\omega^2\,\text{cof}\,(2a+(n+m)\,x)$

ou $1 - 2\,\text{ſi } \frac{1}{2}\,z^2 = \text{cof}(n-m)x - \text{ſi } \frac{1}{2}\,\omega^2\,\text{cof}(n-m)\,x + \text{ſi } \frac{1}{2}\,\omega^2\,\text{cof}(2a+(n+m)x)$

Or $\cos(2a+(n+m)x) = \cos 2a \cos(n+m)x - \sin 2a \sin(n+m)x$
d'où nous obtiendrons :
$1-\sin\frac{1}{2}z^2 = \cos(n-m)x - \sin\frac{1}{2}\omega^2\cos(n-m)x + \cos 2a \sin\frac{1}{2}\omega^2 \cos(n+m)x$
$-\sin 2a \sin\frac{1}{2}\omega^2 \sin(n+m)x$

Mais les angles $(n-m)x$ & $(n+m)x$ étant trés petits il y aura $\cos(n-m)x = 1-\frac{1}{2}(n-m)^2 xx$, $\cos(n+m)x =$
$1 = \frac{1}{2}(n+m)^2 xx$ & $\sin(n+m)x = (n+m)x$, ce qui donne
$4\sin\frac{1}{2}z^2 = (n-m)^2 xx + 2\sin\frac{1}{2}\omega^2 - \sin\frac{1}{2}\omega^2 (n-m)^2 xx$
$-2\cos 2a \sin\frac{1}{2}\omega^2 + (n+m)^2 xx \cos 2a \sin\frac{1}{2}\omega^2$
$+4(n+m)x \sin a \cos a \sin\frac{1}{2}\omega^2$
ou $4\sin\frac{1}{2}z^2 = 4\sin a^2 \sin\frac{1}{2}\omega^2 + (n-m)^2 xx \cos\frac{1}{2}\omega^2 +$
$(n+m)^2 xx \cos 2a \sin\frac{1}{2}\omega^2 + 4(n+m)x \sin a \cos a \sin\frac{1}{2}\omega^2$
ou $4\sin\frac{1}{2}z^2 = (\sin a + (n+m)x\cos a)^2 \sin\frac{1}{2}\omega^2 + (n-m)^2 xx \cos\frac{1}{2}\omega^2$
$-(n+m)^2 xx \sin a^2 \sin\frac{1}{2}\omega^2$

XI. La distance des centres $ul = z$ sera la plus petite si l'on pose le differentiel de la valeur de $a \sin\frac{1}{2}z^2 = o$, ce qui donne
$(n-m)^2 x \cos\frac{1}{2}\omega^2 + (n+m)^2 x \cos 2a \sin\frac{1}{2}\omega^2 +$
$2(n+m)\sin a \cos a \sin\frac{1}{2}\omega^2 = 0$, d'où l'on tire

$$x = \frac{-(n+m)\sin 2a \sin\frac{1}{2}\omega^2}{(n-m)^2 \cos\frac{1}{2}\omega^2 + (n+m)^2 \cos 2a \sin\frac{1}{2}\omega^2}$$

& cette valeur substituée donne :

$$\sin\tfrac{1}{2}z = \sin a \sin\tfrac{1}{2}\omega \sqrt{\frac{(n-m)^2 \cos\frac{1}{2}\omega^2 - (n+m)^2 \sin a^2 \sin\frac{1}{2}\omega^2}{(n-m)^2 \cos\frac{1}{2}\omega^2 + (n+m)^2 \cos 2a \sin\frac{1}{2}\omega^2}}$$

Puisque les termes qui sont multipliés par $\sin\frac{1}{2}\omega^2$ sont extremement petits par raport aux autres, les centres de l'ombre & de la Lune s'approcheront le plus qu'il est possible, x heures aprés l'opposition dans l'orbite, étant

$$x = \frac{-(n+m)\sin 2a \tang\frac{1}{2}\omega^2}{(n-m)^2}\left(1 - \frac{(n+m)^2 \cos 2a \tang\frac{1}{2}\omega^2}{(n-m)^2}\right)$$

& la distance même des centres $ul = z$ sera.

$$\sin\tfrac{1}{2}z = \sin a \sin\tfrac{1}{2}\omega\left(1 - \frac{(n+m)^2 \cos a^2 \tang\frac{1}{2}\omega^2}{2(n-m)^2}\right)$$

XII. Mais

XII. Mais renverſons maintenant le cas, & ſuppoſons que la diſtance des centres $u\,l = z$ ſoit donnée, & qu'on doive chercher le tems, où les centres ſe trouvent à cette diſtance. Qu'on cherche prémierement un angle φ, de ſorte que $\text{cof}\,\varphi = \frac{\text{ſin}\ a\ \text{ſin}\ \frac{1}{2}\omega}{\text{ſin}\ \frac{1}{2}z}$

& remettant dans l'équation la valeur $\text{ſin}\ \frac{1}{2}z = \frac{\text{ſin}\ a\ \text{ſin}\ \frac{1}{2}\omega}{\text{cof}\,\varphi}$

on aura

$$4\,\text{ſin}\,a^2\,\text{ſin}\,\tfrac{1}{2}\omega^2\,\text{tang}\,\varphi^2 = (n-m)^2\,x\,x\,\text{cof}\,\tfrac{1}{2}\omega^2 + (n+m)^2\,x\,x\,\text{cof}\,2a\,\text{ſi}\,\tfrac{1}{2}\omega^2 + 2(n+m)\,x\,\text{ſin}\,2a\,\text{ſin}\,\tfrac{1}{2}\omega^2$$

où les deux derniers termes étant fort petits, on aura à peu prés $x = \frac{2\,\text{ſin}\,a\,\text{tang}\,\frac{1}{2}\omega\,\text{tang}\,\varphi}{n-m}$. ſuppoſons donc

$x = \frac{2\,\text{ſin}\,a\,\text{tang}\,\frac{1}{2}\omega\,\text{tang}\,\varphi}{n-m} - y$, & nous aurons.

$$0 = -4(n-m)\,y\,\text{ſi}\,a\,\text{ſi}\,\tfrac{1}{2}\omega\,\text{cof}\,\tfrac{1}{2}\omega\,\text{tang}\,\varphi + \frac{4(n+m)^2}{(n-m)^2}\,\text{ſi}\,a^2\,\text{cof}\,2a\,\text{ſi}\,\tfrac{1}{2}\omega^2\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\omega^2\,\text{tang}\,\varphi^2 + \frac{4(n+m)}{n-m}\,\text{ſin}\,a\,\text{ſin}\,2a\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\omega\,\text{ſin}\,\tfrac{1}{2}\omega^2\,\text{tang}\,\varphi$$

d'où nous tirons

$$y = \frac{n+m}{(n-m)^2}\,\text{ſin}\,2a\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\omega^2 + \frac{(n+m)^2}{(n-m)^3}\,\text{ſin}\,a\,\text{cof}\,2a\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\omega^3\,\text{tang}\,\varphi$$

Par conſéquent nous aurons enfin:

$$x = \frac{\text{ſin}\,a\,\text{tang}\,\frac{1}{2}\omega}{n-m}\left(2\,\text{tang}\,\varphi - \frac{2(n+m)}{n-m}\,\text{cof}\,a\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\omega - \frac{(n+m)^2}{(n-m)^2}\,\text{cof}\,2a\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\omega^2\,\text{tang}\,\varphi\right)$$

XIII. Cette formule par laquelle nous venons d'exprimer la valeur de x, ſert à trouver tant le commencement & la fin d'une Eclipſe, que l'immerſion & l'emerſion ſi l'Eclipſe eſt totale. Car la tangente de l'angle φ ſe prend auſsi bien negativement qu'affirmativement, de ſorte que cette formule renferme toujours une double valeur. Or pour trouver les moments du commencement & de la

ſin d'une Eclipſe on n'a qu'à mettre z égale à la ſomme des demi-diametres de l'ombre & de la lune ; & ſi l'on met z égale à la difference de ces demi-diametres, on trouvera les momens de l'immerſion & l'emerſion. On verra d'abord ſi l'un ou l'autre de ces cas eſt poſsible ; ce qui arrive ſi $\sin \frac{1}{2} z \succ \sin a \sin \frac{1}{2} \omega$. Car s'il étoit $\sin \frac{1}{2} z \prec \sin a \sin \frac{1}{2} \omega$, ce ſeroit une marque de l'impoſsibilité, à moins que la difference ne fût ſi petite, qu'elle pourroit être détruite par les petits termes negligés dans le calcul.

XIV. Faiſons maintenanr l'application de ces formules à l'Eclipſe de la Lune en queſtion, dont le tems de l'oppoſition dans l'orbite a été trouvé à Berlin, tems vrai A. 1748 Août 8^j, 12^h, $14'$ $39''$ qui nous ſert d'époque : & les valeurs des lettres qui entrent dans le calcul ſeront :

Lieu de la Lune dans ſon orbite	10^s,	16_o,	$36'$,	$49''$
Lieu du noeud aſcendant ☊	10,	7,	48,	3
L'arc ☊ L = ☊ U =	0,	8,	48,	46
Donc nous aurons a =	8_o,	$48'$,	$46''$	
& l'inclinaiſon ou l'angle ☊ = ω =	5_o,	16,	33	
& $\frac{1}{2} \omega$ =	2,	38,	$16\frac{1}{2}$	

Delà nous aurons $l \sin a$ = 9, 1852764
$l \sin \frac{1}{2} \omega$ = 8, 6629848
& partant $l \sin \frac{1}{2}$ UL = 7, 8482612
Donc $\frac{1}{2}$ UL = $24'$, $14\frac{1}{2}''$
& la diſtance des centres UL = $48'$, 29
au moment de l'oppoſition dans l'orbite.

XV. Le mouvement horaire du Soleil étant = $144''$ & le mouvement horaire de la lune 2269, nous aurons m = 152 & n = 2277, & partant $n - m$ = 2125, & $n + m$ = 2429. De là nous trouverons le moment de la plus grande proximité des centres de l'ombre & de la lune par la formule $x = -\frac{(n+m) \sin 12 \text{ tang } \frac{1}{2}\omega^2}{(n-m)^2}$ négligeant l'autre terme comme extrémement petit. Le calcul ſera

$l(n+m)$

$l\,(n+m) = 3,3854275$ $\qquad 2a = 17, 36, 32$

$l\,(n-m) = 3,3273589$ $\qquad l \text{ tang } \frac{1}{2}\omega = 8,6634454$

$l\,\frac{(n+m)}{n-m} = 0,0580686$

$l \text{ ſi } 2a = 9,4807506$

$l \text{ tang } \frac{1}{2}\omega^2 = 7,3268903$

$l - (n-m)x = 6,8657102$

ſoutr. $4,6855749$

red. en ſecond. $2,1801353$

$l(n-m) = 3,3273589$

$l - x = 8,8527764$

$x = -0^h,07125 = -4^1,275 = -4^1,16''$

Donc le tems de la plus grande proximité des centres eſt à Berlin, tems vrai A. 1748 Août 8j, 12h, 10′, 23″

XVI. Pour la plus petite diſtance des centres, qui répondra à ce moment, ſi elle eſt nommée $= z$, nous en avons déjà la valeur fort proche $= 48', 29''$; mais il en faut encore retrancher $\frac{(n+m)^2}{(n-m)^2}$ ſin a ſin $\frac{1}{2}\omega$ coſ a^2 tang $\frac{1}{2}\omega^2$

donc le calcul eſt :

$l\left(\frac{n+m}{n-m}\right)^2 = 0,1161372$

l ſi a ſi $\frac{1}{2}\omega = 7,8482612$ $\qquad l$ coſ $a = 9,9948423$

l coſ $a^2 = 9,9896846$

l tang $\frac{1}{2}\omega^1 = 7,3268908$

$5,6809738$

ſoutr. $4,6855749$

$0,5953989$

à ce log. répond. $4''$ à peu prés

Donc la plus petite diſtance des centres eſt $48', 25''$ laquelle étant otée de la ſomme des demi-diametres $45', 40'' + 16', 44'' = 62', 24''$ laiſſera $13', 59''$ pour la grandeur de l'Eclipſe : qui ſera reduite en doits,

doits, dont 6 égalent le demi-diametre de la Lune, on fera cette regle de trois :

$16', 44'' (1004) : 6 = 839 : 5, 014$

La grandeur de cette Eclipſe a donc été de $5 \frac{14}{1000}$ doigts ce qui doit être arrivé à $12^h, 10', 23''$.

XVII. Pour trouver les momens du commencement & de la fin de cette Eclipſe, il faut ſuppoſer $z =$ à la ſomme des demi-diametres, ou $z = 62', 24''$ & de là chercher l'angle φ que $\text{cof} = \varphi \frac{\text{ſin } a \text{ ſin } \frac{1}{2} \omega}{\text{ſin } \frac{1}{2} z}$

Or étant $\frac{1}{2} z = 31', 12''$ nous aurons.

l ſin a ſin $\frac{1}{2} \omega$	$=$	7, 8482612
l ſin $\frac{1}{2} z$	$=$	7, 9578747
l cof φ	$=$	9, 8903865
Dom. φ	$=$	$39°, 1', 8''$
& l tang φ	$=$	9, 9084037

Comme la valeur de x eſt compoſée de trois membres, cherchons en chacun à part, par le calcul qui ſuit.

l ſi a	$=$	9, 1852764
l tang $\frac{1}{2} \omega$	$=$	8, 6634454
		7, 8487218
$l (n - m)$	$=$	3, 3273589
		4, 5213628
ſoutr.		4, 6855749
$l \frac{\text{ſi } a \text{ tang } \frac{1}{2} \omega}{n - m}$	$=$	9, 8357878
l tang φ	$=$	9, 9084037
l 2	$=$	0, 3010300
l Part. I.	$=$	0, 0452215

Part. I.

$$\text{Part. I.} = 1^h, 1097$$

$$l \frac{\text{ſi } a \text{ tang } \frac{1}{2}\omega}{n-m} = 9, 8357474$$

$$l \frac{(n+m)}{n-m} = 0, 0580686$$

$$l\, 2 = 0, 3010300$$

$$0, 1948864$$

$$l \text{ cof } a = 9, 9948423$$

$$l \text{ tang } \tfrac{1}{2}\omega = 8, 6634454$$

$$l \text{ Part. II.} = 8, 8531741$$

$$\text{Part. II.} = 0, 0713$$

$$l \frac{\text{ſi } a \text{ tang } \frac{1}{2}\omega}{n-m} = 9, 8357878$$

$$l \left(\frac{n+m}{n-m}\right)^2 = 0, 1161372$$

$$l \text{ cof } 2a = 9, 9799536$$

$$l \text{ tang } \tfrac{1}{2}\omega^2 = 7, 3268908$$

$$l \text{ tang } \Phi = 9, 9084037$$

$$l \text{ Part. III.} = 7, 1651731$$

$$\text{Part. III.} = 0, 0015$$

XVIII. Ajoutant ces parties enſemble ſelon les ſignes, & donnant à tang Φ une valeur ambiguë, nous trouverons les deux valeurs ſuivantes pour x.

I. $x = 1, 1097 - 0, 0713 - 6, 0015 = +1, 0369$

II. $x = -1, 1097 - 0, 0713 + 0, 0015 = -1, 1795$

Donc, pour avoir le commencement de l'Eclipſe, il faut du tems de l'oppoſition dans l'orbite ſoutraire

$1, 1795^h = 1^h, 10', 770 = 1^h, 10', 46''$

& pour avoir la fin de l'Eclipſe, il faut ajouter à cette même époque

1, 0369^h = 1^h, 2^l, 214 = 1^h, 2^l, 13^{ll}

Tems de l'oppoſition, Aout	8^j,	12^h,	14^l, 39^{ll}
	—	1,	10, 46
	+	1,	2, 13
Commencement de l'Eclipſe à		11,	3, 53
Fin de l'Eclipſe à		13,	16, 52

XIX. Recueillons tout ce que nous venons de trouver enſemble, & nous verrons, que ſelon mes tables les moments de l'Eclipſe ont dû être à Berlin, tems vrai A. 1748. le 8me Août

Le commencement	à	11^h,	3^l,	53^{ll}
La plus grande obſcuration	à	12,	10,	23
L'oppoſition dans l'orbite	à	12,	14,	39
La fin de l'Eclipſe	à	13,	16,	52

La grandeur de l'Eclipſe $5\frac{14}{1000}$ Doigts.

& la durée de 2^h, 12^l, 49^{ll}

A préſent on voit que l'accord de ce calcul avec l'obſervation eſt ſi grand, qu'à peine ſauroit on s'attendre à une plus grande conformité; vûqu'on n'eſt pas encore trop certain de l'augmentation de l'ombre, cauſée par l'Atmosphere de la terre, & enſuite les obſervations de ces moments mêmes ne ſont pas ſuſceptibles d'une telle préciſion, qu'on n'en pourroit encore douter d'une minute, puiſqu'il eſt extremement difficile de diſtinguer l'obſervation de l'ombre même, de celle de la penombre.

OBSER-

OBSERVATION
DE L'ECLIPSE ANNULAIRE DU SOLEIL
LE 25. JUILLET 1748. SELON LE NOUVEAU STILE
A BERLIN,

PAR MR. KIES.

LE jour de la fameuſe Eclipſe du Soleil approchant, je fis tous les préparatifs néceſſaires pour la bien obſerver. Pour cette fin j'examinai ſoigneuſement quelque tems avant le mouvement de ma pendule pour ſavoir au juſte, ſi elle répondoit exactement au mouvement moyen du Soleil, & aprés m'en être bien aſſuré, je déterminai le midi du 24. Juillet par des hauteurs correſpondantes du Soleil avant & aprés midi, ayant en même tems égard à la variation du tems qui provient du changement de la declinaiſon du Soleil, pendant le tems écoulé entre les obſervations. Le 25. Juillet jour de l'Eclipſe, je pris de nouveau pluſieurs hauteurs du bord ſuperieur du Soleil avant midi, mais je ne fus pas en état l'aprésmidi de prendre ſes correſpondantes, m'ayant trop affoibli les yeux par cette obſervation, & par celle de l'Eclipſe même; je m'en tins donc à la concluſion du midi au jour précedent.

Pour l'obſervation je me ſuis ſervi d'une lunette Newtonienne de trois pieds, & comme mon but n'étoit que de déterminer les

points les plus néceſſaires, & les plus utiles pour l'Aſtronomie, je me ſuis borné aux momens ſuivans.

Le commencement de l'Eclipſe n'a pas été obſervé à cauſe des nuages qui nous deroboient l'image du Soleil

L'anneau ſe ferme à $11^h, 52', 51''$ tems vrai avant midi
—— ſe rompt à 11, 54, 13
Durée de l'anneau 1, 22
La fin de l'Eclipſe eſt arrivée aprés midi
à $1^h, 25', 9''$ tems vrai.

(*) Le diametre du Soleil meſuré avec le micrometre,
étoit de $31', 42''$
celui de la Lune de 29, 54 au milieu de l'Eclipſe.

Je paſſe préſentement à quelques Obſervations phyſiques. Premiérement, on a trés bien remarqué, en laiſſant tomber l'image du Soleil ſur un papier blanc dans la chambre obſcure, que le diametre du Soleil s'eſt enflé à peu prés de ſa centieme partie au tems de la plus grande obſcuration, & même quelques minutes avant & aprés ce tems; ce qui donne un argument évident pour l'exiſtence de l'Atmoſphere de la Lune, dans laquelle les rayons du Soleil ſont rompus: & il eſt trés important que cette découverte ſe verifie par d'autres obſervations qu'on fera dans la ſuite, il s'agit préſentement de trouver un moyen de déterminer la quantité de cette Atmoſphere lunaire. Entre diverſes methodes qui ſe préſentent d'abord à l'eſprit, la premiere qui s'offre eſt d'obſerver le lieu de la Lune, & de meſurer ſon diametre en même tems: comme on ſait d'ailleurs, que la partie illuminée de la Lune eſt toujours proportionelle au ſinus verſe de ſon élongation du Soleil, qu'on meſure la partie éclairée de la Lune aux environs de ſes quartiers, la difference entre le calcul & l'obſervation doit faire connoitre la quantité de la réfraction des rayons du Soleil dans l'Atmosphere de la lune.

Ce

(*) Je dois avertir que la vis du micrometre dont je me ſuis ſervi pour meſurer les diametres du Soleil & de la Lune, n'étoit pas aſſez fine pour répondre de quelques ſecondes, d'autant moins que ce micrometre étoit appliqué à la lunette d'un quart de cercle, dont la lunette eſt trop petite.

Ce ſeroit le moyen le plus ſur, ſi les phaſes illuminées de la Lune étoient bien terminées; c'eſt pourquoi je conſeillerois plutôt de ſe ſervir de la maniere qui ſuit. Qu'on prenne un inſtrument pareil à celui de Mr. *Hadley*, par lequel on peut meſurer des arcs compris entre deux aſtres & par le moyen des miroirs, qui y ſont appliqués, on joindra les Etoiles de ſorte qu'elles paroiſſent ſe baiſer enſemble, l'une de ces deux doit être celle qui va être eclipſée par la Lune, & l'inſtrument monté ſur une machine *parallactique*. Qu'on mette un cercle de cuivre au foyer de la lunette, qui ait pluſieurs fils paralleles, qui ſe coupent à angles droits, dont la diſtance entre eux ſoit connuë p. e. de dix en dix ſecondes; on obſervera donc, avant que l'Etoile entre ſur le bord de la Lune, ſous quel fil elle paroit, & à l'inſtant que le bord de la Lune paroit la toucher, on verra les deux Etoiles qui avant l'attouchement ne paroiſſoient qu'une ſeule, & la diſtance des fils qui couvrent les Etoiles, fera connoitre la quantité de la réfraction de l'Atmosphere de la la Lune. Comme on peut réïterer ſort ſouvent cette obſervation, & qu'on peut choiſir pour la ſeconde Etoile celle qu'on voudra, pourvû qu'elle ſoit à peu prés à la même hauteur que celle qui va être éclipſée, on parviendra enfin à s'aſſurer de la vraye quantité de l'Atmosphere lunaire. Aprés cette petite digreſſion, je retourne à l'obſervation de l'Eclipſe annulaire. Le disque de la Lune étant tout à fait entré ſur celui du Soleil, l'anneau parut ſi lumineux qu'il ebloüit la vuë, en le regardant ſans verre coloré, ou enfumé. On a remarqué qu'un verre ardent a brulé ce qu'on lui préſentoit, jusqu'à ce que la grandeur de l'Eclipſe fut de 11 doigts; l'Eclipſe ayant paſſé ce terme, les verres ardents ne firent plus d'effet ſur les choſes les plus combuſtibles. Quant à la conſtitution de l'air, le thermometre de *Fahrenheit* deſcendoit de ſix dégrez. Il faiſoit un air frais dans le tems de la plus grande phaſe, & le vent étoit auſſi plus fort qu'avant, ou aprés la plus grande obſcuration. On croyoit être plongé tout d'un coup dans le crépuſcule, à l'inſtant que l'anneau ſe forma; cependant il faiſoit encore aſſez de jour pour lire & diſtinguer des caracteres aſſez menus. On voyoit trés bien la Planete de Venus, & celle de Mars, à la vuë ſimple. Les oiſeaux donnoient

des marques qu'ils s'appercevoient de la nuit, & annonçoient le jour à meſure qu'il commençoit à faire plus clair. Je ne dois pas paſſer ſous ſilence que le bord de la Lune vers le Soleil étoit d'un rouge d'ecarlate fort vif, & finiſſoit vers l'anneau en couleur d'orange & un jaune tirant ſur le pâle. Le bord du Soleil au contraire étoit d'une couleur violette, finiſſant vers la Lune en couleur verte & celadon. Un phénomene fort remarquable, qui offrit un beau ſpectacle à la vuë, c'eſt que pendant le tems que l'Eclipſe étoit annulaire, l'ombre des feuilles d'arbres, ou de quelque autre corps que ce fut, étoit bordée d'un bel anneau qui avoit toutes les couleurs d'un arc-en-ciel. Ce beau ſpectacle ſe perdit, dés que l'anneau du Soleil fut rompu.

J'ajouterai ici une obſervation de la même Eclipſe annulaire du Soleil faite par Mr. *Polac*, Profeſſeur de Mathematiques à Francfort ſur l'Oder, où la latitude determinée par lui eſt de 52°, 26′ à Francfort ſur l'Oder

le commencement de l'Eclipſe arrivoit	à	10h,	24′,	50″ tems vrai
l'anneau ſe ferme	à	11,	57,	12
—— ſe rompt	à	12,	1,	0
durée de l'anneau			4,	12

SUR

SUR L'ATMOSPHERE DE LA LUNE

PROUVÉE PAR LA DERNIERE ÉCLIPSE ANNULAIRE DU SOLEIL.

PAR M. EULER.

Traduit du Latin.

I.

EN obſervant les momens de l'Eclipſe du Soleil que nous eûmes ici le 25 Juillet 1748. & en rendant compte de mes obſervations *, je n'avois eu pour but que d'arriver à une détermination plus exacte du veritable mouvement de la Lune & de ſa parallaxe. Mais il n'a pas laiſſé de ſe préſenter dans le cours de l'Obſervation de cette Eclipſe quelques autres Phénomenes remarquables, qui ne dépendoient, ni du mouvement de la Lune, ni de ſa parallaxe, mais qui ſembloient donner à connoitre la réalité de la réfraction des rayons qui raſent les bords de la Lune, & décider cette queſtion agitée depuis long tems parmi les Aſtronomes; Si la Lune eſt environnée d'une Atmoſphere, ou non? C'eſt ce qui m'engage à examiner ici plus exactement les phénomenes de cette eſpece, que j'ai obſervés pendant cette Eclipſe, & à en rechercher les cauſes.

* Voy *Memoir.* de 1747. p. 250 & ſuiv.

II. Pour obſerver cette Eclipſe avec plus de ſuccés, & ſoumettre à la meſure tout ce qu'elle offriroit de remarquable, j'avois préparé dans ma maiſon une chambre obſcure, qui regardoit le Midi, & ayant

ayant dirigé vers le Soleil, par un trou pratiqué à la fenêtre, un tube Aſtronomique de 9 pieds, je reçus l'image de cet aſtre ſur un papier blanc. J'affermis ce papier perpendiculairement à l'axe de la Lunette à une diſtance, telle que l'image du Soleil remplit exactement un cercle qui y etoit tracé, & je tirai ce tube jusqu'à ce que l'image fût repreſentée de la maniere la plus diſtincte ſur le papier, & qu'on put diſcerner clairement toutes les taches du Soleil, dont pluſieurs etoient viſibles ſur ſon disque. La Machine etoit conſtruite de telle ſorte, que tandis que le tube ſuivoit continuellement le mouvement du Soleil, le papier par un mouvement ſemblable, conſervoit toujours la même diſtance à l'egard du tube, de ſorte que l'image du Soleil demeuroit conſtamment dans le cercle tracé ſur le papier.

III. La Machine étant ainsi montée, & l'image du Soleil s'y montrant tout de ſuite aux yeux, j'attendis l'arrivée de l'Eclipſe, dont de petits nuages qui couvroient fréquemment le Soleil ne permirent pas d'obſerver le commencement. Il reſtoit même peu d'eſperance d'obſerver les phaſes ſuivantes de l'Eclipſe, le Ciel ſe couvrant de plus en plus de nuages. Cependant contre notre attente on put fort bien obſerver les principales phaſes, & ſur tout l'anneau pendant toute ſa durée. Comme les momens en ont été déterminés avec beaucoup de préciſion par M. Kies, * & qu'il en a fait ſon rapport à l'Academie, je ne les repeterai pas ici, me bornant uniquement aux choſes qui ſe rapportent au but de ce Mémoire.

* Voy. le *Mémoire* précedant.

IV. La Lune etant déjà entrée dans le disque du Soleil au delà de la moitié, de ſorte que la figure du Soleil paroiſſoit déjà ſemblable à la Lune vers ſes quadratures, & que l'angle qui fermoit ſes cornes, devenoit fort aigu, je remarquai premierement que le disque du Soleil ne demeuroit plus compris dans le cercle tracé ſur notre papier, mais que les pointes des cornes en ſortoient, quoique le bord du Soleil le plus eloigné de ces pointes demeurât cependant toujours dans les limites exactes du cercle. Ce Phénomene ſe préſentoit tel qu'on le voit Fig. I. où AEDEA eſt le cercle tracé ſur le papier, & GAGBG la figure du Soleil éclipſé, dont les pointes G, G, s'etendoient de part & d'autre au delà du cercle, en ſorte que les petites

tes portions EFG débordoient, tandis que le reſte du bord EAE étoit encore dans une exacte congruence.

V. Ces pointes G, G, continuoient à déborder de plus en plus hors du cercle, à meſure que les angles G & G des pointes devenoient plus aigus, juſqu'à ce qu'enfin ces pointes ſe reünirent, & le Soleil ſe montra ſous la forme annulaire, où ſon diſque forma ſur le papier un cercle beaucoup plus grand, que celui dans lequel il avoit été d'abord exactement renferme. Vers le milieu de la durée de cet anneau, on voyoit ſa figure peinte ſur le papier, telle qu'elle eſt repréſentée Fig. 2. où AZBN eſt le disque du Soleil, dont le point du ſommet eſt en Z, & le point oppoſé en N, par lequel eſt menée la droite horizontale AB, dont l'extremité A regarde l'Orient, & l'autre extremité B l'Occident : *a z b n* eſt le disque de la Lune & la droite EF qui paſſe par les centres C & *c* du Soleil & de la Lune, paroit etre diſtante de la verticale ZN d'un angle d'environ 40°, car je n'ai pas pris la meſure exacte de cet angle, étant plus attentif à d'autres phenomenes. La plus grande largeur de l'anneau etoit F*f*, & la moindre E*e*, qui etoit eſtimée égale à peu prés à la quatrieme partie de F*f*.

VI. Par le calcul Aſtronomique j'ai trouvé pour ce tems le demi-diametre apparent du Soleil $= 952''$ & le demi-diametre de la Lune $= 898''$: leſquelles meſures, (avant que le disque du Soleil eut ſouffert la dilatation qui lui arriva vers le tems, où l'anneau commença à ſe former,) s'accordent aſſez exactement avec l'obſervation, en ſorte qu'ici la Theorie n'a aucun beſoin d'être corrigée. Je conclus outre cela de la durée de l'anneau, que la diſtance moindre des centres du Soleil & de la Lune devoit avoir été de $53''$ environ ; d'où, ſi l'on ſuppoſe que le disque du Soleil n'ait ſouffert aucun accroiſſement dans la région F*f*, où etoit la plus grande largeur de l'anneau, puiſque nous avons vu que cet accroiſſement eſt ſeulement arrivé dans les endroits, où les bords du Soleil & de la Lune ſe touchoient réciproquement de plus prés, CF etoit $= 952''$, *cf* $= 898''$ & C*c* $= 53$, & par conſequent C*f* $= 845$, & à cauſe de cela la plus grande largeur de l'anneau F*f* $= 107''$, ce qui s'accorde aſſez exactement avec la figure de l'anneau que nous avons tracée.

VII. Il paroit de là, ſi le disque du Soleil ne s'etoit pas elargi vers la moindre largeur de l'anneau en E*e*, quelle auroit dû etre cette largeur E*e*. Car ſi on poſe CE = 952″, à cauſe de *ce* = 898″ & C*e* = 951″, la moindre largeur de l'anneau ſeroit = 1″ ; & cependant elle m'a manifeſtement paru égale à environ la quatrieme partie de la plus grande largeur F*f*. La largeur E*e* étoit donc à peu prés = 26″ quoiqu'elle n'eut cependant pas du avoir plus d'une ſeconde, ſi le disque de Soleil n'avoit ſouffert aucune dilatation. A Francfort ſur l'Oder M. *Polack* a obſervé le même phénomene, & la diſtance des centres du Soleil & de la Lune y etoit encore moindre qu'ici. Car l'anneau y ayant duré 4′, j'en conclus que la moindre diſtance des centres a été d'environ 35″, la plus grande largeur de l'anneau ayant été 89″, & la moindre 19″. Mais la moindre largeur etoit eſtimée comme ſousdouble de la plus grande, & par conſéquent de 44″, enſorte qu'à Francfort de même qu'ici, le disque du Soleil etoit dilaté de 25″, vers les endroits où la largeur de l'anneau étoit la moindre.

VIII. De là nait donc cette Queſtion : *Quelle a été la cauſe de la dilatation du disque du Soleil, dans les endroits où le bord de la Lune le touchoit presque interieurement* ? Pour la quantité de cette dilatation, que j'ai eſtimée 25″, je ne la crois pas ſi certaine, qu'il ne puiſſe s'y etre gliſſé une erreur de pluſieurs ſecondes : car, premierement la largeur de l'anneau n'a pu etre ſi exactement meſurée ; & enſuite les couleurs dont le bord du Soleil & celui de la Lune, étoient conſtamment revêtus, le premier de violet, & l'autre de rouge, empêchoient de diſcerner les extremités de ces bords. Malgré tout cela il ne ſauroit demeurer aucun doute, que la moindre largeur de l'anneau n'ait ſurpaſſé ici 10″, & il eſt à propos d'examiner quelle peut avoir été la cauſe de ſa dilatation.

IX. La Queſtion revient donc à ceci, c'eſt que nous expliquions, pourquoi l'extremité du bord du Soleil A, qui etant vu par le rayon, A T, qui friſe la Lune au point M devroit paroitre contigue de la Lune, n'eſt pourtant pas vu en A, mais en *a*, le ſpectateur etant ſuppoſé en T ; de ſorte que le lieu apparent de ce point differe de ſon vrai lieu de l'angle A T *a*, que nous avons trouvé de 25″, quoique nous l'eſtimions

mions un peu plus petit? C'eſt en rendant raiſon de cela, qu'on fera comprendre, comment il peut arriver, que lorsque l'anneau ne devroit plus avoir de largeur, ou presque plus, cette largeur reçoit cependant un accroiſſement d'autant de ſecondes, qu'en contient l'angle A T *a*. Car ſi le bord du Soleil s'eloigne de cette maniere de celui de la Lune, dont il eſt tout à fait près, il eſt clair que c'eſt la même cauſe, en vertu de laquelle les cornes du Soleil s'etendent avant & aprés l'anneau, & qu'il faut que la largeur de l'anneau même ſouffre une dilatation, dans l'endroit où elle eſt la moindre.

X. Avant que d'entreprendre l'explication de ce phenomene, il convient d'ecarter d'abord une opinion, qui au premier coup d'oeil n'eſt pas dénuée de probabilité. Ceux qui ont appris par la deſcription des autres Eclipſes annulaires du Soleil, que les deux largeurs de l'anneau, la plus grande & la plus petite, font enſemble une ſomme, plus grande que la difference entre les diametres apparens du Soleil & de la Lune; ceux, dis-je, auxquels cette obſervation eſt connüe, ont ſoupçonné pour l'ordinaire que, dans l'Eclipſe annulaire de Soleil, le diametre de la Lune paroit un peu moindre, qu'il ne feroit, ſi on le voyoit hors du Soleil. Mais de la maniere, dont nous avons procedé à l'obſervation, il étoit parfaitement clair que la Lune n'avoit point ſouffert de diminution, mais que c'etoit le Soleil qui avoit reçu quelque accroiſſement. Car ceux qui pendant l'Eclipſe même ont meſuré le diametre de la Lune, l'ont trouvé parfaitement conforme au calcul.

XI. Pour revenir donc à cet aggrandiſſement du disque du Soleil, obſervé pendant l'Eclipſe annulaire, on s'apperçoit d'abord, & par une legere attention à ce phenomene, que la cauſe doit en être cherchée dans la réfraction des rayons qui raſent le corps de la Lune. En effet on comprend aiſément, que ſi la Lune etoit environnée de quelque Atmosphere ſemblable à la notre; il devroit à cauſe de la réfraction des rayons qui la traverſent obliquement, en réſulter pleinement le même phénomene, qui conſiſte dans la défléxion des rayons. Non ſeulement donc il ne paroit reſter aucun doute, qu'on doive attribuër à la Lune une certaine Atmoſphere, mais on peut auſſi déter-

miner la denſité même de cette Atmoſphere par la quantité de la réfraction.

Fig. 4. XII. Soit donc le corps de la Lune EMF ceint d'une Atmoſphere déliée PQR, que nous ſuppoſerons être de la même denſité dans toute ſa hauteur, quoique ſans doute elle devienne, comme celle de la Terre, toujours plus rare, à meſure qu'elle s'eloigne de la ſurface, jusqu'à ce qu'enfin elle ſe confond inſenſiblement avec l'ether, qui remplit tout l'eſpace celeſte. Car comme nous ſavons par d'autres phenomenes, que l'Atmoſphere de la Lune eſt trés ſubtile, en comparaiſon de celle dont la Terre eſt environnée, nous pourrons négliger ſans erreur la diverſe rareté qui peut y avoir lieu, ſuivant les diverſes diſtances de la ſurface de la Lune. Cela poſé, chaque rayon de lumiere qui entre dans l'Atmoſphere de la Lune, ſouffrira une certaine réfraction, aprés laquelle il traverſera l'Atmoſphere en ligne droite, & lorsqu'il en ſortira de nouveau pour rentrer dans l'ether, il éprouvera une nouvelle réfraction ſemblable à la premiere.

XIII. Conſiderons à préſent le rayon de lumiere SP, partant du point S, ſoit que ce ſoit une Etoile, ou une particule appartenante au Soleil, lequel rayon tombe dans l'Atmoſphere de la Lune en P, de maniere qu'aprés ſa réfraction il raſe la ſurface de la Lune en M. Le ſpectateur donc placé au point M de la Lune, n'apperçoit pas à cauſe de la réfraction le point S dans ſon vrai lieu, mais en σ, & ce point lui ſera repreſenté dans le Ciel par le rayon MP prolongé aprés ſa réfraction. Or comme cette droite MP, parce qu'elle touche la ſurface de la Lune, repréſente l'horizon Lunaire, le ſpectateur placé en M appercevra un point lumineux dans l'horizon, lorsque ce point eſt encore effectivement caché ſous l'horizon à l'angle SP σ; cet angle SP σ ſera donc égal à la réfraction horizontale, que les habitans de la Lune doivent ſentir. Appellons donc cet angle SP σ, ou la réfraction horizontale viüe dans la Lune $= \alpha$, jusqu'à ce que nous puiſſions définir ſa valeur avec plus de préciſion.

XIV. De plus, que ce rayon PM traverſe toute l'Atmoſphere de la Lune, & qu'il ſouffre une nouvelle réfraction en Q, où il entre dans

dans l'ether, d'où ſuivant la ligne droite Q T il parvienne juſqu'à la Terre, & frappe l'oeil de l'obſervateur en T. Cet obſervateur jugera donc que le point lumineux, d'où ce rayon partoit, eſt dans la direction prolongée T Q, & par conſéquent ſitué en *s*. Mais, ſi la Lune n'avoit pas été placée entre deux, l'obſervateur auroit apperçu ce même point dans ſon vrai lieu S. Que ſi la diſtance de ce point S eſt extrémement grande, eu égard à la diſtance de la Lune à la Terre, ſans cet effet de la Lune, l'obſervateur T devroit l'appercevoir dans une direction parallele à la droite PS, laquelle à cauſe de l'angle P Q *s* egal à l'angle S P $\sigma = \alpha$, ſera inclinée à la direction T Q de l'angle double $= 2\alpha$.

XV. Si donc la Lune n'avoit point d'Atmoſphere, le point S ſeroit entierement inviſible pour l'obſervateur placé en T, & demeureroit caché derriere la Lune à une diſtance de ſon bord $= \alpha$. C'eſt donc l'Atmoſphere de la Lune qui rendra ce point S viſible, & le montrera à l'obſervateur T, comme s'il etoit en *s*; & comme le bord de la Lune M, à cauſe du rayon M Q T, ſe rapporte au même point du Ciel *s*, l'obſervateur placé en T appercevra un point lumineux S, contigu au bord de la Lune M; en ſorte que la réfraction de l'Atmoſphere Lunaire transportera dans le Ciel le point S de ſon vrai lieu S par l'eſpace S *s* $= 2\alpha$. Donc la vûe d'une Etoile, ou d'un autre point lumineux quelconque dans le Ciel, ne nous eſt dérobée par la Lune, que quand ce point s'eſt déjà caché derriere elle au delà de l'eſpace $= 2\alpha$. Tant que cet eſpace eſt moindre, le point demeure viſible hors du bord de la Lune.

XVI. Mais conſiderons auſsi le cas, où le rayon S P pénétrant par l'Atmoſphere de la Lune, ne raſe plus ſon bord, mais paſſe à une diſtance donnée M N. Ce rayon ſouffrira donc une moindre réfraction, tant en P qu'en Q, puiſqu'on doit concevoir l'Atmoſphere plus rare, à meſure qu'elle s'eloigne de la Lune; néanmoins on pourra également dans cette région plus rare conſiderer comme une ligne droite la roure que le rayon P Q ſuit en traverſant l'Atmoſphere. Car un ſpectateur étant placé à la hauteur M N au deſſus de la ſurface de la Lune, appercevra ſans doute une moindre réfraction horizon- Fig

tale des Etoiles, & c'eſt à cette refraction que ſera égale l'angle S P σ, par lequel l'aſtre S paroitra élevé ; & parce que le rayon P Q, qui parvient juſqu'à la Terre T, ſouffre une pareille réfraction en Q, l'obſervateur placé ſur la Terre en T verra le point lumineux S ſitué en s, en ſorte que l'intervalle Ss ſera égal dans le Ciel au double angle S P σ.

XVII. Soit la diſtance M N de la ſurface de la Lune telle, que l'obſervateur placé ſur la Terre en T la voye ſous l'angle x, & comme toute la hauteur M K de l'Atmoſphere de la Lune eſt fort petite, & la réfraction même trés petite en Q, le lieu apparent s de l'Etoile S lui paroitra diſtant du même intervalle $= x$ du bord M de la Lune. Mais le vrai lieu de cette Etoile qu'il appercevroit, ſi la Lune n'avoit point d'Atmoſphere, ſera plus proche du centre de la Lune de l'intervalle sS, qui ſe meſure par le double angle S P σ. Si donc cet angle S P σ, où la réfraction horizontale, qui répond à la hauteur, M N $= x$ au deſſus de la ſurface de la Lune, eſt poſée $= \zeta$, & qu'on voye l'Etoile éloignée du bord de la Lune de l'intervalle $= x$, il faut, pour en inferer le vrai lieu de l'Etoile, approcher le lieu apparent vers le centre de la Lune par l'intervalle sS $= 2\zeta$. D'où, ſi pour chaque diſtance x du bord de la Lune on étoit aſſuré de la réfraction horizontale ζ qui y répond, il ſeroit aiſé de déterminer le vrai lieu de chaque Etoile par ſon lieu apparent.

XVIII. La dilatation de l'anneau Solaire obſervée à Berlin, donne lieu de conclurre, que comme l'anneau, lorsqu'il étoit le plus étroit, ne devoit avoir qu'une ſeconde, cette largeur qui étoit prête à s'evanouïr a reçu un accroiſſement de 25″, environ. Par conſéquent ſi le bord du Soleil, ou quelque Etoile, ont paru à 25″ de diſtance du bord de la Lune, la vraye diſtance doit etre eſtimée tout à fait nulle, à moins que peut être, à cauſe des raiſons déjà indiquées, au lieu de 25″ il ne faille choiſir un moindre nombre, comme 20 ou 15. Alors nous ſavons par les Obſervations trés abondantes, dont on ſe ſert communément pour combattre l'Atmoſphere de la Lune, que dés que la diſtance d'une Etoile au bord de la Lune ſurpaſſe ſeulement

une

une minute, le changement que la réfraction Lunaire apporte à ſon lieu, devient tout à fait imperceptible.

XIX. Comme il paroît extremement difficile de déterminer par la theorie de la réfraction, l'effet de cette réfraction pour chaque diſtance du bord de la Lune, parce que la diminution de la denſité de l'Atmoſphere nous eſt inconnüe, il ne paroit y avoir de meilleur moyen à employer que celui de l'eſtimation, en cherchant une formule, qui ſatisfaſſe le mieux aux phenomenes. Soit donc la diſtance apparente d'une Etoile quelconque à l'egard du bord de la Lune $= x''$, & l'effet de la réfraction qui répond à cette diſtance $= z''$, en ſorte qu'on obtienne par ce moyen le vrai lieu de l'Etoile, en approchant davantage du centre de la Lune le lieu apparent de z''. Il faudra donc définir cette correction z par la diſtance x, de maniere qu'en poſant $x = 20$, il en réſulte auſſi $z = 20$; mais qu'au cas que x ſoit $= 60$, alors la valeur de z devienne ſi petite qu'on ne puiſſe presque l'appercevoir; comme ſi elle etoit de $5''$.

XX. Pour cet effet je prendrai une formule plus étenduë, & j'etablirai $z = \frac{A}{1 + B x^n}$, parce que je vois qu'une telle formule eſt extrémement commode, lors que la diſtance x devient conſiderable, pour faire que la valeur z ſoit la plus petite poſſible, pourvu que l'expoſant n ne ſoit que médiocrement grand. Que ſi l'on prend $n = 2$, & qu'on ſatisfaſſe aux deux conditions précedentes, on trouvera cette formule, $z = \frac{32}{1 + 0{,}0015 x x}$, ou $z = \frac{32}{1 + \frac{1}{666} x x}$; mais ſi, au lieu de $5''$ que nous attribuons à la diſtance $x = 60''$, nous poſons $4''$, cela donnera $z = \frac{40}{1 + \frac{1}{400} x x}$. Nous nous ſervirons donc un peu de cette formule, comme de la plus ſimple, jusqu'à ce que nous puiſſions en employer une plus certaine; car, quand même il y auroit de l'erreur, les concluſions qui en ſeront tirées, ne s'ecar-

s'ecarteront pourtant pas de la verité, d'une maniere qui ſoit ſenſible.

XXI. C'eſt donc ſur cette formule que j'ai conſtruit la Table ſuivante, qui pour chaque diſtance apparente, où un Aſtre ſe trouve au bord de la Lune, fournit la correction ſuivant laquelle cette diſtance doit être diminuée, pour découvrir la veritable. La diſtance apparente du bord de la Lune eſt marquée par x, & la correction, ou l'effet de la refraction par z.

x	z	x	z	x	z	x	z	x	z	x	z
0″	40″	10″	32″	20″	20″	30″	12″	40″	8″	90″	2″
1	40	11	31	21	19	31	12	45	7	100	2
2	40	12	29	22	18	32	11	50	6	110	1
3	39	13	28	23	17	33	11	55	5	120	1
4	38	14	27	24	16	34	10	60	4	130	1
5	37	15	26	25	15	35	10	65	4	140	1
6	36	16	24	26	15	36	10	70	3	150	1
7	35	17	23	27	14	37	9	75	3	160	1
8	34	18	22	28	13	38	9	80	2	170	½
9	33	19	21	29	13	39	8	85	2	180	½
10	32	20	20	30	12	40	8	90	2		

XXII. En ſuivant donc cette Table, on ſatisfait non ſeulement au phènomene de la derniere Eclipſe de Soleil, en ſorte que le bord du Soleil eſt effectivement contigu au bord de la Lune, lorsqu'il paroit en être diſtant de 20″, mais encore on reconnoit par là que l'effet de la réfraction Lunaire a été imperceptible, avant que la proximité du bord de la Lune ait été au deſſous d'une minute. En effet nous avons vu qu' à la diſtance de 180″, ou 3′, l'effet n'alloit pas même à une ſeconde; & pouvoit par conſéquent être compté pour rien; ce qui s'accorde parfaitement avec les Obſervations. Or comme cette Table indique, que ſi la diſtance apparente x evanouït tout à fait, l'effet de la refraction eſt 40″, c'eſt à dire, que le point lumineux

eſt

eſt effectivement caché à cet intervalle derriere le disque de la Lune : ſi ce nombre étoit exactement juſte, il s'enſuivroit que la réfraction horizontale pour les habitans de la Lune eſt de 20″. On comprend donc en même tems, que quand même cette Table renfermeroit quelque erreur, cependant la réfraction horizontale ne s'ecarteroit pas beaucoup du vrai.

XXIII. Auſſi-tot donc que le bord du Soleil eſt caché moins de 40″, derriere la Lune, il doit nous être viſible ; d'où il réſulte, que ſi nous voulons définir une Eclipſe annulaire du Soleil par le calcul, le commencement de l'anneau arrivera, avant que la diſtance des centres devienne égale à l'excés du demi-diametre du Soleil ſur le demi-diametre de la Lune : & de la même maniere, l'anneau diſparoîtra un peu aprés que la diſtance des centres eſt devenue égale à la difference des demi-diametres. C'eſt à dire, que ſi l'on prend la parallaxe horizontale dans la Lune de 20″, l'anneau devroit paroître auſſi-tot que la diſtance des centres ſurpaſſeroit de 40″ la difference des demi-diametres ; & par conſéquent l'Eclipſe ſeroit annulaire, quand même la diſtance des centres ne deviendroit jamais moindre, que la difference des demi-diametres, pourvu que cette diſtance ne ſurpaſſe pas cette difference de plus de 40″. L'Atmoſphere de la Lune fait donc qu'une Eclipſe, qui ſans elle ne ſeroit pas annulaire, paroit cependant telle ; & que l'anneau dure plus longtems, qu'il ne devroit durer ſuivant le calcul, en négligeant l'effet de l'Atmoſphere de la Lune.

XXIV. L'anneau ne ſauroit pourtant paroître durer auſſi longtems, que cette réfraction de 40″ le demanderoit ; car, de même que l'eclat du Soleil empêche de voir les Etoiles dans le Ciel, il eſt fort vraiſemblable que l'anneau ne ſauroit être apperçu du coté où il eſt trop étroit. En effet, tant que la largeur de l'anneau eſt extrémement petite, & ne s'accroit pas au delà de quelques ſecondes, elle ſera inviſible, & l'anneau ne ſe montrera, qu'aprés avoir aquis une largeur conſiderable. J'ai auſſi obſervé dans la derniere Eclipſe que l'anneau avoit paru tout à coup avec une largeur remarquable, & qu'il ne s'etoit point formé peu à peu & par degrés ; ce qui prouve manifeſtement, qu'à cauſe de la lumiere du reſte du Soleil, cet an-

neau n'a pu devenir visible, qu'aprés avoir aquis une largeur suffisante pour faire impression sur notre vüe.

XXV. Il convient aussi de remarquer ici, que ceux qui ont regardé directement le Soleil par un tube Astronomique, ont vu plus longtems l'anneau, que ceux qui ont considéré l'Image du Soleil representée sur le papier. Les premiers l'ont apperçû pendant l'espace de 82″, au lieu qu'il s'est à peine montré aux autres pendant une minute entiere. La raison de cette difference vient sans doute de ce que ceux qui regardoient le Soleil, recevoient une plus forte impression de ses rayons, & pouvoient par conséquent remarquer l'anneau, lorsque sa largeur étoit encore fort petite, au lieu que l'image du Soleil se peignant beaucoup plus foiblement sur le papier, il n'est pas étonnant que l'anneau ait commencé à y paroitre plus tard, & ait fini plutot; puisqu'ayant encore une largeur assez considerable, l'impression qu'en recevoit le papier étoit pourtant trop foible pour être apperçüe.

XXVI. C'est aussi pour cela que tant avant qu'aprés l'anneau, lors que le Soleil paroissoit en croissant, les pointes de ses cornes ne s'exprimoient pas parfaitement sur le papier, mais elles paroissoient obtuses, & comme coupées vers les extremités; phénomene, dont la cause est manifeste par tout ce que nous avons dit. En effet les extremités des pointes G & G (Fig. I.) étoient trop étroites, pour que les rayons qui en partoient, produisissent leur image sur le papier, ou dans l'oeil. Car, dés là que la largeur de cette pointe ne surpassoit pas le diametre d'une Etoile, qui auroit été invisible dans cet endroit, elle ne pouvoit arriver à l'oeil de l'observateur; & dans l'endroit où l'on voyoit le bout des cornes, il y avoit déjà une largeur assez considerable. Ce phénomene est donc semblable à celui que nous avons rapporté ci-dessus, par rapport à la largeur que l'anneau doit avoir, avant que d'affecter le sens de la vüe.

XXVII. Pour cette cause donc, il ne faut pas placer le commencement de l'anneau à l'instant, où la distance des centres du Soleil & de la Lune excede de 40″ la difference des demi-diametres, si tant est que nous estimions juste la réfraction horizontale dans la Lune

en la

en la faiſant de 20″ ; mais le commencement de l'anneau doit être placé où ſa largeur devient aſſez grande, pour ſurpaſſer le diametre des Etoiles inviſibles dans cette région. Quant à moi, la largeur de l'anneau, au moment qu'il a paru, ne m'a pas ſemblé moindre que de 20″ ; d'où l'on peut inferer que l'anneau ne devient viſible, quequand ſa largeur s'eſt accrüe au delà de 20″, & qu' alors il commence à ſe montrer tout à coup avec cette largeur. On ne ſauroit pourtant définir ce terme avec certitude, puiſqu' à proportion de la bonté du tube par lequel on regarde le Soleil, on apperçoit l'anneau ſe fermer plutot, ou plus tard ; & lorsqu'on reçoit l'image du Soleil ſur le papier, cette difference s'etend encore plus loin.

XXVIII. Pour définir par le calcul les Eclipſes annulaires de Soleil, ſoit Fig. 1.

le demi-diametre apparent du Soleil $= a$
le demi-diametre apparent de la Lune $= b$
& la difference des demi-diametres $a - b = d$.

Soit de plus la droite AB la route apparente du centre de la Lune à l'egard du centre du Soleil, qui ſoit conſideré comme immobile en S. Alors la perpendiculaire S L tombant ſur A B fournira la moindre diſtance des centres, qui ſoit $SL = c$, & cette diſtance SL ſera fort petite, ſi l'Eclipſe eſt annulaire. Que l'Eclipſe commence, lorsque le centre de la Lune parviendra en A, & que la fin tombe en B ; la droite SA auſsi bien que SB ſera donc égale à la ſomme des demi-diametres $a + b$; & parceque SL eſt ſi petite, la droite même AB, ou la route apparente, que le centre de la Lune décrit depuis le commencement jusqu'à la fin, pourra être cenſée égale à la ſomme SA + SB, en ſorte que AB ſoit $= 2a + 2b$.

XXIX. Soit de plus t le tems de toute l'Eclipſe, & le centre de la Lune peut être ſuppoſé parcourir l'eſpace $AB = 2a + 2b$ d'une maniere uniforme pendant le tems t. Ces choſes etant poſées, l'anneau commencera à paroître, lorsque le centre de la Lune ſera parvenu en M, en ſorte que SM ſoit égal à la difference des demi-diametres $a - b = d$, augmentée d'abord de 40″, & enſuite diminuée de la quantité que doit avoir la largeur de l'anneau, avant que de devenir viſible. Si donc nous ſuppoſons que l'anneau ne puiſſe être apperçu,

à moins que ſa largeur ne ſurpaſſe 20″, le commencement de l'anneau tombera ſur M, en ſorte que $SM = d + 40'' - 20'' = d + 20''$; & de la même maniere, en prenant $SN = d + 20''$, la fin de l'anneau s'accordera avec le lieu du centre de la Lune N. Pourvû donc que $d + 20''$ ſoit plus grand que $SL = c$, l'Eclipſe ſera annulaire, c'eſt à dire, pourvû que la moindre diſtance des centres SL ſoit moindre que $d + 20''$.

XXX. On trouvera donc la durée de l'anneau, en cherchant la quatrieme proportionelle aux diſtances AB, MN & de tems t, Or ML ſera $= \sqrt{((d+20'')^2 - u)}$, & par conſéquent $MN = 2(\sqrt{(d+20'')^2 - cc})$, d'où ſi l'on nomme le tems, pendant lequel l'anneau eſt viſible, $= \theta$, on aura

$$2a + 2b : 2\sqrt{((d+20'')^2 - cc)} = t : \theta$$

& par conſ. $(d+20'')^2\, tt - cc\, tt = (a+b)^2\, \theta\theta$.

De là, ſi la durée de l'anneau θ eſt connüe, auſsi bien que la durée de l'Eclipſe entiere t, & les demi-diametres apparens du Soleil & de la Lune a & b, d'où l'on a $d = a - b$, on conclurra réciproquement de l'obſervation de l'Eclipſe annulaire la moindre diſtance des centres du Soleil & de la Lune $SL = c$. Car on aura

$$c = \sqrt{\left((d+20'')^2 - (a+b)^2\, \frac{\theta}{t}\,\frac{\theta}{t}\right)}$$

XXXI. A préſent, ſi nous voulons appliquer cette formule à la derniere Eclipſe annulaire de Soleil, nous avions

le demi-diametre apparent du Soleil $a = 952''$
le demi-diametre apparent de la Lune $b = 898$

& par conſ. $a - b = d = 54''$, & $d + 20'' = 74''$.

Enſuite le tems de l'Eclipſe entiere, recueilli des obſervations, eſt 3h, 6′, & le tems de la durée de l'anneau 1h, 22″ ; d'où réſultera $t = 11160''$ & $\theta = 82''$, & à cauſe de $a + b = 1850$, on trouvera la moindre diſtance des centres $SL = c = \sqrt{(74^2 - \frac{1850^2\ 82^2}{11160^2})} = \sqrt{5291} = 72'', 44'''$. La moindre diſtance des centres auroit donc été 72 ¾ ſecondes, que par le calcul j'avois néanmoins trouvée ſeulement de 51″.

XXXII.

XXXII. Or j'ai fait voir dans ma Diſſertation precedente *, où j'ai ramené cette Eclipſe au calcul, que la parallaxe de la Lune, telle qu'on la ſuppoſe ordinairement dans les Tables, doit être conſiderablement diminuée, afin que la moindre diſtance des centres aille à 51″, & il faudroit qu'elle le fut encore beaucoup davantage pour que cette augmentation de la moindre diſtance des centres parvint juſqu'à 72″. Or, comme les élémens de cette Eclipſe ne paroiſſent pas differer ſi conſiderablement du vrai, il eſt plus vraiſemblable que la difference des demi-diametres d ne doit pas être augmentée de 20″, mais d'un moindre nombre; ce qui arriveroit, ſi la réfraction horizontale dans la Lune n'etoit pas miſe à 20″, mais ſeulement à 15″; car alors, au lieu de $d+20$, il faudroit écrire $d+10''$, ou $64''$, d'où réſulteroit $c = 62\frac{1}{2}''$, en ſorte que la diſtance des centres trouvée par le calcul de 51″ devroit ſeulement être augmentée de $11\frac{1}{2}$; or il eſt aſſez probable que les élémens de cette Eclipſe demandent cette petite correction.

* Voyez. *Mem.* de 1747 p. 250. & ſ.

XXXIII. Ces argumens établiſſent donc d'une maniere indubitable, que la Lune a auſſi une Atmoſphere, quoiqu'elle ſoit peut-être encore plus déliée, que ne l'eſtiment nos obſervations. Car le diſque du Soleil ayant reçu un accroiſſement remarquable vers le milieu de l'Eclipſe, quoiqu'on n'ait pas pu le meſurer avec exactitude, ce phénomene ne peut être attribué à aucune autre cauſe qu'à l'Atmoſphere de la Lune. Je ne demande pourtant pas, qu'on faſſe trop de fonds ſur les déterminations que j'ai données pour la réfraction des rayons qui paſſent par l'Atmoſphere de la Lune; & il eſt même fort vraiſemblable par les obſervations comparées à la Theorie, que la réfraction horizontale de la Lune, que j'avois miſe à 20″, va à peine au delà de 10″; d'où le diametre du Soleil peut recevoir un accroiſſement de 20″. Mais il eſt encore moins poſſible d'etablir quelque choſe de certain ſur la diminution de cette réfraction, d'une maniere qui convienne aux rayons qui paſſent plus loin de la Lune; quoique cette diminution paroiſſe ſi grande, que la réfraction devient tout à fait imperceptible, pour les rayons qui traverſent l'Atmoſphere de la Lune à quelques minutes de diſtance de ſon bord.

XXXIV. S'il nous arrivoit d'obſerver encore une fois une ſemblable Eclipſe annulaire de Soleil, il faudroit ſoumettre à une meſure exacte tous les phénomenes que nous fourniroit l'accroiſſement du diſque du Soleil, afin de définir par là non ſeulement la réfraction des rayons qui raſent le bord de la Lune, mais encore la Loi que ſuit la refraction, à l'egard des rayons qui paſſent plus loin de la Lune. Mais comme il n'eſt presque pas permis de nous attendre encore à une pareille Eclipſe, il faudra recourir à d'autres phénomenes, qui s'offrent plus ſouvent à nos regards. De ce genre ceux qui nous paroiſſent les plus propres au but dont il s'agit, ce ſont les occultations des Etoiles fixes par la Lune; car, comme on peut appercevoir une Etoile fixe jusqu'à ce qu'elle devienne contiguë à la Lune, il faudra qu'on remarque dans ſon lieu quelque changement, qui proviendra de la réfraction Lunaire, pourvû que les inſtrumens ſe trouvent aſſez exacts pour indiquer ces petits détails.

XXXV. Qu'on faſſe donc choix d'une Etoile fixe, ſi voiſine de celle qui ſouffrira l'occultation de la Lune, qu'on puiſſe les voir toutes deux à la fois par le tube; & que peu de tems avant que l'occultation arrive, on meſure par le moyen d'un excellent Micrometre la diſtance de ces Etoiles, qui paroit pouvoir ſe trouver à une ſeconde près, pourvu que la longueur du tube ne ſoit pas moindre de dix pieds, & que la diſtance des Etoiles n'excede pas 15′. De cette maniere, parce que les rayons qui partent de l'Etoile qui va entrer dans l'occultation, ne ſouffrent encore aucune réfraction, on trouvera la vraye diſtance de ces Etoiles aſſez exactement exprimée en ſecondes. Alors qu'on attende l'occultation, & qu'au moment même où elle arrive, on meſure de nouveau la diſtance de ces Etoiles, en remarquant la difference entre cette diſtance actuelle, & celle qui avoit été trouvée auparavant; & de la comparaiſon de ces diſtances on conclurra aiſément la réfraction horizontale de la Lune, pourvû que le diametre apparent de la Lune ait été connu, auſſi bien que ſa ſituation à l'egard des deux Etoiles au moment de l'occultation; & ſi l'on ne peut déterminer ces choſes en même tems par l'obſervation, il n'y a qu'à les tirer de la Theorie du mouvement de la Lune.

XXXVI.

XXXVI. En effet, ſoit la diſtance vraye des Etoiles $= m''$, que le Micrometre aura indiquée longtems avant l'occultation, & qu'au moment même de l'occultation, l'Etoile qui va la ſouffrir, paroiſſe au bord de la Lune au point S; que l'autre Etoile ſoit en A, & alors ſuppoſons que la diſtance AS de ces Etoiles ſoit trouvée moindre, en ſorte que AS ſoit $= m'' - \mu''$. De plus, comme par la Theorie le demi-diametre apparent de la Lune eſt aſſez exactement donné, & qu'on peut connoître l'angle ASL, ou par la Theorie, ou par la durée de l'occultation, ou de quelque autre maniere; ſoit cet angle ASL $= \varphi$, & parce qu'à cauſe de la réfraction le lieu de l'Etoile s'eloigne du centre de la Lune, que le vrai lieu de l'Etoile ſoit dans ce moment en s, on aura $As = m''$, & ſi $At = As$ on retranche $ST = \mu''$, d'où à cauſe de l'angle $Sst = 180° - \varphi$, on conclurra aſſez exactement l'effet de la réfraction $St = \frac{\mu''}{\cos(180° - \varphi)}$ $= -\frac{\mu''}{\cos\varphi}$, à la moitié duquel la réfraction horizontale de la Lune doit etre cenſée égale. Fig. 2.

XXXVII. On fera bien de choiſir, pour parvenir à cette fin, les occultations dans leſquelles l'Etoile fixe S entre ſous le bord obſcur de la Lune, ce qui arrive vers le premier quartier. Car ſi l'Etoile arrive au bord éclairé de la Lune, ſa lumiere eſt déjà offusquée avant l'occultation par l'eclat de la Lune, de maniere qu'elle diſparoit avant le moment de l'occultation, à moins qu'elle ne ſoit de la premiere grandeur. En effet, quoique dans ce cas le bord de la Lune ne paroiſſe pas, cependant le moment même de l'occultation indique cet inſtant, où l'Etoile étoit contiguë au bord de la Lune. Cependant il ne ſera pas inutile d'examiner auſſi quelquefois l'arrivée des Etoiles au bord éclairé de la Lune, pour connoître par là, s'il y a quelque difference entre la réfraction auprés du bord éclairé, & la réfraction auprés du bord obſcur? Car l'Atmoſphére de la Lune étant continuellement expoſée aux rayons du Soleil du coté de la région éclairée, on a lieu de ſoupçonner qu'elle eſt tellement attenuée dans ce tems-là, que

que la réfraction en devient beaucoup moindre. Et c'eſt peut-être là la cauſe, qui a empêché de remarquer jusqu'ici cet effet de la réfraction dans les occultations.

XXXVIII. Enſuite une des choſes auxquelles il faut apporter le plus de ſoin, c'eſt, avant que l'Etoile ſe cache, de rechercher perpetuellement, & à chaque moment, avec une extrême diligence, ſa diſtance de l'autre Etoile fixe, parce que nous avons prouvé que cette diſtance doit diminuer peu à peu, avant ſon arrivée au bord de la Lune. Car, par cette ſuite d'obſervations, & en appellant la Theorie au ſecours, on pourra conclurre pour chaque Obſervation la diſtance apparente de l'Etoile au bord de la Lune, & l'on pourra déterminer la réfraction qui lui convient, d'une maniere ſemblable à celle qui j'ai recommandée ci-devant pour le moment même de l'occultation. Et aprés que pluſieurs Obſervations de cette nature auront été faites avec exactitude, on pourra s'en ſervir pour corriger la Table donnée au §. XXI. ou plutot pour en dreſſer ſans peine une nouvelle, à l'aide de laquelle tous les phénomenes, qui naiſſent de l'Atmosphere de la Lune, pourront dans la ſuite être aſſignés avec beaucoup d'exactitude.

XXXIX. On n'a donc pas le moindre ſujet de s'etonner que cette célébre Queſtion, agitée déjà depuis longtems parmi les Aſtronomes; *Si la Lune a une Atmosphere, ou non*? n'ait pas encore été decidée. Car, quoique les occultations des Etoiles fixes par la Lune arrivent trés fréquemment, cependant l'effet de la réfraction eſt ſi petit dans les Etoiles fixes elles-mêmes, qui ſouffrent l'occultation, qu'on ne peut l'appercevoir en aucune maniere, à moins que leurs diſtances n'ayent déjà été trés ſoigneuſement examinées par d'autres, & qu'on ne les meſure de nouveau avec toute l'exactitude poſſible, vers le tems même de l'occultation. Or il n'y a peut-être eu encore aucun Aſtronome, auquel il ſoit venu dans l'eſprit de ſuivre cette voye pour faire des recherches ſur l'Atmosphere de la Lune; ou s'il y en a eu qui ſoient par hazard tombés ſur cette methode, ils ont été forcés d'abandonner leur travail, faute d'inſtrumens aſſez exacts. Je ne ſai, ſi ceux qui voudroient préſentement prendre cette peine, ne

ſeroient

ſeroient pas bien de préſerer le Micrometre de feu Mr. *Kirch*, pourvû que les vis ſe terminent interieurement en pointe, à tous ceux qu'on ſait à preſent avec tant de ſoin & à grands fraix. Car pourvu que les pointes des vis ſoyent une fois appliquées aux deux Etoiles, on s'appercevra facilement, ſi la diſtance des Etoiles diminuë, & la diminution même ſe définira avec tout auſſi peu de peine par la révolution des vis.

XL. Les principes d'une ſaine Phyſique mettent eux mêmes l'Atmosphere de la Lune hors de doute ; mais ce que les Obſervations nous ont découvert, n'en eſt pas moins admirable, c'eſt que cette Atmospbere de la Lune ſoit d'une ſi grande tenuïté, que ſon effet eſt presque imperceptible. Car la réfraction horizontale ſur la Terre étant de plus d'un demi degré, ſi la Lune avoit une pareille Atmoſphere, les Aſtres, en approchant du bord de la Lune, ſeroient transportés de leur place de plus d'un degré. Mais cet effet ſurpaſſant à peine 20″, il faut que l'air de la Lune ſoit presque 200 fois plus rare que le notre : d'où l'on peut conclurre, ou qu'il ne monte point du tout de vapeurs de la ſurface de la Lune, ou que la matiere de la Lune eſt ſi ſolide & ſi ſéche, qu'elle n'eſt presque ſujette à aucune évaporation. Auſſi par l'uſage des longs tubes les Aſtronomes ont déjà appris, que ces taches obſcures dans la Lune, qui ſont priſes vulgairement pour des eaux & des lacs, doivent plutot être des lieux arides, des cavernes, ou des forets, que des contrées humides.

SUR LE FROTTEMENT
DES CORPS SOLIDES,
PAR M. EULER.

I.

ON a remarqué, que dans la pluspart des machines le frottement eſt ſi conſiderable, qu'une bonne partie des forces, qui ſont requiſes pour mettre la machine en mouvement, n'eſt employée qu'à ſurmonter cette réſiſtance: de ſorte que s'il étoit poſsible de délivrer les machines du frottement, une beaucoup plus petite quantité de forces ſeroit ſuffiſante à produire le même effet. Tous les Mecaniciens conviennent auſſi, qu'un des principaux articles, desquels dépend la derniere perfection des machines, conſiſte dans la diminution du frottement, & c'eſt dans cette vuë, qu'ils ont taché depuis longtems de rechercher la nature & la quantité du frottement, pour en découvrir les moyens de le diminuer, ou de le faire evanouïr tout à fait, s'il étoit poſsible.

II. Le frottement ſe manifeſte toutes les fois, qu'un corps doit gliſſer ſur la ſurface d'un autre corps; car quelque polies, que ſoient les ſurfaces des corps qui gliſſent les uns ſur les autres, le mouvement y rencontre toujours quelque réſiſtance, qui le détruit bientôt entierement, à moins qu'il ne ſoit renouvellé par l'action réiterée de nouvelles

velles forces. Cependant il n'y a aucun doute, que le frottement ne devienne d'autant plus petit, plus les ſurfaces des corps, qui gliſſent les uns ſur les autres, ſeront polies & unies, afin qu'il ne ſe trouve plus de petites inégalités, qui puiſſent arreter le mouvement. C'eſt par cette raiſon, que les traineaux gliſſent aſſez aiſément ſur la glace; & que dans les machines on éprouve une diminution conſiderable du frottement, en enduiſant de la graiſſe les ſurfaces, qui ſe frottent mutuellement; puisque la graiſſe ſert à rendre ces ſurfaces plus égales & plus unies.

III. Cependant les matieres, dont on ſe ſert dans la conſtruction des Machines, comme les bois, & les metaux, ne ſont pas ſusceptibles d'un tel degré de poliſſure, que le frottement ne ſoit pas encore trés conſiderable: & l'experience a fait voir, que la réſiſtance, dont toutes ces matieres s'oppoſent au mouvement, eſt presque la même, & égale à une partie fort conſiderable de leur poids entier. Mr. *Amontons* ſoutint, que le frottement étoit toujours égal au tiers du poids d'un corps, qui ſe mouvoit ſur une ſurface horizontale, ou généralement au tiers de la force, dont le corps étoit preſſé contre la ſurface, ſur laquelle il gliſſoit. D'autres ont trouvé la quantité du frottement un peu differente, & Mr. *Bilfinger* ne donne au frottement que la quatriéme partie de la preſſion. Comme cela dépend du degré de poliſſure, qu'ont les ſurfaces des corps, il n'eſt pas ſurprenant, que les experiences ne donnent pas toujours la même quantité de frottement.

IV. Mais une circonſtance bien remarquable, dont tous ceux qui ont examiné le frottement par les experiences, ſont d'accord; c'eſt que la quantité du frottement dépend uniquement du poids, ou de la force, dont un corps eſt preſſé contre la ſurface, ſur laquelle il eſt entrainé; & que ni la figure du corps, ni la grandeur de ſa baſe, n'entrent en aucune maniere dans la détermination du frottement. Car ſi le frottement étoit cauſé par l'arrachement des petits filets, ou par l'enfoncement des petites prominences, qui ſe trouvent ſur les ſurfaces, qui gliſſent l'une ſur l'autre, on devroit penſer, que plus les ſurfaces, qui ſe touchent ſeroient larges, le frottement en devroit devenir plus

grand. Peut-être même, que cette circonſtance contribuë quelque choſe, en des matieres fileuſes, & d'autres d'une ſemblable nature; mais dans les bois & metaux, dont on a fait principalement les expériences, on doit convenir que la largeur de la baſe ne ſert, ni à augmenter, ni à diminuer le frottement.

Fig. 1. V. Donc ſi un corps ABCD eſt preſſé contre la ſurface MN par une force quelconque GP, qui ſoit = P, ſoit que ce ſoit le poids du corps ABCD, ſi la ſurface MN eſt horizontale, ou qu'il y ait encore une autre force, dont le corps ſoit pouſſé à la ſurface; dans ce cas il faut une certaine force EF, avant qu'on ſoit en état de remuer ce corps, & de le tirer ſuivant la direction BN. On ſait, que s'il n'y avoit point de frottement, la moindre force EF ſeroit capable de mettre ce corps en mouvement. Mais ſi le frottement eſt égal à un tiers de la force P, ou que nous le poſions = $\frac{m}{n}$ P, pour ne nous pas borner à une hypotheſe, qui pourroit être trop particuliere; alors tant que la force EF ſera plus petite que $\frac{m}{n}$ P, le corps demeurera en repos, de même que s'il n'étoit ſollicité d'aucune force. Or dés qu'on employera une force EF plus grande que $\frac{m}{n}$ P, le corps ſera actuellement entrainé ſelon la direction BN; mais le mouvement ne ſera produit, que par l'excés de la force EF ſur le frottement $\frac{m}{n}$ P.

VI. Le frottement doit donc être regardé comme une force = $\frac{m}{n}$ P, dont le corps eſt tiré en arriére ſelon la direction AM, qui eſt toujours contraire à celle du mouvement du corps, & paſſe par l'attouchement AB. Or elle eſt bien differente des autres forces réelles, qui peuvent agir ſur le corps; car elle ne produit aucun effet, que lorſque le corps ſe trouve actuellement en mouvement, & ce n'eſt qu'alors, qu'elle fait le même effet, que ſi le corps ABCD étoit effectivement

ſivement ſollicité en arriere ſelon la direction AM. Tant que le corps eſt en repos, & qu'il n'eſt tiré que par des forces moindres que le frottement, tout ſon effet ne conſiſte qu'en détruiſant celui que ces forces devroient produire elles mêmes. Ainſi nommant la force EF = F, le corps n'en recevra aucun mouvement, à moins que F ne ſurpaſſe la valeur du frottement $\frac{m}{n}$ P; mais dés que F > $\frac{m}{n}$ P le corps recevra une acceleration, qui convient à l'excés F — $\frac{m}{n}$ P; & il ne s'enſuit pas, que ſi F < $\frac{m}{n}$ P, l'acceleration devienne negative.

VII. Cela paroîtra d'abord fort étrange, & contraire à la loi de continuité, de ſorte que la nature ſemble faire ici un ſaut, ce qui n'arrive jamais dans l'action des autres forces. Cependant on peut ſe repreſenter l'action du frottement, d'une maniere, qui levera tous les doutes, & qui ſera conforme à l'action des autres forces: car je ferai voir, qu'on pourra produire par la ſeule action de la gravité un effet tout à fait ſemblable à celui du frottement, par lequel on pourroit même découvrir la nature du frottement, quand même elle ne ſeroit pas encore connuë par l'experience. Cette conſideration ſervira auſſi à faire voir, en quoi conſiſte la veritable cauſe du frottement, & d'où vient cette réſiſtance, qu'il oppoſe au mouvement. Car quoique peut-être la veritable cauſe du frottement ne convienne pas preciſement avec celle que je vai répreſenter, la parfaite reſſemblance qu'on y remarquera, ne laiſſera aucun doute ſur la poſſibilité des effets, qui paroiſſent ſi étranges.

VIII. Sur la ligne horizontale MN ſoient *a*G, *b*G, deux plans également inclinés, qui forment en G l'angle *a*G*b*, dans lequel ſoit enfoncé le corps ABCD avec ſa baſe pointuë AGB, dont l'angle AGB ſoit preciſément égal à *a*G*b*. Dans cette ſituation le corps ABCD ſera non ſeulement en équilibre, mais auſſi une petite force EF, qui lui eſt appliquée horizontalement ne ſera pas capable de le

mettre en mouvement, quoique les faces, dont ce corps touche les plans inclinés ſoient parfaitement polies, & qu'aucun frottement n'y ait lieu. Car pour que la force QF puiſſe mouvoir le corps ABCD, il faut qu'elle le faſſe monter ſur le plan incliné G*b*, & partant elle doit être plus grande que la partie du poids du corps, laquelle le ſollicite dans la direction contraire GQ. Ainſi ce corps ABCD ſe trouve dans un état fort ſemblable à celui du frottement, puiſque la force EF n'eſt pas capable de le mouvoir, tandis qu'elle eſt moindre que le degré requis pour vaincre la pente du plan incliné.

IX. La reſſemblance paroitra encore davantage, ſi nous déterminons la quantité de la force EF, qui eſt requiſe pour mettre le corps en mouvement. Soit pour cet effet l'angle $MGa = NGb = \alpha$, le poids du corps ABCD $= P$, dont il eſt ſollicité en bas ſelon la direction verticale GP; & la force $EF = F$, qui tire le corps ſuivant la direction horizontale EF. Puiſque le corps ne peut être mis en mouvement, que ſelon la direction G*b*, je décompoſe la force $EF = F$ ſuivant la direction EH parallele à G*b*, & FH qui y eſt normale: l'angle FEH étant $= NGb = \alpha$, la force EH ſera $= F \cos \alpha$, & ce n'eſt que celle-cy qui eſt employée à mettre le corps en mouvement. Or dès que le mouvement va commencer, le poids du corps, ou la force $GP = P$ s'y oppoſe par ſa partie GQ, qui réſulte de la réſolution ſuivant les directions GQ & PQ, dont celle-cy eſt perpendiculaire à GQ. Donc l'angle GPQ étant $= \alpha$, la force GQ ſera $= P \sin \alpha$: d'où l'on voit que le corps ne pourra être mis en mouvement, que la force $F \cos \alpha$ ne ſoit pas plus grande que $P \sin \alpha$.

X. Donc tant qu'il ſera $F \cos \alpha < P \sin \alpha$, le corps ABCD reſtera en repos, & ne recevra aucun mouvement de l'action de la force $EF = F$. Or ſi $F \cos \alpha = P \sin \alpha$ ou $F = P \tang \alpha$, le corps ſera, pour ainſi dire, en équilibre, ou tout prêt à ſe mouvoir, dès que la force F devient tant ſoit peu plus grande que $P \tang \alpha$: & quand cela arrive que $F > P \tang \alpha$, l'acceleration du corps ſuivant la direction G*b* ſera produite par l'excés de la force $EH = F \cos \alpha$ ſur $P \sin \alpha$, c'eſt à dire par $F \cos \alpha - P \sin \alpha$. Par conſéquent la réſiſtance,

ce, qu'il faut vaincre dans ce cas, avant que le corps puiſſe être remué, ſera $=$ P ſin α, laquelle étant égale à une partie du poids du corps, & ne dépendant nullement de la largeur de la baſe AGB, dont ce corps touche la ſurface a G b, il en paroit une aſſez parfaite reſſemblance entre ce cas, & celui du frottement; & pour rendre ces cas égaux, on n'a qu'à faire ſin $\alpha = \frac{1}{3}$, dans l'hypotheſe d'*Amontons* ou les angles MG a, & NG $b = 19°, 29'$: or dans l'hypotheſe de Mr. *Bilfinger* ces angles ſeront $= 14°, 28'$, à cauſe de ſin $\alpha = \frac{1}{4}$.

XI. Il en ſera de même, ſi la baſe AB du corps ABCD eſt formée de pluſieurs angles obtus A c d c d c d cB, tous ſemblables à celui AGB, que nous venons de conſiderer, & que la ſurface MN ſoit taillée d'une maniere ſemblable, en ſorte que les inegalités de la baſe & de la ſurface ſoient parfaitement d'accord. Car dans ce cas, ſi chacun des angles, que conſtituënt les plans inclinés c d avec la ligne horizontale MN, eſt $= \alpha$, le corps ABCD, dont le poids eſt $=$ P, ne ſera remué par la force horizontale EF $=$ F, qu'il n'y ſoit F cos $\alpha >$ P ſin α, ou F $>$ P tang α: & tant que la force F ſera moindre que P tang α, le corps reſtera en repos. On voit bien, que la même choſe arrivera, quelque grand que ſoit le nombre des prominences d, d, &c. & il n'eſt pas même néceſſaire, que toutes les inclinaiſons ſoient égales entr'elles, pourvu qu'il ne s'y trouve de plus grandes que l'angle α; car quand même il y auroit quelques angles moindres, ceux-cy ne faciliteroient point le mouvement. Fig. 3.

XII. Si c'etoit le cas du frottement, comme il paroit fort probable, on comprendroit aiſément les phénomenes du frottement, que j'ai rapportés cy deſſus, & qui regardent la difficulté de mettre un corps en mouvement. Car cette difficulté ne conſiſteroit qu'en ce que, pour mouvoir le corps, il faudroit qu'il montât effectivement ſur un plan incliné. De là on voit que dés que le corps a commencé de ſe mouvoir, comme ces plans inclinés d c, d c &c. ſont extrémement petits, ce corps montera & deſcendra alternativement; & partant puisque les deſcentes ſe ſont d'elles mêmes, pendant que le corps ſe meut, la difficulté du frottement ne ſe fait ſentir que par intervalles, c'eſt à dire, dans les momens où le corps eſt obligé de monter. D'où il paroit

paroit, qu'on peut tirer cette conſéquence ; que pendant que le corps eſt actuellement en mouvement, l'effet du frottement ne ſera que la moitié de celui qu'on éprouve, avant qu'on puiſſe mettre en mouvement le corps.

XIII. Donc afin que la force EF = F puiſſe imprimer au corps ABCD un mouvement, elle doit être plus grande que P tang α, mais dés que le corps ſe meut, la réſiſtance du frottement ſera diminuée à demi. Par conſequent pour calculer l'acceleration du corps, on ne doit diminuer la force ſollicitante, que de $\frac{1}{2}$ P ſin α, de ſorte que l'acceleration ſera proportionelle à F coſ $\alpha - \frac{1}{2}$ P ſin α, ou peut-être à F $- \frac{1}{2}$ P tang α, puiſque dans les deſcentes alternatives, l'acceleration eſt augmantée par la gravité. Ceux qui ont examiné le frottement par les experiences, ſe ſont bornés uniquement à en découvrir la quantité avant que les corps fuſſent mis en mouvement. Il ſeroit donc fort à ſouhaiter, qu'on fit auſſi des experiences, d'où l'on puiſſe conclure la quantité du frottement pendant que les corps ſont en mouvement : & je ne doute presque pas, qu'on ne la trouveroit conſiderablement moindre : puiſqu'on ſait, que pour mettre en mouvement une machine, il faut que les premiers efforts ſoient plus grands, que ceux qu'on empoye dans la ſuite pour continuer le mouvement.

Fig. 4. XIV. On ſe ſert ordinairement du plan incliné pour connoitre la quantité du frottement. Ayant mis le corps P ſur le plan AB, on éleve ſucceſsivement ce plan depuis ſa ſituation horizontale AC, jusqu'à ce que le corps P vient ſur le point de deſcendre : alors on meſure l'angle B de l'inclinaiſon du plan AB, ou les cotés du triangle rectangle ABC, d'où l'on tirera la valeur de la partie de la peſanteur qui agit ſelon la direction AB, qui ſera = P ſin B = $\frac{AC}{AB}$ P, & ce ſera à cette force que le frottement du corps P ſur le plan AB eſt égal. Or comme le frottement eſt proportionnel à la preſsion, dont le corps P eſt apprimé au plan, cette preſsion étant = P coſ B = $\frac{BC}{AC}$ P : on apprendra par cette experience que le frottement eſt à la preſsion, comme

ſin

ſin B à coſ B, ou comme A C à B C: cette raiſon du frottement à la preſsion ſera donc comme la tangente de l'angle B au ſinus total. Ce ſera donc la force du frottement, qu'on doit vaincre, avant que le corps P puiſſe être mis en mouvement.

XV. Mais pour connoitre ſi le frottement, que le corps éprouve pendant qu'il ſe meut actuellement, eſt le même ou non: on pourra determiner la quantité du frottement pour le cas du mouvement, par le moyen du même plan incliné. On n'aura qu'à élever le plan A B un peu plus que dans le cas precedent, afin que le corps gliſſe actuellement ſur ce plan en bas. Soit l'angle de l'inclinaiſon $B = \alpha$; & la preſsion du corps P ſur le plan ſera $= P \text{ coſ } \alpha$, & la force dont il eſt ſollicité ſuivant la direction A B ſera $= P \text{ ſin } \alpha$. Suppoſons que dans le mouvement le frottement ſoit à la preſsion comme μ à 1. & le frottement pour le cas que nous conſiderons ſera $= \mu P \text{ coſ } \alpha$; qui étant retranché de la force acceleratrice $P \text{ ſin } \alpha$, le corps ſera encore tiré ſelon la direction de ſon mouvement par la force $= P \text{ ſin } \alpha - \mu P \text{ coſ } \alpha = P (\text{ſin } \alpha - \mu \text{ coſ } \alpha)$.

XVI. Que le corps P ait commencé ſon mouvement depuis le repos en P, & qu'il ſoit parvenu aprés un tems $= t$ en M. Soit l'espace parcouru $A M = s$, & la viteſſe en M égale à celle, qu'un corps acquiert par la chûte de la hauteur $= v$, & les principes de Mecanique nous fourniſſent cette équation $P\,dv = P (\text{ſin } \alpha - \mu \text{ coſ } \alpha)\,ds$ ou en prenant l'integrale $v = (\text{ſin } \alpha - \mu \text{ coſ } \alpha)s$, de là l'element du tems ſera $dt = \frac{ds}{\sqrt{v}} = \frac{ds}{\sqrt{(\text{ſin } \alpha - \mu \text{ coſ } \alpha)s}}$, dont l'integrale eſt $t = \frac{2\sqrt{s}}{\sqrt{(\text{ſin } \alpha - \mu \text{ coſ } \alpha)}}$. Cette expreſsion, ſi l'on exprime l'espace parcouru s en milliemes parties du pieds de Rhin, donnera le tems t exprimé en minutes ſecondes, lorſqu'on diviſe cette expréſsion par 250; de ſorte que ſi le tems t eſt exprimé en ſecondes, & l'espace s en milliemes parties du pied de Rhin, on aura cette équation $t = \frac{\sqrt{s}}{125\sqrt{(\text{ſin } \alpha - \mu \text{ coſ } \alpha)}}$.

XVII. Suppoſons maintenant qu'on ait meſuré exactement le tems, que le corps P amis à deſcendre ſur le plan incliné A B, dont l'angle de l'elevation ſur l'horizon, ou l'angle B ſoit $= \alpha$. Soit la longueur du plan A B $= m$ parties milliemes du pied de Rhin : & le tems de la deſcente par ce plan $= n$ minutes ſécondes: & nous aurons cette équation :

$$n = \frac{\sqrt{m}}{125\sqrt{(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}}$$

ou $15625\, nn\, (\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = m$, d'où nous tirerons la valeur de la lettre μ :

$$\mu = \text{tang}\,\alpha - \frac{m}{15625\, nn\, \cos\alpha}$$

Donc moyennant une ſeule experience on ſera en état de determiner la raiſon du frottement à la preſsion, qui a été ſuppoſée comme μ à 1 pour le cas du mouvement du corps P.

XVIII. De cette formule il eſt d'abord clair, que ſi l'angle α eſt égal à celui-cy, où le corps P demeure encore en repos, alors la valeur du frottement ſera préciſement la même, qu'on aura trouvée pour le repos. Car puisque le corps dans ce cas ne reçoit aucun mouvement, il pourra être regardé, comme s'il faloit un tems infini, pour achever ſa deſcente. Dans ce cas donc le tems n deviendra infini, & la formule donnera $\mu = \text{tang}\,\alpha$, ou bien le frottement ſera à la preſsion comme la tangente de l'angle B au ſinus total, tout comme nous avons trouvé. Mais dés qu'on elevera le plan B A un peu davantage, le corps deſcendra actuellement, & ſi l'on obſerve le tems, qu'il emploie pour parcourir l'eſpace A B, notre formule fera voir la valeur de μ, qui conviendra au mouvement, & qui ſera, à ce qu'il paroit vraiſemblable, plus petite que dans le cas précedent du repos. On s'aſſurera encore mieux ſur cette matiere, ſi on donne au plan A B ſucceſsivement pluſieurs diverſes inclinaiſons, pour voir ſi chacune donnera la même valeur pour μ : car en cas qu'on en obtiendroit des valeurs differentes, on en devroit conclure, que le frottement ne ſeroit

roit pas le même pour tous les degrés de viteſſe, ce qui ne paroit pas pourtant probable.

XIX. En cas que la force du frottement fut plus petite dans le mouvement, que dans le repos, il en réſulteroit un phenomene bien étrange, qui meriteroit toute l'attention poſsible. Pour l'expoſer diſtinctement, ſoit α l'angle B du plan incliné, où le poid P ſe ſoutient encore à peine en repos: deſorte que pour peu qu'on augmente cet angle, le poids descendroit actuellement ſur ce plan incliné. Donc pour l'etat du repos la valeut du frottement ſera $\mu = \frac{\text{ſin } \alpha}{\text{coſ } \alpha}$: or ſuppoſant, que dés que le corps ſe meut actuellement, le frottement devint plus petit, ſoit pour l'etat du mouvement la valeur du frottement $\mu = \nu \text{ ſin } \alpha : \text{coſ } \alpha$, où ν marque une fraction plus petite que l'unité. A preſent qu'on augmente l'angle B, afin que ce cas du mouvement ait lieu, & ſoit maintenant l'angle $B = \varphi$: de ſorte qu'on n'a qu'à écrire dans la formule trouvée cy-deſſus φ pour α & $\frac{\nu \text{ ſin } \alpha}{\text{coſ } \alpha}$ pour μ, pour trouver le tems n', dans lequel le corps P deſcendra par le plan incliné AB, dont la longeur eſt de m milliemes parties du pied de Rhin, le tems ſera donc: $n = \frac{\sqrt{m}}{125\sqrt{(\text{ſin } \varphi - \nu \text{ ſin } \alpha \text{ coſ } \varphi : \text{coſ } \alpha)}}$. Suppoſons à cette heure que l'angle $B = \varphi$ ne ſurpaſſe qu' infiniment peu l'angle de repos α, & on devroit croire ſuivant la loi de continuité que le mouvement du corps ſeroit infiniment lent. Mais nous verrons avec ſurpriſe, que ce mouvement s'acheve ſubitement dans un tems fini, & même aſſez court. Car ſoit $\varphi = \alpha + \omega$, où ω marque une quantité infiniment petite, & il ſera $\text{ſin } \varphi = \text{ſin } \alpha + \omega \text{ coſ } \alpha$, & $\text{coſ } \varphi = \text{coſ } \alpha - \omega \text{ ſin } \alpha$. Ces valeurs etant ſubſtituées, on aura

$$n = \frac{\sqrt{m}}{125\sqrt{(\text{ſin } \alpha + \omega \text{ coſ } \alpha - \nu \text{ ſin } \alpha + \nu\omega \text{ ſin } \alpha \text{ tang } \alpha)}} = \frac{1}{125}\sqrt{\frac{m}{(1-\nu)\text{ ſin } \alpha}}.$$

XX. Pour mieux faire ſentir le phenomene, que cette formule renferme, ſoit la longueur du plan incliné AB exactement $= 15625$ milliemes parties du pied de Rhin, ou ſoit AB égale à la hauteur, par

laquelle un corps tombe dans une ſéconde : & le tems de la deſcente du corps P par ce plan incliné AB ſera de $n = \frac{1}{\sqrt{(1-\nu)\cdot \text{ſin } \alpha}}$ ſecondes; ſoit deplus comme Mr. *Bilfinger* a trouvé par ſes experiemes $\text{ſin } \alpha = \frac{1}{4}$, & ce tems ſeroit $n = \frac{2}{\sqrt{(1-\nu)}}$: & ſi le frottement devenoit dans le mouvement deux fois moindre, où qu'il fût $\nu = \frac{1}{2}$, ce tems ſeroit $n = 2\sqrt{2}$ ou presque de 3″. Il ne ſeroit pas donc poſſible de donner à ce plan AB une telle inclinaiſon, que le tems de la deſcente ſurpaſsât 3″. Car tandis que l'angle B eſt $= \alpha$, ou moindre, le corps P ne deſcend point du tout; & dés qu'on eleve tant ſoit peu le plan au delà, la deſcente devient ſubitement ſi rapide que le corps n'emploiera qu'à peu prés 3 ſecondes, à parcourir le plan incliné AB de plus de 15 pieds. Or il eſt clair, ſi l'on éleve le plan davantage, que le tems de la deſcente deviendra encore plus petit. L'experience ſemble plutot être favorable à ce paradoxe que contraire; car on remarquera aiſément, qu'il n'eſt pas poſsible de donner à un plan incliné une telle inclinaiſon, que la deſcente ſe fit auſsi lentement, qu'on voudra : car, ou le corps ne deſcendra point du tout, ou il deſcendra aſſez vitement. Mais pour mieux rëusſir dans ces experiences, il faut bien prendre garde, que le plan dont on ſe ſert ſoit partout également poli, afin que le frottement ſoit partout le même, car il n'y a aucun doute, que ſi le frottement étoit plus grand dans un endroit du plan, que dans un autre, on ne ſauroit tirer de l'experience aucune conſéquence bien aſſeurée.

SUR

SUR LA DIMINUTION DE LA RESISTENCE DU FROTTEMENT,

PAR M. EULER.

I.

L'Experience nous ayant fait voir que la force du frottement eſt toujours égale à une certaine partie de la preſſion, dont un corps eſt preſſé contre la ſurface, ſur laquelle il ſe meut, de ſorte que le frottement ne dépend ni de la gandeur de la baſe, dont le corps touche la ſurface, ni du degré de viteſſe, il n'eſt pas difficile de déterminer l'effet du frottement dans toutes ſortes de Machines par le moyen du calcul: vu que le frottement doit être regardé comme une force conſtante, qui eſt toujours directement contraire à la direction du mouvement, & qui agit dans une direction, qui paſſe par le plan de l'attouchement des corps qui ſe meuvent l'un ſur l'autre. Je me bornerai dans cette piece à rechercher l'effet du frottement dans les Machines, dont le mouvement eſt rotatoire, ou qui ſe fait autour d'un ou pluſieurs axes, & je ferai voir, combien la réſiſtance du frottement peut être diminuée par la diminution des axes, & leur mouvement ſur des roulettes: moyens, dont on s'eſt ſervi depuis quelque tems avec bien du ſuccés pour perfectionner les machines de cette eſpece. Il ſemblera d'abord étrange, que la réſiſtance du frottement, étant toujours égale à une partie determinée de la preſſion, puiſſe être diminuée ſans diminuer la preſſion, mais on en reconnoitra bientot la poſſibilité, lorſqu'on aura égard à la nature du mouvement rotatoire,

toire, par lequel le *momentum* de la force du frottement, duquel dépend la réſiſtence, peut-être diminué autant qu'on voudra.

Fig. 1. II. Je commencerai par conſiderer la rouë AIK, par laquelle paſſe le cylindre BLM, qui lui tient lieu d'axe, lequel eſt ſoutenu dans la cavité immobile EBF, de ſorte que cette rouë ne ſauroit tourner autour de ſon centre C, ſans que l'axe BLM ne ſe frotte ſur la ſurface EBF. La force de ce frottement ſera donc égale à une certaine partie de la preſſion, dont la machine s'appuye ſur la ſurface EBF, & cette preſſion ſera égale au poids de la rouë avec ſon axe, parce que tout ce poids eſt ſoutenu par l'appuy EFGH, que la figure ne répreſente que d'un coté; mais quoiqu'il ſe trouve de l'autre coté un ſemblable appuy, où le frottement eſt le même, il ſera permis de conſiderer enſemble ces deux frottements comme joints dans le point B. Soit donc le poids de la rouë avec ſon axe $= P$, qui étant égal à la preſſion totale ſur l'appuy en B, ſi nous ſuppoſons le frottement à la preſſion comme μ à 1, le frottement en B ſera $= \mu P$, ou la machine ne pourra être miſe en mouvement, ſans qu'on ſurmonte une force appliquée en B $= \mu P$, & dont la direction ſera ſuivant la tangente BQ contraire au mouvement du point P, qu'on veut produire. Soit AP la force, qui ſoit $= F$, appliquée à l'extremité de la rouë A ſuivant la tangente AP, que je ſuppoſe horizontale, afinque par l'action de cette force la preſſion de la rouë ſur l'appuy EF ne ſoit, ni augmentée, ni diminuée; & il eſt clair pour que la machine puiſſe être miſe en mouvement, que le *moment* de la force F. AC doit ſurpaſſer le *moment* du frottement μP. BC où il faut qu'il ſoit $F.AC > \mu P.BC$, ou $F > \mu P. \frac{BC}{AC}$.

III. De là il eſt clair, que tant que la force $AP = F$ ſera plus petite que $\mu P. \frac{BC}{AC}$, elle ne ſera pas capable de remuër la machine, & s'il y a $F = \mu P. \frac{BC}{AC}$, la force du frottement ſera tout à fait contrebalancée par la force F, de ſorte que pour peu qu'on l'augmente, la ma-

la machine ſoit miſe en mouvement. Donc, pour vaincre le frotte-
ment dans ce cas propoſé, il faut une force $F = \mu P. \frac{BC}{AC}$, qui ſoit
appliquée à la rouë AIK dans une direction horizontale AP, & en
même tems perpendiculaire au rayon CA. Si la valeur du coëfficient
μ eſt $= \frac{1}{4}$, comme on peut ſuppoſer probablement, on trouvera cette
force requiſe pour vaincre le frottement par cette analogie; Comme
le rayon AC de la rouë eſt au rayon de l'axe CB, ainſi ſera la quatriè-
me partie du poids de la rouë, à la force cherchée. Donc quoique le
frottement ſoit toujour égal à une partie déterminée de la preſſion, il
eſt pourtant poſſible, qu'il puiſſe être vaincu par une force auſſi peti-
te qu'on voudra: car on voit que plus on diminuë l'epaiſſeur de l'axe,
ou ſon rayon BC, plus petite deviendra auſſi la force requiſe pour
vaincre le frottement. Par là on comprendra aiſément combien il
eſt important dans toutes ſortes de machines de rendre les axes, au-
tour desquels ſe fait le mouvement, auſſi minces qu'il ſera poſſible.
Car dés qu'on pourroit reduire l'epaiſſeur des axes à la moitié, on
gagneroit déjà la moitié de force, dont on avoit beſoin auparavant
pour vaincre le frottement. Il eſt bien vrai que cette diminution
n'eſt pas dans notre pouvoir, & qu'il faut regler l'epaiſſeur des axes
ſur la charge, qu'ils doivent porter; mais il ſemble pourtant qu'on
pourroit encore conſiderablement gagner de ce coté-cy, dans la plus-
part des machines, où le frottement ſe réduit dans le mouvement
des axes.

IV. Mais il faut bien remarquer, que la force AP, quoique je
l'aye ſuppoſée horizontale, altére néantmoins la quantité du frotte-
ment, en changeant la preſſion de l'axe ſur le ſoutien ou l'appuy EBF.
Car par l'action de la force AP le point d'appuy ſera transporté de B
vers E & la preſſion deviendra égale à la force qui réſulte de la com-
poſition du poids de la rouë & de la force AP, quoique ce change-
ment ne ſoit pas pour la pluspart conſiderable. Cependant pour
mieux développer la maniere, dont la force mouvante entre à changer
le frottement, je conſiderai le cas où la force MP $=$ F agit ſous une
obliqui- Fig. 2.

obliquité quelconque. Pour cet effet ſoit ACB la ligne verticale, qui paſſe par le centre C de la rouë & de ſon axe, qui eſt ſoutenu par l'appuy immobile EF qui reçoit parfaitement une portion de l'axe. Soit CM le rayon auquel eſt appliquée la force MP = F à angle droit CMP ; & que P exprime le poids de la rouë avec l'axe. Pour trouver la force, qui réſulte de la compoſition de ces deux forces F & P enſemble, je les conſidere l'une & l'autre appliquées en C comme au centre du mouvement, & ayant tiré CK perpendiculaire à CM ſoit CB : CK = P : F: & la diagonale CL du parallelogramme CBLK exprimera la force, dont la rouë ſera ſollicitée & apprimée contre le ſoutien au point N. Qu'on nomme l'angle ACM = φ, & on trouvera la force CL = ν (PP + FF + 2 PF ſin φ) ; & pour l'obliquité de cette force ou l'angle BCN, on fera : comme CL eſt au ſinus de l'angle CBL ou au coſinus de φ, ainſi BL ou CK au ſinus de l'angle BCN, d'où l'on tirera ſin BCN = $\frac{BL \text{ coſ } \varphi}{CL}$ = $\frac{F \text{ coſ } \varphi}{\nu (PP + FF + 2PF \text{ ſin } \varphi)}$, & enſuite la tangente de l'angle BCN ſera = $\frac{F \text{ coſ } \varphi}{P + F \text{ ſin } \varphi}$.

V. Ces formules donneront lieu à pluſieurs reflexions : je commencerai par la recherche, de quelle grandeur doit être la force MP = F, afin qu'elle puiſſe contrebalancer le frottement. Puiſque le *moment* de cette force eſt = F. CM = F. CA & celui du frottement = μ. CB. ν (PP + FF + 2 PF ſin φ), parce que le frottement même au point N eſt à la preſſion qui vient d'être trouvée = ν (PP + FF + 2 PF ſin φ), comme μ à 1, la machine ne ſauroit être miſe en mouvement, à moins qu'il ne ſoit F. CA > μ CB ν (PP + FF + 2 PF ſin φ). Donc le frottement ſera contrebalancé, ſi ces deux *moments* ſeront egaux entr'eux. Soit CA = a, & CB = b, & prenant les quarrés nous aurons aa FF = $\mu\mu bb$ PP + $\mu\mu bb$ FF + 2 $\mu\mu bb$ PF ſin φ, d'où nous tirerons :

F =

$$F = \frac{\mu b P\ (\mu b \sin \Phi \pm V\ (aa - \mu\mu bb . \cos(\Phi^2))}{aa - \mu\mu bb}.$$

Ici l'ambiguité du ſigne radical ne peut avoir lieu, qu'entant que la valeur de F devient affirmative: car, puiſque nous avons ſuppoſé que le mouvément ſe fait dans le ſens NB, & que la direction de la force du frottement eſt NQ, cette ſuppoſition ne peut avoir lieu, que lorsque la valeur de F eſt affirmative. Au reſte on voit bien, que cette ambiguité reſulte du ſigne radical dans l'équation primitive, $a F = \mu b V (PP + FF + 2 PF \sin \Phi)$, qui malgré ſa nature ne reçoit dans notre cas, que le ſigne +. Car le mouvement de la machine, dés qu'elle en aura, ſera acceleré par le *moment* $a F - \mu b V (PP + FF + PF \sin \Phi)$, où l'on comprend aiſément, que le dernier membre ne peut jamais devenir affirmatif, puiſque le frottement ne ſauroit jamais augmenter l'effet de la force ſollicitante, mais il lui eſt plutot toujours contraire. Par conſéquent, toutes les fois qu'on aura quelque doute ſur l'ambiguité de la valeur de F, on n'aura qu'à l'introduire dans la formule $a F - \mu b V (PP + FF + 2 PF \sin \Phi)$ pour voir ſi elle devient égale à zero.

VI. Pour rendre cette formule plus ſimple ſoit $\frac{a}{\mu b} = \frac{AC}{\mu BC} = n$, de ſorte que dans l'hypotheſe $\mu = \frac{1}{4}$ on ait $n = \frac{4AC}{BC}$, & alors la force $MP = F$ requiſe pour vaincre le frottement ſera $F = \frac{\sin \Phi \pm V (nn - \cos(\Phi^2))}{nn - 1} P$, valeur qui réſulte de l'equation : $nF - V (P^2 + F^2 + 2 PF \sin \Phi) = 0$, d'où nous aurons pour le point d'appuy N, $\sin BCN = \frac{\cos \Phi}{n}$. Le cas le plus ordinaire eſt quand le rayon de la roüe AC eſt plus grand que le rayon de l'axe PC, & dans ce cas la valeur de la lettre n, étant plus grande que 4. & à plus forte raiſon celle de nn plus grande que 16, il y aura à peu prés $V (nn -$

$\cos\varphi^2) = n - \frac{\cos\varphi^2}{2n}$, d'où l'on voit que dans ce cas ce n'eſt que le ſigne + qui puiſſe avoir lieu: donc nous aurons $F = \frac{n + \sin\varphi - \frac{1}{2n}\cos\varphi^2}{nn-1} P$. De là il ſuit 1mo ſi l'angle $ACM = \varphi$ devient 0° ou 180°, on aura la force requiſe pour vaincre la réſiſtance du frottement $F = \frac{n - \frac{1}{2n}}{nn-1} P$ ou $F = (\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^3}) P$, & pour le point d'appuy N, $\sin BCN = \pm\frac{1}{n}$ de ſorte que cet angle ſera trés petit. 2do Si l'angle $ACM = \varphi = 90°$, nous aurons la force $F = \frac{n+1}{nn-1} P = \frac{1}{n-1} P = (\frac{1}{n} + \frac{1}{nn} + \frac{1}{n^3}) P$, & dans ce cas la force requiſe à vaincre le frottement ſera la plus grande, puisque toute la force eſt emploiée à augmenter la préſsion, & dans ce cas le point d'appuy ſera au point B. 3tio Si l'angle $ACM = \varphi = -90°$, ou que la force tire de l'autre coté en haut, on aura $F = \frac{n-1}{nn-1} P = \frac{1}{n+1} P = (\frac{1}{n} - \frac{1}{nn} + \frac{1}{n^3}) P$, & dans ce cas la force requiſe à vaincre le frottement ſera la plus petite. De là on voit qu'on gagnera toujours, ſi l'on applique les forces pour tourner les roüës, enſorte qu'elles ſoient dirigées en haut comme mp, & cet avantage ſera d'autant plus grand, plus l'axe de la roüe ſera epais.

VII. Le cas que nous venons de conſidérer aura lieu, quand même le rayon de l'axe BC deviendra égal à l'axe de la roüe AC, ou qu'il

Fig. 3. le ſurpaſſe, pourvûque la valeur de $n = \frac{4AC}{BC}$, ou plutot de ſon

quarré

quarré, ſoit encore conſidérablement plus grande que l'unité. Mais ſi nous ſuppoſons que le rayon de l'axe BC ſurpaſſe tant l'axe de la roüe CA, que la valeur de $n = \frac{4AC}{BC}$ n'excede l'unité que fort peu, les phenomenes qui en réſultent, doivent être dévelopés ſéparément. Car quoique ce cas ne trouve presque jamais lieu dans les machines, il merite pourtant toute l'attention, à cauſe des proprietés aſſez étranges, qui ſerviront à mieux connoitre les effets du frottement. Soit donc le rayon de l'axe CB, qui doit tourner dans la cavité de l'appuy EF, presque 4 fois plus grand que le rayon de la roüe CM, auquel eſt appliquée la force MP = F, de ſorte que la valeur de $nn - 1$ ſoit trés petite; ou ſuppoſant $n = 1 + \alpha$, que α ſoit une fraction trés petite, & nous aurons pour vaincre le frottement $F = \frac{\sin\varphi \pm V(\sin\varphi^2 + 2\alpha + \alpha\alpha)}{2\alpha + \alpha\alpha} P$, où il n'y a encore que le ſigne + qui puiſſe avoir lieu, & pour le point d'appui N, nous aurons $\sin BCN = \frac{\cos\varphi}{1+\alpha}$.

1mo Soit l'angle $ACM = \varphi = 0$ ou $180°$, & nous aurons $F = \frac{P}{V(2\alpha + \alpha\alpha)}$, & partant la force requiſe pour vaincre la réſiſtance du frottement, doit être extrémement grande, & l'angle BCN deviendra presque droit, de ſorte que dans ce cas la cavité du ſoutien EF doit embraſſer presque la moitié de l'axe.

2do Si l'angle $ACM = \varphi = 90°$, nous aurons $F = \frac{2+\alpha}{2\alpha+\alpha\alpha}$ $P = \frac{P}{\alpha}$ & partant dans ce cas la force requiſe à vaincre le frottement, doit être encore plus grande.

3tio Si l'angle $ACM = \varphi = -90°$, il y aura $F = \frac{\alpha}{2\alpha + \alpha\alpha}$ $P =$

$P = \frac{P}{2 + \alpha}$, & dans ce cas il ne faudra pour vaincre le frottement qu'une force qui vaudra environ la moitié du poids de la machine P, & dans ces deux derniers cas le point d'appuy ſera au point B.

VIII. De là il eſt clair, que ſi $\alpha = 0$, ou que le rayon de la roüe C A ſoit exactement au rayon de l'axe CB, comme la force du frottement eſt à la preſsion, ou que dans l'hypotheſe $\mu = \frac{1}{4}$ il ſoit CB $= 4$ CA: la force requiſe pour vaincre la réſiſtance du frottement deviendra infiniment grande, toutes les fois que la force MP eſt horizontale, ou dirigée en bas, comme la figure repréſente. Et partant dans ces cas il ne ſera pas même poſsible de remuër la machine, quelque force qu'on y emploie. Mais ſi l'on applique la force mp de l'autre coté, de ſorte qu'elle ſoit dirigée en haut, puiſqu'elle diminuera la preſsion de l'axe contre l'appuy, une force finie deviendra ſuffiſante à ſurmonter la réſiſtance du frottement. Pour cet effet nommant l'angle negatif A C$m = \varphi$, nous aurons la force $mp = F = \frac{V(\sin\varphi^2 + 2\alpha + \alpha\alpha) - \sin\varphi}{2\alpha + \alpha\alpha} P$, dont la valeur ſuppoſant $\alpha = 0$, ſera $F = \frac{P}{2\sin\varphi}$: ou la force requiſe $mp = F$ ſera à la moitié du poids de la machine ($\frac{1}{2}$P), comme le ſinus total eſt au ſinus de l'angle A Cm. Par conſéquent la plus petite force capable de vaincre la réſiſtence du frottement dans ce cas, ſera égale à la moitié du poids de la machine, & cette force doit être tellement appliquée à la roüe, qu'elle tire directement en haut. En voicy donc un cas qui nous fait voir l'important avantage, qu'on peut tirer de l'application de la même force à la roüe, quoiqu'elle agiſſe toujours perpendiculairement au rayon de la roüe: circonſtance qui ne ſeroit d'aucune conſéquence, s'il n'y avoit point de frottement. Il eſt encore bien remarquable que dans ce cas il peut arriver, que même une force infinie n'eſt pas capable de vaincre la réſiſtance du frottement.

IX. A plus forte raiſon on comprendra aiſement, que ſi le rayon de l'axe CB ſera encore plus grand par rapport au rayon de la roüe CA,

C A, cette machine ne pourra être miſe en mouvement par aucune force, dont la direction eſt, ou horizontale, ou qui tend en bas. Ce cas aura lieu ſi $n < 1$. ſoit donc $n = 1 - \alpha$, & α une fraction plus petite que 1; & que φ marque l'angle A C m pris de l'autre coté de la roüe, de ſorte que la force $mp = F$ ſoit dirigée en haut. Alors pour vaincre la réſiſtence du frottement il ſoudra une force

$$F = \frac{V(\text{ſi}\varphi^2 - 2\alpha + \alpha\alpha) - \text{ſin}\,\varphi}{-2\alpha + \alpha\alpha} P = \frac{\text{ſi}\varphi \pm V(\text{ſi}\varphi^2 - 2\alpha + \alpha\alpha)}{2\alpha - \alpha\alpha} P.$$

Donc afin que cette force ne devienne pas imaginaire, il faut qu'il ſoit $\text{ſin}\,\varphi > V(2\alpha - \alpha\alpha)$, ou $\text{ſin}\,\varphi > (1 - nn)$, car tant que $\text{ſin}\,\varphi$ ſera moindre que $V(2\alpha - \alpha\alpha)$, il ne ſera pas poſſible de vaincre la réſiſtence. Soit donc pour développer ce cas $\text{ſin}\,\varphi = V(2\alpha - \alpha\alpha)$ & $F = \frac{P}{V(2\alpha - \alpha\alpha)}$ & l'acceleration étant proportionelle à $(1 - \alpha)$ $F - \nu(PP + FF - 2PF\,\text{ſin}\,\varphi)$ deviendra $= \frac{(1-\alpha)P - PV(1 - 2\alpha + \alpha\alpha)}{V(2\alpha - \alpha\alpha)}$ $= 0$; ce ſera donc le premier cas qu'il ſera poſſible de vaincre la réſiſtence. Mais il faut bien remarquer, que dans ce cas le mouvement de la machine n'eſt pas encore poſſible, car quoiqu'on augmente la force F au delà de $\frac{P}{V(2\alpha - \alpha\alpha)}$, la valeur de la formule $nF - \nu(PP + FF - 2PF\,\text{ſin}\,\varphi)$ redevient negative, La raiſon en eſt, que dans ce cas la valeur de cette formule devient un *maximum*, & ce *maximum* même eſt $= 0$, d'où l'on voit que dans tous les autres cas, où F eſt ou plus grande, ou plus petite que $\frac{P}{V(2\alpha - \alpha\alpha)} = \frac{P}{V(1 - nn)}$, ſa valeur qui exprime l'acceleration, doit être moindre que 0, & partant négative. Cela arrive ſi $\text{ſin}\,\varphi = \nu(1 - nn)$, & $\text{coſ}\,\varphi = n$: or ſi l'angle φ eſt plus petit, la valeur de $nF - \nu(PP + FF - 2PF\,\text{ſi}\,\varphi)$ demeure toujours négative, quelque grande que ſoit la force F.

X. Or ſi $\text{ſin}\,\varphi > \nu(1 - nn)$, la plus grande valeur de la formule $nF - \nu(PP + FF - 2PF\,\text{ſin}\,\varphi)$ ſera affirmative, ce qui eſt

une marque, que dans ces cas la machine peut être miſe en mouvement, ſi la force F eſt priſe d'une grandeur convenable: car ſi cette force eſt trop petite, ou trop grande, le mouvement deviendra également impoſſible. Il y aura donc des limites, entre leſquels la force F doit être compriſe, afin qu'elle ſoit capable de mouvoir la machine, & ces limites ſont repreſentés par la double valeur de F, que nous venons de trouver, ſavoir remettant $1 - nn$ au lieu de $2\alpha - \alpha\alpha$

$$F = \frac{\sin \Phi \pm \sqrt{(\sin \Phi^2 - 1 + nn)}}{1 - nn} P.$$

& entre ces deux limites ſe trouve la valeu de la force F, qui produit la plus grande acceleration. Pour trouver cette valeur, ſuppoſons $\frac{F}{P} = z$, & l'acceleration ſera répreſentée par cette formule $nz - \sqrt{(1 + zz - 2z \sin \Phi)}$, & poſant ſon differentiel $= o$, nous aurons, $n = \frac{z - \sin \Phi}{\sqrt{(1 + zz - 2z \sin \Phi)}}$, & partant $\sqrt{(1 + zz - 2z \sin \Phi)} = \frac{z - \sin \Phi}{n}$: donc l'acceleration la plus grande ſera $= \frac{(nn-1) z \sin \Phi}{n}$.

Or l'équation precedente nous fournira $z = \sin \Phi \pm \frac{n \cos \Phi}{\sqrt{(1 - nn)}}$ où par rapport à l'ambiguité du ſigne $\pm$ il faut remarquer, que puiſque $\sqrt{(1 + zz - 2z \sin \Phi)} = \frac{z - \sin \Phi}{n}$, la valeur de $z - \sin \Phi$ doit toujours être affirmative, parce que le frottement qui eſt exprimé par la formule irrationelle $\sqrt{(1 + zz - 2z \sin \Phi)}$ ne ſauroit jamais devenir négatif. Donc il eſt clair que dans l'expreſſion $z = \sin \Phi \pm \frac{n \cos \Phi}{\sqrt{(1-nn)}}$ le ſeul ſigne $+$ peut avoir lieu, & que le terme $\frac{n \cos \Phi}{\sqrt{(1-nn)}}$ doit toujours être pris affirmatif, quoique même le $\cos \Phi$ dévienne negatif: ou l'angle ACm plus grand qu'un droit.

XI. Ayant

XI. Ayant donc trouvé pour le cas de la plus grande acceleration $z = \sin\Phi + \frac{n\cos\Phi}{\sqrt{(1-nn)}} = \frac{F}{P}$, la plus grande acceleration même fera comme $n\sin\Phi - \cos\Phi.\sqrt{(1-nn)}$; d'où l'on voit que cette plus grande valeur eſt négative, tant que $\sin\Phi < \sqrt{(1-nn)}$, & elle évanouït préciſément, ſi $\sin\Phi = \sqrt{(1-nn)}$: mais ſi $\sin\Phi > \sqrt{(1-nn)}$, alors la plus grande valeur de l'acceleration ſera affirmative; & elle deviendra encore la plus grande, ſi l'angle $ACm = \Phi$ ſera droit; car alors le mouvement de la machine ſera le plus vite, ſi l'on prend $F = P$, auquel cas la preſſion même, & partant le frottement, evanoüit. Or dans ce cas où $\Phi = 90°$, il y aura deux forces, qui contrebalanceront le frottement qui ſeront

$$F = \frac{1+n}{1-nn}P = \frac{P}{1-n} \quad \& \quad F = \frac{1-n}{1-nn}P = \frac{P}{1+n}$$

d'où il eſt evident, que ſi la force F eſt, ou plus petite que $\frac{P}{1+n}$, ou plus grande que $\frac{P}{1-n}$, la machine ne recevra aucun mouvement; & il ne ſera poſſible d'imprimer aucun mouvement à la machine, à moins que la force F ne ſoit compriſe entre ces limites $\frac{P}{1+n}$ & $\frac{P}{1-n}$. On ſera peut être d'abord ſurpris, comme il puiſſe arriver qu'une plus grande force ne ſoit pas capable de remuër la machine, pendant qu'une force plus petite, quoiqu'également appliquée, y eſt capable. Mais comme dans le cas $F = P$ la preſſion à l'apuy eſt tout à fait détruite, il eſt clair que lorsque $F > P$ la preſſion devenant negative, ſera transportée en haut, & pour cet effet il faut que l'axe de la machine entre dans un anneau, auquel l'axe ſera apprimé dans le ſommet b, car ſans cet anneau, qui ſert à retenir la machine, elle ſeroit enlevée en haut par la force $F > P$.

XII. Ces cas, que je viens de développer, ſont voir tres évidemment, combien les forces, qui agiſſent ſur la machine, contribuënt à augmenter, ou à diminuer la réſiſtence du frottement: & partant

tant, pour déterminer le frottement de chaque machine, il ne ſuffit pas d'avoir égard à la machine même, mais il faut auſſi bien conſidérer toutes les forces qui y ſont appliquées. Jusqu'ici je n'ai conſideré qu'une ſeule force dont la machine étoit ſollicitée: mais s'il y en a pluſieurs qui agiſſent enſemble, parmi lesquelles on doit comprendre la charge qui doit être levée, ou miſe en mouvement, la détermination du frottement n'en devient pas plus difficile. Soient appliquées à la machine qui tourne autour du centre C, ſur le ſoutien E F, des forces quelconques P R, Q S ſous quelque obliquité aux rayons C P & C Q que ce ſoit: & pour en déterminer l'effet ſur le frottement, on n'a qu'à conſidérer ces forces, comme ſi elles etoient appliquées immédiatement au centre C, afin de connoitre la preſſion ſur le ſoutien E F au point d'appuy. Qu'on décompoſe donc chaque force en deux, dont l'une ſoit horizontale, l'autre verticale, & la force P R ſe reſoudra en P p, P r & la force Q S en Q q, Q s: aux verticales on joigne le poids de la machine, & que C K repreſente la ſomme de toutes les forces verticales, & C I celle des forces horizontales. Enſuite la diagonale C I du parallelogramme rectangle C L L K, repréſentera la force totale, dont la machine ſera preſſée contre le ſoutien E F; & on trouvera le point d'appuy N, où cette force eſt appliquée. Donc ſi l'on nomme la ſomme de toutes les forces verticales avec le poids de la machine C K $=$ P, la ſomme des forces horizontales C I $=$ Q, la preſſion contre le ſoutien au point N ſera $= \nu(PP + QQ)$ & partant le frottement $= \mu\nu(PP + QQ)$. De plus, pour connoitre le point d'appuy N, la tangente de l'angle B C N ſera $= \frac{Q}{P}$.

Fig 4.

XIII. Aprés avoir déterminé en ſorte le frottement, qui réſulte, tant du poids de la machine, que des forces qui y agiſſent, on recherchera de la maniere ſuivante, ſi ces forces ſont capables de mettre la machine en mouvement. On accelerera les momens de toutes les forces, qui agiſſent ſur la machine, en multipliant chacune par ſa diſtance à l'axe C, autour duquel le mouvement ſe fait, & ayant égard ſi toutes ces forces agiſſent dans le même ſens ou non, on réduira

dans

tous ces momens dans une ſomme, en ajoutant ceux qui agiſſent dans le même ſens, & en ôtant ceux qui ſont contraires. Soit S ce moment total, qui tend à tourner la machine dans le ſens BN, & puisque le frottement, que nous venons de trouver $= \mu \sqrt{(PP + QQ)}$ eſt toujours contraire à la force mouvante, comme il eſt appliqué au point d'appuy N, ſon moment ſera $= \mu . CN . \sqrt{(PP + QQ)}$. Par conſéquent on n'aura qu'à regarder le moment S, qui réſulte des forces, & ce moment μ C N. $\sqrt{(P P . + Q Q)}$ du frottement: car tandis que S ſera plus petit que $\mu . CN . \sqrt{(PP + QQ)}$, ou même égal, la machine demeurera en repos; & le moment S ne ſera capable de produire aucun mouvement, à moins qu'il ne ſoit S plus grand que $\mu . CN . \sqrt{(PP + QQ)}$. Dans ce cas l'acceleration de la machine ſera produite par l'excés du moment S ſur le moment du frottement $\mu . CN . \sqrt{(PP + QQ)}$, & cet excés $S - \mu . CN . \sqrt{(PP + QQ)}$ étant diviſé par le moment de l'inertie de toute la machine, donnera l'acceleration du mouvement rotatoire. Cela s'entend, lorsque la machine commence à être miſe en mouvement: car auſſitot que la machine, & par conſéquent auſſi les forces, qui agiſſent ſur elle, ſont dejà en mouvement; puisque alors la preſſion ſur le ſoutien en eſt changée, le frottement ne ſera plus le même, & dans ce cas la recherche du mouvement actuel demandera des régles particulieres, qui ſeront le ſujet d'une diſſertation particuliere ſur cette matiere.

XIV. Je me borne donc ici uniquement à rechercher la force, dont on aura beſoin pour vaincre le frottement; puisque cette connoiſſance ſera déjà ſuffiſante pour juger de l'effet de la plupart des machines, dont on ſe ſert ordinairement. Et pour faire voir combien la réſiſtance du frottement peut être diminuée, ſi l'axe de la machine eſt ſoutenu de deux poulies, je m'en vais examiner le cas, où l'axe BC*b* d'une machine quelconque repoſe entre deux poulies BD, & *b d*, en ſorte que l'axe de la machine ne ſauroit tourner, ſans que ces poulies ne tournaſſent également, & qu'il n'arrivât aucun frottement dans les endroits B & *b*, où les poulies ſont touchées de l'axe. Or je ſuppoſe que chacune de ces poulies ait ſon pignon DEF & *def*, ſoutenu chacun par ſon appuy immobile GH & *g b*, ſur lequel cha- Fig. 5.

que poulie tourne, & que tout le frottement ſoit transporté par ce moyen aux endroits, où les pignons des poulies s'appuyent ſur leurs ſoutiens. Pour déterminer ce frottement ſoit premierement, *p* le poids de chaque poulie & P le poids de la machine même, qui doit être tournée autour de ſon axe C B *b*: & que A I repreſente la force = F appliquée perpendiculairement au rayon A C, qui ſoit capable de vaincre le frottement; laquelle devroit auſſi entrer dans la détermination du frottement. Or puiſqu'il eſt facile de prévoir, que cette force ſera trés petite, à cauſe de la grande diminution du frottement, il ſera permis de négliger cette force dans la recherche de la quantité du frottement. Soit donc C P la ligne verticale, qui repréſente le poids de la machine P, & ſuppoſant que les lignes C D & C *d* ſoient également inclinées ſur l'horizon, je nommerai les angles B C P = *b* C P = φ, & la force C P = P etant décompoſée ſelon les directions C B & C *b*, donnera pour chacune de ces forces ſelon C B & C *b* la force = $\frac{P}{2 \cos \varphi}$. Par conſéquent chaque poulie ſera preſſée de ce poids P de la machine contre ſon appuy dans la direction D E ou *de* par une force = $\frac{P}{2 \cos \varphi}$, qui à ce qu'on voit ſera d'autant plus grande, plus grand ſera l'angle B C *b*.

XV. Or chaque poulie étant ourre cela ſollicitée par ſon propre poids *p*, dans la direction D F & *df*; puiſque les angles E D F & *edf* ſont = φ, la force totale, dont chaque poulie eſt preſſée contre ſon appuy, ſera = $\sqrt{(pp + \frac{PP}{4 \cos \varphi^2} + Pp)}$, & partant le frottement, qu'il faut vaincre pour mettre chaque poulie en mouvement, ſera = $\mu \sqrt{(pp + Pp + \frac{PP}{4 \cos \varphi^2})}$, la lettre μ marquant la partie de la preſſion, à laquelle le frottement eſt égal, & dont la valeur eſt à peu prés = $\frac{1}{4}$. Maintenant il eſt clair que pour vaincre le frottement de la poulie D E F, il faut appliquer au point B une force = $\frac{\mu \, D \, F}{B \, D} \sqrt{(pp}$

$V(pp + Pp + \frac{PP}{4\cos\Phi^2})$, & une pareille force ſera requiſe au point *b* pour vaincre le frottement de l'autre poulie *def*, puisque je ſuppoſe ces deux poulies parfaitement égales entr'elles. Donc ſi la force $AI = F$ eſt capable de vaincre ces frottemens, il faût que ſon *moment* par rapport au centre de mouvement C ſoit égal aux *momens* de ces deux forces, que nous venons de trouver, & partant nous aurons $F.CA = \frac{2\mu DF.BC}{BD} V(pp + Pp + \frac{PP}{4\cos\Phi^2})$

ou $F = \mu \frac{BC}{AC} \cdot \frac{DF}{BD} V(4pp + 4Pp + \frac{PP}{\cos\Phi^2})$. De là il eſt donc clair que, pour vaincre la réſiſtance du frottement d'une telle machine, la force requiſe F ſera d'autant plus petite, premierement plus le rayon de l'axe de la machine CB ſera petit ; & enſuite plus l'axe des poulies ſera petit par raport à leur diametre ; & enfin plus l'angle BC *b* ſera petit. Donc, puisqu'il eſt dans notre pouvoir d'augmenter le rapport du rayon des poulies BD au rayon de leur axe DE trés conſiderablement, on comprendra aiſément, qu'on ſera en état de rendre par ce moyen la réſiſtance du frottement presque inſenſible. Pour cet effet on gagnera auſſi conſidérablement, ſi l'on approche ces deux poulies enſemble autant qu'il ſera poſſible.

XVI. Si l'on pouvoit faire les axes qui ſoutiennent la machines, auſſi minces qu'on voudroit, la diminution du frottement n'auroit aucune difficulté : mais puisque la groſſeur des axes doit être proportionnée à la charge qu'ils portent, les axes des poulies DF & *df* ſeront determinés par le poids de la machine. Car ſi nous ſuppoſons que le principal axe de la machine CB eſt déjà auſſi mince, que la charge le permet, puisque les forces des axes de differente épaiſſeur ſont à peu prés comme les quarrés de leurs rayons, cette régle nous fournira cette proportion $CB^2 : DF^2 = P : V(pp + Pp + \frac{PP}{4\cos\Phi^2})$.

Or nous pourrons ſans une erreur conſiderable négliger le poids des poulies *p* par rapport au poids de la machine même P, puisqu'une

trés petite épaiſſeur peut ſuffire pour les poulies : & partant nous aurons CB : DF $= \sqrt{2}\cos\varphi : 1$. & négligeant auſſi dans la formule trouvée p à l'égard de P, pour vaincre la réſiſtance du frottement, nous aurons : $F.CA = \frac{\mu P}{\cos\varphi} \cdot \frac{DF.BC}{BD} = \frac{\mu P.BC^2}{BD.\cos\varphi\sqrt{2\cos\varphi}}$

d'où il eſt clair que, plus on augmente la grandeur des poulies B D, plus auſſi ſera diminuée la réſiſtence du frottement. Or les poulies ne peuvent être élargies que jusqu' à ce qu'elles viennent ſe toucher; ou bien le rayon B D ne peut être plus grand que C D ſin φ : ſoit donc $BD = CD\sin\varphi$; ce qui donne $BD = \frac{BC\sin\varphi}{1-\sin\varphi}$: & nous aurons :

$$F.CA = \frac{\mu P.BC.(1-\sin\varphi)}{\sin\varphi\cos\varphi\sqrt{2\cos\varphi}} = \frac{\mu P.BC\sqrt{(1-\sin\varphi)}}{\sin\varphi\sqrt{2\cos\varphi(1+\sin\varphi)}}$$

or $\frac{\sqrt{(1-\sin\varphi)}}{\sqrt{2\cos\varphi}} = \frac{\sqrt{(1-\sin\varphi)}}{\sqrt{2(1-\sin\varphi^2)^{\frac{1}{2}}}} = \sqrt[4]{\frac{1-\sin\varphi}{4(1+\sin\varphi)}}$ par conſéquent $F.CA = \frac{\mu P.BC\sqrt[4]{(1-\sin\varphi)}}{\sin\varphi\sqrt[4]{4(1+\sin\varphi)^3}}$, d'où l'on voit que plus on augmente l'angle BCb, & que les poulies touchent la ligne verticale CP, plus auſſi la réſiſtence du frottement ſera diminuée, ſans que les axes, tant de la machine que des poulies, deviennent trop foibles.

RE-

RECHERCHES
SUR LES PLUS GRANDS ET PLUS PETITS QUI SE TROUVENT DANS LES ACTIONS DES FORCES,

PAR M. EULER.

I.

C'Eſt une verité dont on ne peut plus douter, que toutes les actions, qui ſont produites par les forces de la nature, renferment conſtamment un *maximum*, ou un *minimum*. C'eſt à dire, les forces étant données, l'effet qu'elles produiſent, ſera toujours tel, qu'une certaine quantité y devient un *maximum*, ou un *minimum*, de ſorte que cette prérogative n'auroit plus lieu, ſi l'effet avoit été tout autre. Cette conſidération nous conduit à reconnoitre un principe général de la nature, ſur lequel toutes ſes actions ſe réglent; & qui nous fait voir, que la nature ſe propoſe toujours un certain but, auquel elle tache de parvenir, en y employant les moindres dépenſes. On ſera tout à fait convaincu de la verité de ce principe général, par les excellentes réfléxions, que Monſieur de *Maupertuis*, notre illuſtre Préſident, a publiées ſur ce ſujet, tant dans les Mémoires de l'Academie Royale des Sciences de Paris, que dans nos Mémoires pour l'Année 1746, où il a demontré que dans le choc des Corps le mouvement ſe diſtribuë de maniere que la quantité d'action, que ſuppoſe un changement arrivé, eſt la

plus petite qu'il ſoit poſſible. De plus il a fait voir, que dans le repos les Corps, qui ſe tiennent en équilibre, doivent être tellement ſitués, que s'il leur arrivoit quelque petit mouvement, la quantité d'action ſeroit la moindre.

II. C'eſt donc ce principe de *la moindre quantité d'action*, auquel Mr. de *Maupertuis* réduit tous les *maxima*, ou *minima*, que la Nature obſerve dans toutes ſes productions: & la quantité d'action pourra toujours être répréſentée par une certaine formule algebrique, qui étant appliquée à l'effet produit réellement par la Nature, y obtient une valeur plus petite, qu'elle obtiendroit, s'il étoit arrivé tout autre effet. Ce principe aura donc également lieu dans la Mecanique & dans la Statique, c. à d. dans le mouvement, auſſi bien que dans tous les états d'équilibre, où les corps ſe peuvent trouver. Pour le mouvement, Mr. de *Maupertuis* vient de faire voir que ce principe de la *moindre quantité d'action* s'obſerve à la rigueur dans le choc des corps, tant élaſtiques que non élaſtiques: & moi, j'ai découvert une ſemblable loi dans le mouvement des corps, qui ſont attirés vers un, ou pluſieurs centres de forces, par des forces quelconques; ayant remarqué que le mouvement du corps, & la courbe qu'il décrit, renferme toujours cette proprieté, que nommant u ſa viteſſe dans un endroit quelconque, & ds l'elément de l'eſpace, cette formule $\int u\,ds$ ſera toujours un *minimum*. Ce ſera donc dans ce cas cette formule $\int u\,ds$, qui exprime ce que Mr. de *Maupertuis* nomme la quantité d'action. Ces deux cas du mouvement, dans leſquels nous voyons, que ce principe a lieu, ſont d'une ſi grande etenduë, qu'on y peut preſque réduire tous les mouvemens, qui arrivent au monde; & partant on n'aura plus la moindre raiſon de douter, que dans tous les mouvemens, par quelques forces qu'ils ſoient produits, il n'y ait toujours une certaine formule, dont la valeur ſoit la plus petite, & par laquelle ſera reoreſentée la quantité d'action.

III. L'uſage de ce principe eſt déjà depuis long tems reconnu dans la Statique, ou Dynamique, où il s'agit de l'équilibre des corps ſollicités par des forces quelconques, & c'eſt par ſon moyen, qu'on a donné des ſolutions de pluſieurs problemes de cette nature. Il a été

aiſé

aiſé de prévoir, qu'une chaine ſuſpenduë de ſes deux bouts devoit prendre une telle figure, afin que ſon centre de gravité foit le plus bas: ou que la diſtance de ce centre au centre de la terre, ou bien à un plan horizontal, ſoit *un minimum*. Si l'on nomme un élément quelconque de la chaine $= ds$, & ſa diſtance à un plan horizontal fixe pris à volonté $= x$, ce ſera la valeur de cette formule $\int x\,ds$, qui ſera un *minimum* pour la courbe de la chaine: & partant ce ſera la même formule $\int x\,ds$, qui répréſente la quantité d'action, qui doit être la plus petite. De même un ligue rempli d'un fluide prendra la figure, dont la capacité eſt la plus grande, afin que le fluide puiſſe descendre le plus bas qu'il eſt posſible: & Mr. de *Maupertuis* a fait voir l'uſage de ce grand principe en pluſieurs autres figures, que ces corps ſollicités par des forces quelconques ſont obliges de recevoir; où il a determiné la formule, qui répreſente en chaque cas la quantité d'action, qui y doit être un *minimum*. Mr. *Daniel Bernoulli* a auſſi remarqué, que la courbe d'une lame elaſtique renferme un tel *minimum*; car nommant un élément quelconque de cette courbe $= ds$, & le rayon de ſa développée dans cet endroit $= r$, il a obſervé que la valeur de cette formule $\int \frac{ds}{rr}$ devient un *minimum* dans la courbe élaſtique; & c'eſt de ce principe que j'ai déterminé la nature de cette courbe, dans mon traité ſur la methode *de Maximis & Minimis*, pour faire voir, que ce principe fournit la même courbe, qu'on a trouvée par la methode directe, dont on ſe ſert ordinairement.

IV. Par là on voit qu'il doit y avoir une double methode de reſoudre les problemes de Mecanique; l'une eſt la methode directe, qui eſt fondée ſur les loix de l'équilibre, ou du mouvement; mais l'autre eſt celle dont je viens de parler, où ſachant la formule, qui doit être un *maximum*, ou un *minimum*, la ſolution ſe fait par le moyen de la methode *de Maximis & minimis*. La premiere fournit la ſolution en déterminant l'effet par les cauſes efficientes; or l'autre a en vuë les cauſes finales, & en déduit l'effet: l'une & l'autre doit conduire à la même ſolution, & c'eſt cette harmonie, qui nous convainc

de

de la verité de la ſolution, quoique chaque methode doive être fondée ſur des principes indubitables. Mais il eſt ſouvent trés difficile de découvrir la formule, qui doit être un *maximum*, ou *minimum*, & par laquelle la quantité d'action eſt repréſentée. C'eſt une recherche qui n'appartient pas tant à la Mathematique, qu'à la Métaphyſique puiſqu'il s'agit de connoitre le but, que la nature ſe propoſe dans ſes opérations : & ce ſeroit porter cette ſcience à ſon plus haut degré de perfection, ſi l'on étoit en état d'aſſigner pour chaque effet que la nature produit, cette quantité d'action, qui y eſt la plus petite, & qu'on pût la deduire des premiers principes de notre connoiſſance. Mais je crois que nous ſommes encore bien éloignés de ce degré de perfection, & qu'il ſera presque impoſſible d'y arriver, à moins que nous ne découvrions pour un grand nombre de cas differens les formules, qui y deviennent, ou des *maxima*, ou *minima*. Or ſachant les ſolutions, que la methode directe nous fournit, il ne ſera pas difficile de deviner des formules, qui étant ſuppoſées des *maxima*, ou *minima*, conduiſent aux mêmes ſolutions. Par ce moyen nous connoîtrons *a poſteriori* ces formules qui expriment la quantité d'action, & alors il ne ſera plus ſi difficile d'en demontrer la verité par les principes connus de la Métaphyſique.

V. C'eſt dans cette vuë, que je me propoſe de développer quelques problêmes de Statique, qui roulent ſur la courbe, qu'un fil parfaitement flexible doit former, étant ſollicité par des forces quelconques. Je chercherai prémierement la ſolution de ces problêmes par la methode directe, c. à. d. par les loix connuës de l'équilibre ; enſuite je tacherai de découvrir les formules, qui dans ces courbes trouvées obtiennent, ou la plus grande, ou la plus petite valeur, & leſquelles par conſéquent pourront être regardées comme les expreſſions de la quantité d'action, dont la valeur ſera plus petite pour la courbe, qu'on aura trouvée par l'autre methode, qu'elle ſeroit, ſi le fil avoit pris tout autre courbure. J'ai choiſi cette eſpece de problêmes, puiſqu'on ſait déjà, que dans le cas où le fil n'eſt ſollicité que par la gravité, c'eſt la diſtance du centre de gravité du fil au centre de la terre, qui eſt un *minimum*. Or je rendrai ce problême plus

general,

général, en ſuppoſant que toutes les particules du fil ſoient ſollicitées par des forces quelconques, qui ſoient dirigées, ou vers un point fixe, ou vers pluſieurs, étant proportionelles à des fonctions quelconques de ces diſtances: de plus on pourra ſuppoſer que, tant la direction que la quantité de ces forces, dépende de la courbure même, comme cela arrive dans la courbe des *voiles*, & d'autres ſemblables, où la direction des forces eſt toujours perpendiculaire à la courbe même: & dans ces cas j'ai remarqué qu'il eſt beaucoup plus difficile de deviner la formule qui y eſt un *maximum*, ou *minimum*; & partant cette conſidération contribuëra d'autant plus à la connoiſſance des choſes, que la nature dans ſes opérations tache de ménager le plus qu'il eſt poſſible.

PROBLEME GÉNÉRAL.

VI. *Le fil parfaitement flexible* A Y M *étant ſollicité dans chacun de ſes élémens par des forces quelconques, trouver la courbe* A Y M, *à laquelle ce fil ſera réduit.* Fig. 1.

SOLUTION.

Rapportons la courbe A Y M, qu'il faut chercher à l'axe C P, & nommons une abſciſſe quelconque C P $= x$, l'appliquée P M $= y$, & la longitude du fil, qui y répond A Y M $= s$, de ſorte que $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, puiſque l'appliquée P M eſt ſuppoſée perpendiculaire à l'abſciſſe C P. Maintenant de quelque force que l'élément Mm $= ds$ ſoit ſollicité, elle pourra être réduite à deux forces, dont l'une tirera ſelon la direction M Q parallele à l'abſciſſe C P, l'autre ſelon la direction de l'appliquée M P. Soit donc la force M Q $=$ Qds, & la force M P $=$ Pds, puiſque chacune n'agiſſant, que ſur l'élément du fil Mm $= ds$ ſera infiniment petite. Afin que le fil demeure en équilibre, puiſqu'il eſt parfaitement fléxible, il faut que les momens de toutes les forces, dont la partie anterieure du fil A Y M eſt ſollicitée, par rapport au point M, ſe détruiſent mutuellement. Pour cet effet conſiderons une portion quelconque du fil A Y, que nous regarderons comme variable, pendant que le point M demeure fixe, &

partant les quantités x & y conſtantes ; ſuppoſition qui ne durera, que juſqu'à ce que nous aurons trouvé la ſomme de tous les momens des forces par rapport au point M. Soit donc notre nouvelle abſciſſe variable $CX = \varphi$, l'appliquée $XY = \psi$, & la courbe $AY = \omega$, de ſorte que $d\omega = \sqrt{(d\varphi^2 + d\psi^2)}$; & ſoit des forces, dont l'élément $Yy = d\omega$ eſt ſollicité, celle qui agit ſelon YZ parallele à $CX = q\,d\omega$, & l'autre qui agit ſelon $YX = p\,d\omega$. Or le moment de celle-là YZ par rapport au point M ſera $= q\,d\omega\,(PM - YX) = (y - \psi)\,q\,d\omega$, qui tendra à tourner le fil autour du point M, en ſorte que l'angle AMQ ſoit diminué : & le moment de l'autre force $YX = p\,d\omega$ ſera $= p\,d\omega\,(CP - CX) = (x - \varphi)\,p\,d\omega$, dont l'effet ſera contraire au précedent, & tendra à augmenter l'angle AMQ. Par conſéquent le moment de ces deux forces priſes enſemble ſera $= (y - \psi)\,q\,d\omega - (x - \varphi)\,p\,d\omega$, qui ſera employé à tourner le fil autour de M dans le ſens AQ. Donc le moment de toutes les forces qui agiſſent ſur la portion du fil AY, ſera l'integrale de cette expreſſion, & puiſque x & y ſont conſiderés comme conſtantes, ce moment qui reſulte de la portion AY ſera $= y\int q\,d\omega - \int \psi\,q\,d\omega - x\int p\,d\omega + \int \varphi p\,d\omega$. Approchons maintenant le point Y juſqu'au point M pour avoir le moment, qui réſulte de toutes les forces dont le fil AYM eſt ſollicité, & alors les quantités φ, ψ, q, p & $d\omega$ deviendront égales à x, y, Q, P & ds de ſorte que la ſomme de tous les momens des forces qui agiſſent ſur le fil AYM, pour le tourner autour de M dans le ſens AQ ſera $= y\int Q\,ds - \int y\,Q\,ds, - x\int P\,ds + \int x P\,ds$. Or afin que le fil étant parfaitement flexible, ne ſoit pas remué, il faut que la ſomme de ces momens évanouïſſe, d'où nous obtiendrons cette équation, qui exprimera la nature de la courbe cherchée AYM

$$y\int Q\,ds - \int y Q\,ds - x\int P\,ds + \int x P\,ds = 0.$$

Cette équation deviendra plus ſimple, en prenant ſa differentielle qui ſera :

$$dy\int Q\,ds - dx\int P\,ds = 0.$$

où $\int Q\,ds$ exprime la ſomme de toutes les forces, dont le fil AM eſt ſollicité ſuivant la direction de l'abſciſſe PC, & $\int P\,ds$ la ſomme de toutes

toutes les forces, dont le fil AM eſt ſollicité ſuivant la direction des appliquées PM. C. Q. F. T.

VII. Si le fil eſt arrêté au point A, ou tenu fixe par une force quelconque, on réſoudra auſſi celle-cy ſuivant les directions AB & AC. Soit la force AB = B, & la force AC = C; & celle-là doit être compriſe dans $\int Q\,ds$, & celle-cy dans $\int P\,ds$. Donc, ſi ces expreſſions $\int Q\,ds$ & $\int P\,ds$, ne comprennent que les forces, qui agiſſent ſur les élémens du fil, on y doit ajouter ces forces finies B & C, & au lieu de $\int Q\,ds$ nous aurons $B + \int Q\,ds$, & $C + \int P\,ds$ au lieu de $\int P\,ds$; ce qui donnera pour la courbe cette équation differentielle:

$$dy\,(B + \int Q\,ds) - dx\,(C + \int P\,ds) = o.$$

dont l'integrale ſera exprimée par:

$$\int dy\,(B + \int Q\,ds) - \int dx\,(C + \int P\,ds) = \text{Conſt.}$$

Or puisque $\int dy\,(B + \int Q\,ds)$ exprime la ſomme des momens, qui réſultent des forces ſelon la direction des abſciſſes, & $\int dx\,(C + \int P\,ds)$ la ſomme des momens, qui réſultent des forces ſelon la direction des appliquées, comme ces momens ſe doivent détruire mutuellement, il eſt évident que la conſtante doit être = o, pourvu que les integrales s'étendent par tout le fil.

VIII. Cependant, puisque les integrales $\int Q\,ds$ & $\int P\,ds$ peuvent déjà renfermer les conſtantes B & C, on les pourra omettre ſans faute, de ſorte que la nature de la courbe du fil ſera exprimée, ou par cette équation integrale $\int dy \int Q\,ds - \int dx \int P\,ds = \text{Conſt.}$ ou par cette équation differentielle $dy \int Q\,ds - dx \int P\,ds = o$. Laquelle nous fournit cette analogie:

$$dy : dx = \int P\,ds : \int Q\,ds.$$

D'où nous tirons cette régle générale pour trouver la courbure d'un fil parfaitement fléxible, étant ſollicité par des forces quelconques. C'eſt qu'ayant tiré l'appliquée infiniment proche *pm*, & M*n* parallele à l'abſciſſe, il y aura toujours: *le differentiel de l'appliquée mn au differentiel de l'abſciſſe* Mn = Pp, *comme la ſomme de toutes les forces, qui agiſſent dans la direction des appliquées, eſt à la ſomme de toutes les forces, qui agiſſent dans la direction des abſciſſes.*

IX. Si le fil AYM n'eſt pas parfaitement fléxible, mais qu'il ſoit élaſtique, ou qu'il ait quelque roideur qui réſiſte à l'inflexion, il ne ſera pas difficile auſſi dans ce cas de déterminer la courbe, que ce fil prendra, quoiqu'il ſoit outre cela ſollicité par des forces quelconques, comme je viens de ſuppoſer. Car la force, ou plutot le moment, qui eſt requis pour courber le fil au point M, ſera proportionnel à la courbure dans ce point, ou réciproquement comme le rayon de la développée au point M. Suppoſant donc ce rayon $= r$, de ſorte que $r = \frac{ds^3}{dx\,ddy}$, en ſuppoſant dx conſtant, ou $r = \frac{ds\,dx}{ddy}$ en ſuppoſant ds conſtant, la force de roideur ſera comme $\frac{1}{r}$, ſi la roideur eſt partout égale. Or ſi l'épaiſſeur du fil eſt ſuppoſée variable, la force de roideur pourra être exprimée par $\frac{S}{r}$, ou S eſt une fonction proportionnelle à l'épaiſſeur du fil au point M. Cette force de roideur tendant à remettre le fil dans ſa ſituation droite, que je ſuppoſe lui être naturelle, elle doit être contrebalancée par la ſomme des momens de toutes les forces dont le fil eſt ſollicité. Or la ſomme de ces momens a été trouvée $= y\int Q\,ds - \int y Q\,ds - x\int P\,ds + \int x P\,ds$ ou bien $= \int dy \int Q\,ds - \int dx \int P\,ds$, dont la direction étant contraire à la force de roideur $\frac{S}{r}$, il faut que ces deux expreſſions ſoyent égales entr'elles. De là nous obtiendrons pour la courbe de ce fil roide, ou élaſtique, cette équation :

$$\frac{S}{r} = \int dy \int Q\,ds - \int dx \int P\,ds$$

qui ſe réduit à celle, que nous avons trouvée dans la ſolution du probleme, ſi la roideur S évanouït.

X. En voicy donc la ſolution du problême le plus général, par laquelle on eſt en état de déterminer la courbe, que forme un fil, ou parfaitement fléxible, ou élaſtique, dont tous les points ſont ſollicités

tités par des forces quelconques. Mais je remarque d'abord, que cette ſolution générale ne ſe peut déduire par la methode *de maximis & minimis:* car quoique cette methode ſoit propre à fournir des ſolutions générales, il faut pourtant qu'on ſache, desquelles des variables ſoyent compoſées les fonctions, qui entrent dans la formule qui doit être, ou un *maximum*, ou un *minimum*. Donc, à moins qu'on ne détermine la nature des fonctions P & Q, qui expriment les forces, dont chaque élément M*m* du fil eſt ſollicité, il eſt impoſſible de découvrir une formule, qui étant ſuppoſée un *maximum*, ou un *minimum*, produiſe la même courbe. Je m'en vais donc appliquer cette ſolution générale à des cas particuliers, en déterminant les fonctions P & Q, ou par les abſciſſes x, ou par les appliquées y, ou par une expreſſion, qui contienne toutes les deux d'une maniere, dont la compoſition ſoit connuë. Pour cet effet je ferai l'application de la ſolution générale trouvée aux problemes ſuivants: & je tacherai de joindre à la ſolution de chacun la formule, qui étant ſuppoſée un *maximum*, ou un *minimum*, conduiſe à la même courbe: afin qu'on en puiſſe connoitre pour chaque cas l'expreſſion, qui repréſente la quantité d'action.

PROBLEME I.

XI. *Le fil parfaitement flexible* AYM *étant dans chaque point* M *ſollicité ſelon la direction des appliquées* MP *par des forces, qui ſoient exprimées par une fonction quelconque de ces appliquées: trouver la courbe* AYM *que ce fil formera.*

SOLUTION.

Ayant nommé comme auparavant l'abſciſſe CP $= x$, l'appliquée PM $= y$, & l'arc AYM $= s$, ſoit Y la fonction de l'appliquée y, à laquelle la force dont le fil au point M eſt tiré ſuivant la direction MP, eſt ſuppoſée proportionnelle, de ſorte que la force qui agit ſur l'élement M$m = ds$ ſoit $=$ Y ds, laquelle ayant été ſuppoſée dans la ſolution générale $=$ Pds, nous aurons P $=$ Y & Q $= o$. Et partant puisque le fil eſt ſuppoſé parfaitement flexible, la nature de la

courbe ſera exprimée par cette équation, $B\,dy - dx \int Y\,ds = o$. Car quoique $Q = o$, l'integral $\int Q\,ds$ n'evanouïra pas, mais il ſera égale à une conſtante B, qui exprime la force A B appliquée au bout du fil A: or l'autre force A C = C ſera renfermée dans l'expréſſion integrale $\int Y\,ds$. Pour reduire cette équation, & pour la ramener à la forme, qui ſe trouve dans la methode de *maximis* & *minimis*, je ſuppoſe $dy = p\,dx$, pour avoir $ds = dx\sqrt{(1+pp)}$, & l'equation trouvée ſe changera en cette forme $Bp = \int Y\,dx\sqrt{(1+pp)}$, dont le differentiel eſt $B\,dp = Y\,dx\sqrt{(1+pp)}$, ou $B\,p\,dp = Y\cdot dy\sqrt{(1+pp)}$ à cauſe de $dx = \frac{dy}{p}$, d'où nous tirons $\frac{B\,p\,dp}{\sqrt{(1+pp)}} = Y\,dy$, & prenant les integrales $\int Y\,dy = B\sqrt{(1+pp)}$, la conſtante qu'on pourroit ajouter, étant compriſe dans l'integrale $\int Y\,dy$: & cette équation $\int Y\,dy = B\sqrt{(1+pp)}$ ayant ſes deux variables p & y ſeparées, peut ſuffire pour la conſtruction de la courbe, que nous cherchons.

XII. Pour trouver cette même courbe par la methode de *Maximis* & *Minimis*, il faut ſe rappeller cette ſolution générale, que j'ai donnée dans mon traité ſur cette matiere. Ayant poſé l'abſciſſe $= x$, l'appliquée $= y$, & pour les differentiels $dy = p\,dx$; $dp = q\,dx$; $dq = r\,dx$ &c. Soit $\int Z\,dx$ la formule, dont la valeur doit être un *maximum*, ou *minimum*, où Z marque une fonction quelconque des quantités x, y, p, q, r, &c. de ſorte que ſon differentiel ait une telle forme:

$$dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq + R\,dr \text{ \&c.}$$

alors j'ai démontré, que la courbe, où $\int Z\,dx$ eſt un *maximum*, ou *minimum*, ſera exprimée par cette équation, ſuppoſant l'element dx conſtant.

$$o = N - \frac{dP}{dx} + \frac{d\,dQ}{dx^2} - \frac{d^3\,R}{dx^3} + \text{\&c.}$$

XIII. Comme cette équation eſt encore trop generale pour notre cas, ſoit Z ſeulement une fonction de y & p, de ſorte que $dZ = N\,dy + P\,dp$, & la formule $\int Z\,dx$ ſera un *maximum*, ou *minimum*, dans la courbe exprimée par cette équation: $o = N - \frac{dP}{dx}$ ou $N\,dx = dP$,

dP, qui etant multipliée par p, à cauſe de $pdx = dy$, donne $N dy = pdP$. Or nous avons $dZ = N dy + P dp$, & partant il y aura $dZ = pdP + P dp$, dont l'integrale eſt : $Z = Pp +$ Conſt. Nous voilà donc réduits à trouver une telle fonction Z de y & de p, que ſuppoſant $dZ = N dy + P dp$, l'équation $Z = P p +$ Conſt. devienne la même, que nous avons trouvée, ſavoir $\int Y dy = B \sqrt{(1 + pp)}$, ou comme B ſera égale à la conſtante de la premiere équation, que $Z - Pp$ devienne $= \frac{\int Y dy}{\sqrt{(1+pp)}}$, ou $\int Y dy = (Z - Pp)\sqrt{(1+pp)}$.

XIV. Pour reſoudre cette équation, ou pour en tirer la valeur de Z, puisque $P = \frac{Z}{p} - \frac{\int Y dy}{p\sqrt{(1+pp)}}$, je remets cette valeur dans l'equation $dZ = N dy + P dp$, & j'aurai $dZ = N dy + \frac{Z dp}{p} - \frac{dp \int Y dy}{p\sqrt{(1+pp)}}$, ou bien $\frac{p dZ - Z dp}{pp} = \frac{N dy}{p} - \frac{dp \int Y dy}{pp\sqrt{(1+pp)}}$, où le premier membre étant integrable, ayant pour integrale $\frac{Z}{p}$, il faut que le ſecond membre ſoit auſſi integrable. Or ſon integrale tirée de la partie $\frac{-dp \int Y dy}{pp\sqrt{(1+pp)}}$ en ſuppoſant y conſtant eſt $= \frac{\int Y dy}{p}\sqrt{(1+pp)} +$ funct. y & partant nous aurons $\frac{Z}{p} = \frac{\int Y dy}{p}\sqrt{(1+pp)} +$ funct. y : ou $Z = \int Y dy . \sqrt{(1+pp)} + p$ funct. y. Par conſequent la courbe du fil ſe trouvera, ſi l'on cherche parmi toutes les courbe celle, dans laquelle $\int Z dx$ c. à. d $\int dx \sqrt{(1+pp)} . \int Y dy + \int p dx .$ funct. y, ſera un *maximum*, ou un *minimum* ; & l'expreſſion, qui repréſente la quantité d'action ſera $\int ds \int Y dy + \int dy$ funct. y. Ou puisque $\int dy$ funct. y eſt une fonction

ction de y, qui demeure la même pour toutes les courbes, qui paſſent par les mêmes points A & M, la courbure du fil AYM aura cette proprieté, que parmi toutes les courbes qui paſſent par les points A & M, il y aura cette expreſſion $\int ds \int Y\,dy$ un minimum: d'où je tire le Theoreme ſuivant.

THEOREME I.

XV. *Le fil* AYM, *comme nous avons ſuppoſé dans le probleme précedent, étant dans chaque point* M *ſollicité ſelon la direction des appliquees* MP *par des forces, qui ſont exprimées par une fonction quelconque* Y *des appliquées* PM $=$ y, *prendra une telle figure* AYM, *que parmi toutes les autres courbes poſſibles, il y aura cette expreſſion* $\int ds \int Y\,dy$ *un minimum.*

On trouvera donc cette courbe, ſi on cherche parmi toutes les courbes, qui ſont compriſes entre les mêmes termes, celle où la valeur de cette expreſſion $\int ds \int Y\,dy$ devient un *minimum.* Il n'eſt pas néceſſaire, comme la nature de la queſtion ſemble de demander, que cette proprieté ne regarde que les courbes de la même longueur; car il revient au même, ſoit qu'on ſuppoſe la formule $\int ds \int Y\,dy$ parmi toutes les courbes poſſibles, ou ſeulement parmi les iſoperimetres: Car pour ce dernier cas, on devroit, comme j'ai demontré dans mon traité ſur cette matiere, rendre cette formule $\int ds \int Y\,dy + \alpha \int ds$ un *minimum.* Or cette conſtante α pouvant être compriſe dans l'integral $\int Y\,dy$, on pourra negliger ce terme $\alpha \int ds$, & alors il ne reſte à rendre un *minimum*, que la formule trouvée $\int ds \int Y\,dy$.

PROBLEME II.

XVI. *Le fil parfaitement flexible* AYM *étant ſollicité dans chaque point* M *ſuivant les directions* MP, MQ *par des forces, dont celle-là, qui agit ſelon* MP, *ſoit exprimée par une fonction de l'appliquée* MP $=$ y, *& celle-cy, qui agit ſelon* MQ *par une fonction de l'abſciſſe* CP $=$ x: *trouver la figure du fil* AYM.

SOLU-

SOLUTION.

Retenant toujours les mêmes denominations C P $=x$, P M $=y$, l'arc A Y M $=s$, soit Y la fonction de y, qui exprime la force, qui agit selon M P, & X la fonction de x, qui exprime la force M Q. Nous n'avons donc que mettre dans la solution générale, que X & Y au lieu de Q & P, pour avoir l'equation suivante, qui exprimera la nature de la courbe cherchée A Y M

$$dy\,(B+\int X\,ds)-dx\,(C+\int Y\,ds)=0$$

ou, puisque les constantes B & C peuvent etre comprises dans les formules integrales, nous aurons:

$$dy\int X\,ds=dx\int Y\,ds.$$

Supposons $dy=p\,dx$, pour avoir $ds=dx\sqrt{(1+pp)}$, & l'équation trouvée sera $p\int X\,dx\sqrt{(1+pp)}=\int Y\,dx\sqrt{(1+pp)}$ qui etant differentiée donne

$$dp\int X\,dx\sqrt{(1+pp)}+Xp\,dx\sqrt{(1+pp)}=Y\,dx\sqrt{(1+pp)}$$

Soit de plus $dp=q\,dx$, & apres avoir differentié cette équation:

$$\int X\,dx\sqrt{(1+pp)}+\frac{Xp\sqrt{(1+pp)}}{q}=\frac{Y\sqrt{(1+pp)}}{q}$$

nous obtiendrons mettant partout $q\,dx$ au lieu de dp

$$X\,dx\sqrt{(1+pp)}+X\,dx\sqrt{(1+pp)}+\frac{Xpp\,dx}{\sqrt{(1+pp)}}+\frac{p\,dX\sqrt{(1+pp)}}{q}-\frac{Xp\,dq\sqrt{(1+pp)}}{qq}$$

$$=\frac{Y\,p\,dx}{\sqrt{(1+pp)}}+\frac{dY\sqrt{(1+pp)}}{q}-\frac{Y\,dq\sqrt{(1+pp)}}{qq}$$ qui se réduit à

$$2X\,dx+\frac{Xpp\,dx}{1+pp}+\frac{p\,dX}{q}-\frac{Xp\,dq}{qq}=\frac{Yp\,dx}{1+pp}+\frac{dY}{q}-\frac{Y\,dq}{qq}$$

Multiplions cette equation par $1+pp$ pour avoir

$$\frac{(dY-p\,dX)}{q}(1+pp)-\frac{dq}{qq}(Y-pX)(1+pp)+Yp\,dx-2X\,dx\,(1+pp)-Xpp\,dx=0$$

& pour en trouver l'integrale, s'il y en a, je suppose;

$$\frac{(Y-pX)\,(1+pp)}{q}=Z$$ ce qui étant differentié donne

$$\frac{(dY-p\,dX)(1+pp)}{q}-\frac{dq}{qq}(Y-pX)(1+pp)+2p\,dx\,(Y-pX)-X\,dx\,(1+pp)=dZ$$

ayant mis partout $dp = q\,dx$, Retranchons de cette équation la precedente, & il nous reſtera :

$dZ = Y\,p\,dx - 2\,X\,pp\,dx + X\,dx\,(1+pp) + X\,p\,p\,dx$

ou bien $dZ = Y\,p\,dx + X\,dx$. Or puisque $dy = p\,dx$, nous aurons $dZ = X\,dx + Y\,dy$, laquelle expreſſion, parceque X eſt fonction de x & Y fonction de y, ſera integrable & donnera

$$Z = \int X\,dx + \int Y\,dy$$

de ſorte que notre equation integrale cherchée ſera

$$\frac{(Y - pX)\,(1+pp)}{q} = \int X\,dx + \int Y\,dy$$

ou à cauſe de $q = \frac{dp}{dx}$ & $dy = p\,dx$:

$$\frac{dp}{1+pp} = \frac{Y\,dx - X\,dy}{\int X\,dx + \int Y\,dy}$$

Il ne paroit pas que cette équation ſe puiſſe encore integrer ; auſſi n'eſt ce-pas mon deſſein de conſtruire ces courbes, ou d'en rechercher la nature : mon but n'etant ici, que de trouver les formules, qui etant ſuppoſées devenir un *maximum*, ou un *minimum*, fourniſſent les mêmes courbes que nous trouvons par les principes de mechanique.

XVII. Soit $\int Z\,dx$ cette formule, qui étant ſuppoſée un *maximum*, ou *minimum*, produiſe la courbe, que nous venons de trouver, ou l'equation :

$$\frac{dp}{1+pp} = \frac{Y\,dx - X\,dy}{\int X\,dx + \int Y\,dy}$$

& ſoit $dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dp$, voiant, que Z doit etre une fonction des quantités x, y, & p. Et alors la courbe cherchée ſera exprimée par cette équation : $o = N - \frac{dP}{dx}$, ou $o = N\,dx - dP$, équation qui doit être la même, que $\frac{dp}{1+pp} = \frac{Y\,dx - X\,dy}{\int X\,dx + \int Y\,dy}$.

Ici je remarque, que dans l'analyſe il nous manque encore une methode, par laquelle on puiſſe decouvrir la formule $\int Z\,dx$, ſachant l'équation, à laquelle elle doit conduire : mais aprés quelques eſſais on trouve-

ra, que l'on n'a qu'à mettre $Z = (\int X dx + \int Y dy) \sqrt{(1+pp)}$. Car alors on aura $M = X\sqrt{(1+pp)}$; $N = Y\sqrt{(1+pp)}$ & $P = \frac{p(\int X dx + \int Y dy)}{\sqrt{(1+pp)}}$, d'où l'on tire

$$dP = \frac{dp(\int X dx + \int Y dy)}{(1+pp)\sqrt{(1+pp)}} + \frac{X p dx + Y p dy}{\sqrt{(1+pp)}}$$

& partant l'équation $N dx = dP$ donnera

$$Y dx \sqrt{(1+pp)} = \frac{dp(\int X dx + \int Y dy)}{(1+pp)\sqrt{(1+pp)}} + \frac{X p dx + Y p dy}{\sqrt{(1+pp)}}$$

qui etant multipliée par $\sqrt{(1+pp)}$ produira :

$$Y dx + Y pp dx - X p dx - Y p dy = \frac{dp(\int X dx + \int Y dy)}{1+pp}$$

Or puisque $p dx = dy$, il lera $Y\ pp dx - Y p dy = o$; & par conſéquent on aura :

$$Y dx - X dy = \frac{dp(\int X dx + \int Y dy)}{1+pp} \text{ ou } \frac{dp}{1+pp} = \frac{Y dx - X dy}{\int X dx + \int Y dy}$$

qui eſt la même équation, que nous avons trouvée pour la courbure du fil A Y M.

THEOREME II.

XVIII. *Le fil* A Y M *étant ſollicité, comme on a ſuppoſé dans le probleme II. dans chaque point* M *par deux forces, l'une ſelon la direction des abſciſſes* M Q *qui ſoit égale à une fonction* X *de l'abſciſſe* C P = x; *& l'autre ſelon la direction des appliquées* M P, *qui ſoit égale à une fonction* Y *de l'appliquée* P M = y; *alors ce fil prendra une telle figure* A Y M, *dans laquelle cette expreſſion* $\int ds (\int X dx + \int Y dy)$ *ſera un* minimum.

Le Theoreme precedent nous a déjà fait voir, que ſi le fil n'etoit ſollicité que par les forces Y, alors cette formule $\int dx \int Y dy$ ſeroit un *minimum*: & par la même raiſon, ſi le fil étoit ſollicité par les ſeules forces X, alors cette formule $\int ds \int X dx$ deviendroit un *minimum*. A préſent nous voyons, que ſi ces deux differentes forces agiſſent enſemble, alors auſſi la ſomme de ces deux formules $\int ds (\int X dx + \int Y dy)$ y deviendra un *minimum*, ce qui ſera à préſent d'autant plus aiſé de démontrer *a priori*. Nous avons ſuppoſé les forces X &

V contraires aux accroiſſemens des coordonnées x & y; car dès que le point M obeïroit à ces forces, tant l'abſciſſe x que l'appliquée y en deviendroit plus petite. D'où il eſt clair, que ſi ces forces avoient des directions oppoſées, alors la formule $-\int ds\,(\int X\,dx + \int V\,dy)$ deviendroit un *minimum*, & partant celle-cy $+\int ds\,(\int X\,dx + \int V\,dy)$ un *maximum:* ce qui ſert à faire voir l'étroite liaiſon entre les *maxima* & *minima*, de ſorte qu'on n'a qu'à changer le ſigne, pour changer le *minimum* dans un *maximum*, & réciproquement.

Probleme III.

XIX. *Si l'epaiſſeur du fil* A V M *n'eſt pas la même partout, mais qu'elle varie ſelon une loi quelconque, & que ce fil ſoit ſollicité en chaque point* M *ſuivant la direction* M Q *par une force exprimée par une fonction quelconque de l'abſciſſe* C P $= x$, *trouver la figure que ce fil prendra.*

Solution.

Soit X la fonction, à laquelle la force, qui tire l'élement M m ſuivant M Q, eſt proportionelle; & cette force X doit etre regardée comme une force acceleratrice, qui etant multipliée par la maſſe de l'élément M m, donnera la veritable force motrice. Or le fil étant ſuppoſé d'une épaiſſeur inégale, la maſſe de l'élément M m, n'e ſera plus exprimée par ds, ni par conſéquent la force par X ds. Soit donc $\int S\,ds$ la maſſe du fil entier A V M dont la longueur $= s$, & la maſſe de l'élément M m ſera $= S\,ds$, où S marque une fonction quelconque de s, d'où depend l'epaiſſeur du fil. Donc la force qui tire cet élément M m, ſuivant la direction des abſciſſes M Q, ſera $= X\,S\,ds$, qui étant miſe pour Q ds donnera pour la figure du fil cette équation :

$$C\,dx = dy \int X\,S\,ds.$$

Poſant $dy = p\,dx$ & $ds = dx\,\sqrt{(1+pp)}$ cette équation ſe changera en $\frac{C}{p} = \int XS\,dx\sqrt{(1+pp)}$, & par la differentiation en

$$-\frac{C\,dp}{pp\sqrt{(1+pp)}} = X\,S\,dx, \text{ ou } \frac{C\sqrt{(1+pp)}}{p} = \int X\,S\,dx.$$

Il s'en faut encore beaucop, qu'on puiſſe connoitre de cette équation

la

la courbe que nous cherchons, mais cette équation ſuffit pour notre deſſein qui eſt de découvrir une formule, qui étant ſuppoſée un *minimum* produiſe la même équation $\frac{C\sqrt{(1+pp)}}{p} = \int X S\,dx$.

XX. Il paroit d'abord fort probable, que pour avoir cette formule, nous n'avons qu'à écrire $S\,ds$, au lieu de ds, dans les formules, qui ſatisfont aux queſtions précedentes. Ainſi pour ce cas que nous venons de developper nous aurons cette formule $\int S\,ds \int X\,dx$, qui étant ſuppoſée un *minimum*, devroit produire l'equation pour la courbure du fil. Cette formule comparée à la générale $= \int Z\,dx$, à cauſe de $ds = dx\sqrt{(1+pp)}$ donnera $Z = S\sqrt{(1+pp)}.\int X\,dx$: qui etant une fonction renfermant non ſeulement les x, y, avec leurs differentiels, mais auſſi l'arc s, il faut emploïer pour ce cas la régle qui ſuit.

Si Z eſt une fonction non ſeulement des variables x, y, & des quantités qui réſultent de leurs differentiels, ſavoir $p = \frac{dy}{dx}$; $q = \frac{dp}{dx}$; $r = \frac{dq}{dx}$ *&c. mais auſſi d'une formule integrale* $\int \mathfrak{Z}\,dx = \Pi$, *de ſorte que*

$$dZ = L\,d\Pi + M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq + R\,dr \text{ \&c.}$$

$$\& \; d\mathfrak{Z} = \mathfrak{M}\,dx + \mathfrak{N}\,dy + \mathfrak{P}\,dp + \mathfrak{Q}\,dq + \mathfrak{R}\,dr \text{ \&c.}$$

Alors entre toutes les courbes, qui ont $\int \mathfrak{Z}\,dx$ *de la même grandeur, celle où il y aura* $\int Z\,dx$ *un minimum ſera exprimée par cette équation.*

$$o = N - \mathfrak{N}\int L\,dx - \frac{1}{dx}\,d.(P - \mathfrak{P}\int L\,dx) + \frac{1}{dx^2}\,dd.(Q - \mathfrak{Q}\int L\,dx).$$

XXI. Dans le cas preſent S étant une fonction de $s = \int dx\sqrt{(1+pp)}$, je ferai $\Pi = s$ & $\mathfrak{Z} = \sqrt{(1+pp)}$: & il ſera $\mathfrak{M} = o$, $\mathfrak{N} = o$, & $\mathfrak{P} = \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$; Enſuite ſuppoſant $dS = K\,ds$, nous aurons

$dZ = Kds\sqrt{(1+pp)}.\int Xdx + XSdx\sqrt{(1+pp)} + \frac{Sp\,dp}{\sqrt{(1+pp)}}\int Xdx$

& partant $L = K\sqrt{(1+pp)}\int Xdx$; $M = XS\sqrt{(1+pp)}$; $N = 0$ & $P = \frac{Sp\int Xdx}{\sqrt{(1+pp)}}$. De là l'equation cherchée ſera :

$$0 = -\frac{1}{dx}d.\left(\frac{Sp\int Xdx}{\sqrt{(1+pp)}} - \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}\int Kdx\sqrt{(1+pp)}.\int Xdx\right)$$

Or puisque $Kdx\sqrt{(1+pp)} = Kds$, nous aurons $Kdx\sqrt{(1+pp)} = dS$ & notre équation ſera $0 = -\frac{1}{dx}d.\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}(S\int Xdx - \int dS\int Xdx)$ & prenant intégrale :

$$C = \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}(S\int Xdx - \int dS\int Xdx).$$

Mais le differentiel de $S\int Xdx - \int dS\int Xdx$ étant $= XSdx$, nous aurons $C = \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}\int XSdx$, ou bien $\frac{C\sqrt{(1+pp)}}{p} = \int XSdx$, qui eſt la même équation, que la ſolution du probleme nous a fournie, & par conſequent cette ſolution ſe trouve, ſi l'on cherche entre toutes les courbes iſoperimetres, ou entre toutes les courbes, que le fil propoſé pourroit former, celle, où il y aura cette formule $\int Sds\int Xdx$ *un minimum* : & de là nous tirerons ce theoreme encore plus général.

THEOREME III.

XXII. *Le fil parfaitement flexible* AYM, *dont la longueur* $= s$, *& la maſſe* $= \int Sds$, *étant ſollicité en chaque point* M *par deux forces acceleratrices, ſuivant les directions* MQ, MP, *dont celle-là ſoit égale à une fonction* X *de l'abſciſſe* CP $= x$, *à laquelle la direction* MQ *eſt parallele; or celle-ci, qui agit dans la direction de l'appliquée* MP $= y$, *ſoit égale à une fonction* Y *de* y, *de ſorte que l'élément du fil* $Mm = ds$, *dont la maſſe* $= Sds$, *ſoit ſollicité par la force motrice* $XSds$ *ſelon* MQ *& par la force motrice* $YSds$ *ſelon* MP : *la courbe,* AYM, *que le fil formera, aura cette proprieté, que parmi toutes les autres*

autres courbes de la même longueur, il y aura cette formule $\int S\,ds\,(\int X\,dx + \int Y\,dy)$ *UN MINIMUM.*

Il n'eſt pas neceſſaire de démontrer ce theoreme dans toute ſon étendue, car l'ayant démontré pour le cas, où l'elément Mm n'eſt ſollicité que par une force $XS\,ds$, dans la direction MQ, la même démonſtration ſervira auſſi pour l'autre force $YS\,ds$, ſi elle agiſſoit toute ſeule, deſorte que pour le premier cas on aura la formule $\int S\,ds \int X\,dx$, & pour l'autre celle-cy $\int S\,ds \int Y\,dy$, qui doit être un *minimum*. Or la ſolution du probleme ſecond nous convaincra, que ſi les deux forces agiſſent enſemble, on n'aura qu'à ajouter enſemble les deux formules, qui appartiennent ſeparément à ces deux cas: cependant on pourra s'aſſeurer tout à fait de cette verité, ſi l'on veut faire le calcul ſuivant les régles, dont nous nous ſommes ſervi dans la ſolution du probleme II.

XXIII. Pour approfondir la nature de ces formules, il faut avoir egard à trois choſes: I^mo. à la quantité des forces acceleratrices, dont chaque élément du fil eſt ſollicité, II^do. à la direction de ces forces & III^tio. à l'epaiſſeur, ou à la maſſe du fil. La quantité de la force acceleratrice ſe trouve, ſi l'on diviſe la force motrice dont chaque élément du fil eſt ſollicité, par la maſſe de ce même élément: la force acceleratrice ſera donc une quantité finie exprimée par une fonction. Jusqu'ici nous avons ſuppoſé des fonctions, ou de l'abſciſſe x, ou de l'appliquée y, pour exprimer ces forces acceleratrices. Pour la direction de ces forces, nous l'avons ſuppoſée parallele à celle des coordonnées x ou y, dont la force même étoit une fonction: Ainſi la force exprimée par X, fonction de l'abſciſſe $CP = x$, agiſſoit dans la direction MQ parallele aux abſciſſes, & la force Y, fonction de l'appliquée $PM = y$, agiſſoit dans cette même direction MP. Dans ces cas pour trouver les formules, qui contiennent un *minimum*, ou ce qui revient au même, pour repréſenter la quantité d'action, il faut multiplier chaque force X & Y par l'elément de ſa direction dx & dy, pour avoir $X\,dx$ & $Y\,dy$, & d'en prendre les intégrales $\int X\,dx$ & $\int Y\,dy$. A ces formules on donnera le ſigne + ſi les forces X & Y ſont contraires aux directions des quantités x & y, ou que leur action tend à diminuer ces quantités, comme la figure repréſente: or ſi une de

ces

ces forces avoit une direction contraire, on donnera le ſigne — à la formule intégrale $\int X\,dx$ ou $\int Y\,dy$. Suivant cette régle par rapport aux ſignes, on ajoutera enſemble ces intégrales, s'il y en a pluſieurs, & on multipliera la ſomme par la maſſe de l'élément du fil $S\,ds$. Alors l'intégrale de ce produit $\int S\,ds\,(\pm\int X\,dx \pm \int Y\,dy)$; ſera la formule cherchée, dont la valeur eſt *un minimum* pour la courbe du fil.

XXIV. Cette régle, que nous venons de découvrir, demande, que la variable, dont la force eſt une fonction, & la force, ayent la même direction; & on ſe tromperoit, ſi l'on vouloit appliquer cette régle à des cas, ou cette identité de directions n'a pas lieu. Pour la preuve de cela, ſuppoſons que le fil A Y M ſoit ſollicité au point M ſuivant la direction de l'appliquée M P par une force, qui ſoit égale à une fonction de l'abſciſſe C P $= x$. Soit cette force $= X$, & ſuppoſant le fil par tout également epais, nous aurons pour ſa courbure cette équation $B\,dy = dx \int X\,ds$, qui poſant $dy = p\,dx$ ſe change en $B\,p = \int X\,dx\,\sqrt{(1+pp)}$, ou $\frac{B\,dp}{\sqrt{(1+pp)}} = X\,dx$, d'où l'on tire $\int X\,dx = B \int \frac{dp}{\sqrt{(1+pp)}}$.

Or on verra bientot, que cette courbe ne ſe trouve pas en faiſant la formule $\int ds \int X\,dy$ un *minimum*, où la force acceleratrice X eſt multipliée par dy, le differentiel de la ligne M P, qui repréſente la direction de cette force, & l'integral $\int X\,dy$ eſt multiplié par l'élément du fil ds. Mais la courbe qu'on tire de cette formule $\int ds \int X\,dy$ ſuivant la methode de *maximis* & *minimis* ſera bien differente de celle, que nous venons de trouver ſavoir

$$\int X\,dx = B \int \frac{dp}{\sqrt{(1+pp)}} = B\,l\,(p + \sqrt{(1+pp)})$$

XXV. Voyons donc quelle ſera pour ce cas la formule, qui étant ſuppoſée un *maximum*, ou *minimum*, conduiſe à cette même équation. Soit $\int Z\,dx$ cette formule, & $dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dp$; d'où on obtient en général cette équation $o = N - \frac{dP}{dx}$

Or

Or puisque notre équation $\int X\,dx = B\int \frac{dp}{V(1+pp)}$ ne contient pas y, on voit que $N = o$, & que l'équation pour la courbe ſera $dP = o$, ou $P = B$. Soit pour abréger $\Pi = \int \frac{dp}{V(1+pp)}$, de ſorte que Π eſt une fonction connue de p, & notre équation $\int X\,dx = B\,\Pi$, comparée à $P = B$, donnera $P = \frac{\int X\,dx}{\Pi}$, & partant $dZ = M\,dx + \frac{dp\int X\,dx}{\Pi}$; ſoit l'integral $\int \frac{dp}{\Pi} = \Phi$, & nous aurons $Z = \Phi \int X\,dx$, & la formule dont la valeur eſt un *maximum*, ou *minimum*, dans la courbe du fil ſera $\int \Phi\,dx \int X\,dx$, où Φ marque une fonction de p, qui renferme une double intégration ſavoir $\Phi = \int \frac{-\frac{dp}{\int \frac{dp}{V(1+pp)}}}{} = \int \frac{dp}{l(V(1+pp)\pm p)}$; formule ſi embaraſſée qu'il ſemble presque impoſſible, qu'aucune theorie y ſauroit jamais conduire à *priori*.

XXVI. Nous voyons donc, qu'il n'eſt pas permis de donner à la régle, que nous avons tirée des trois theoremes precedens, une plus grande étendue, que pour les cas où, tant la quantité, que la direction des forces acceleratrices ſont déterminées par la même quantité variable, & quoique jusqu'ici nous ayons ſuppoſé ces variables paralleles entr'elles, pourtant la régle mentionnée aura auſſi lieu, ſi les variables, dont les forces ſont des fonctions, ſortent d'un point fixe, pourvû que les forces agiſſent dans la direction de ces mêmes variables. La même régle ne ſouffrira non plus aucune exception, quand même le fil ſeroit ſollicité en même tems vers pluſieurs points fixes, par des forces acceleratrices, qui fuſſent proportionelles à des fonctions quelconques des diſtances à ces points. Comme cette circonſtance contribuëra conſidérablement à la perfection de la theorie, que nous avons en vuë, je joindrai les problemes ſuivans, où je conſidérerai des forces dirigées vers un, ou pluſieurs points fixes, pour en tirer les

theoremes, qui contiennent les formules, dont la quantité d'action peut être repréſentée.

PROBLEME IV.

Fig. 2. XXVII. *Le fil* A M *étant dans tous ſes points* M *ſollicité vers le point fixe* C *par une force, qui ſoit exprimée par une fonction quelconque de la diſtance* M C: *trouver la courbe* C M, *à laquelle le fil ſera réduit.*

SOLUTION.

Que l'axe C P auquel nous rapporterons la courbe, paſſe par le point C, & y ayant tiré la perpendiculaire M P, ſoit C P $= x$, P M $= y$, & il ſera C M $= \nu(xx + yy)$. Or ſoit C M $= \nu(xx + yy) = v$ & V la fonction de v, qui exprime la force acceleratrice, dont l'élément M m eſt tiré vers C. Décompoſons cette force ſelon les directions M P, M Q paralleles aux coordonnées, & nous aurons la force ſelon M Q $= \frac{V\,x}{v}$ & la force ſelon M P $= \frac{V\,y}{v}$. Donc dans la ſolution du probléme général nous n'avons qu'à mettre $\frac{V\,x}{v}$ au lieu de Q & $\frac{V\,y}{v}$ au lieu de P, & l'equation pour la courbe cherchée A M ſera

$$dy \int \frac{V\,x\,ds}{v} - dx \int \frac{V\,y\,ds}{v} = o$$

où ds marque la maſſe de l'élément du fil M m, que je ſuppoſerai ici de la même épaiſſeur par tout, deſorte que $ds = \nu(dx^2 + dy^2)$. Mettons comme auparavant $dy = p\,dx$, pour avoir $p \int \frac{V x dx \nu(1+pp)}{v} = \int \frac{V\,y\,dx\,\nu(1+pp)}{v}$ dont le differentiel eſt:

$$dp \int \frac{V x dx \nu(1+pp)}{v} + \frac{V x p dx \nu(1+pp)}{v} = \frac{V y dx \nu(1+pp)}{v}$$

Soit

Soit de plus $dp = q\,dx$, & pour $\frac{V}{v}$ écrivons U, pour avoir:

$$\int U\,x\,dx\,V(1+pp) = \frac{U(y-px)\,V(1+pp)}{q}$$

dont le differentiel eſt:

$$Ux\,dx\,V(1+pp) = \frac{dU(y-px)V(1+pp)}{q} - Ux\,dx\,V(1+pp) + \frac{U(y-px)p\,dx}{V(1+pp)} - \frac{U(y-px)\,dq\,V(1+pp)}{q\,q}$$

qui ſe change en celle-cy

$$\frac{2\,x\,q\,dx}{y-px} = \frac{dU}{U} + \frac{p\,q\,dx}{1+pp} - \frac{dq}{q}$$

ou bien à cauſe de $q\,dx = dp$ en celle-cy

$$\frac{2\,x\,dp}{y-px} = \frac{dU}{U} + \frac{p\,dp}{1+pp} - \frac{dq}{q}$$

dont chaque membre eſt un differentiel logarithmique; car $d(y-px) = -x\,dp$, & partant $\frac{2\,x\,dp}{y-px} = \frac{-2\,d(y-px)}{y-px}$

Par conſéquent l'integrale de notre équation ſera $lC - 2\,l(y-px) = lU + lV(1+pp) - lq$, & remontant aux nombres:

$$\frac{C}{(y-px)^2} = \frac{U\,V(1+pp)}{q} = \frac{U\,dx\,V(1+pp)}{dp}$$

Donc $\frac{C\,dp}{(y-px)^2\,V(1+pp)} = U\,dx$. Or puiſque U eſt fonction de $v = V(x\,x+y\,y)$, & partant $v\,dv = x\,dx + y\,dy = dx(x+p\,y)$ multiplions notre équation par $x+p\,y$, pour avoir

$$\frac{C\,dp\,(x+p\,y)}{(y-px)^2\,V(1+pp)} = U\,dx(x+py) = U\,v\,dv = V\,dv$$

à cauſe de $V = U\,v$; où le membre $V\,dv$ eſt integrable: or je remarque que l'autre membre $\frac{C\,dp\,(x+py)}{(y-px)^2\,V(1+pp)}$ eſt également

integrable, ayant pour integrale $\frac{C\sqrt{(1+pp)}}{y-px}$. Car puisque $d(y-px) = -x\,dp$ à cauſe de $dy = p\,dx$, il ſera

$$d.\frac{C\sqrt{(1+pp)}}{y-px} = \frac{C\,p\,dp}{(y-px)\sqrt{(1+pp)}} + \frac{Cx\,dp\sqrt{(1+pp)}}{(y-px)^2} = \frac{C\,dp\,(x+py)}{(y-px)^2\sqrt{(1+pp)}}$$

Par conſéquent nous aurons pour l'equation de la courbe cherchée:

$$\frac{C\sqrt{(1+pp)}}{y-px} = \int V\,dv.$$

XXVIII. Il y a encore un autre chemin de trouver l'integrale de l'equation differentielle, à laquelle nous ſommes parvenus :

$$0 = \frac{dU(y-px)\sqrt{(1+pp)}}{q} - 2Ux\,dx\sqrt{(1+pp)} + \frac{U(y-px)p\,dx}{\sqrt{(1+pp)}} - \frac{U(y-px)\,dq\sqrt{(1+pp)}}{q\,q}$$

Nous n'avons qu'à la multiplier par $\sqrt{(1+pp)}$, pour avoir

$$0 = \frac{dU(y-px)(1+pp)}{q} - 2Ux\,dx(1+pp) + U(y-px)\,p\,dx - \frac{U(y-px)\,dq(1+pp)}{q\,q}$$

de laquelle ſuppoſons que l'integrale ſoit :

$$C = Z + \frac{U(y-px)(1+pp)}{q}, \text{ qui etant differentiée donne}$$

$$0 = dZ + \frac{dU(y-px)(1+pp)}{q} - Ux\,dx(1+pp) + 2U(y-px)p\,dx - \frac{U(y-px)\,dq(1+pp)}{q\,q}$$

qui étant comparée à notre équation donnera :

$dZ = -Ux\,dx\,(1+pp) - U(y-px)\,p\,dx = -U\,dx(x+py)$

Il y aura donc $dZ = -U(x\,dx + y\,dy) = -U\,v\,dv$

& parceque $Uv = V$, qui eſt fonction de v nous aurons $dZ = -V\,dv$ & $Z = -\int V\,dv$. Par conſéquent notre équation integrée pour la premiere fois ſera

$$C = -\int V\,dv + \frac{U(y-px)(1+pp)}{q}$$

ou bien $\frac{U}{\int V\,dv} = \frac{q}{(y-px)(1+pp)}$.

Multiplions de part & d'autre par $v\,dv = dx(x+py)$ & nous aurons

$$U\,v\,dv$$

$$\frac{U\,v\,dv}{\int V\,dv} = \frac{q\,dx\,(x+py)}{(y-px)(1+pp)}$$

Or puisque $U\,v = V$ & $q\,dx = dp$,

$$\frac{V\,dv}{\int V\,dv} = \frac{dp\,(x+py)}{(y-px)(1+pp)} = \frac{x\,dp}{y-px} + \frac{p\,dp}{1+pp}$$

dont chaque membre eſt un differentiel logarithmique à cauſe de $x\,dp = -d(y-px)$, & delà nous tirerons cette équation intégrale

$$l\int V\,dv = -l(y-px) + l\,V(1+pp) + l\,C$$

d'où remontant aux nombres nous obtiendrons

$$\int V\,dv = \frac{C\,V(1+pp)}{y-px}$$

qui eſt la même équation, que nous avons trouvée par la premiere methode, aprés avoir fait deux integrations. Mais qu'on remarque en particulier l'équation qui s'eſt trouvée ici par la premiere integration

$$\int V\,dv = \frac{U(y-px)(1+pp)}{q} \text{ ou } \frac{q\int V\,dv}{1+pp} = \frac{V(y-px)}{v}$$

à laquelle conduira la methode de *maximis* & *minimis*.

THEOREME IV.

XXIX. *Le fil* A M *étant dans tous ſes points* M *ſollicité vers le point fixe* C *par une force acceleratrice* V, *qui ſoit une fonction quelconque de la diſtance* C M $= v$, *la courbure du fil ſe trouvera, ſi l'on cherche entre toutes les courbes poſſibles, celle où la valeur de cette expreſſion* $\int ds \int V\,dv$ *eſt un* minimum, (*ds marquant la maſſe de l'élément du fil* M *m*.) Fig. 2.

DEMONSTRATION.

Ayant fait $dy = p\,dx$, $dp = q\,dx$, la formule propoſée $\int ds \int V\,dv$ ſe change en $\int dx\,\sqrt{(1+pp)} \int V\,dv$, ſuppoſant le fil par tout de la même groſſeur, où $\int V\,dv$ ſera une fonction de v, & partant ſon differentiel $= V\,dv = \frac{V\,x\,dx + V\,y\,dy}{v}$ à cauſe de $v\,dv = x\,dx + y\,dy$.

$+ y\,dy$. Donc ſi nous comparons cette formule avec les expreſſions générales $\int Z\,dx$ & $dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dp$, nous aurons $Z = \sqrt{(1+pp)}\int V\,dv$

& $dZ = \frac{V x\,dx}{v}\sqrt{(1+pp)} + \frac{V y\,dy}{v}\sqrt{(1+pp)} + \frac{p\,dp\int V\,dv}{\sqrt{(1+pp)}}$

& partant $M = \frac{V x}{v}\sqrt{(1+pp)}$; $N = \frac{V y}{v}\sqrt{(1+pp)}$ & $P = \frac{p\int V\,dv}{\sqrt{(1+pp)}}$

Or la courbe, où $\int Z\,dx$ eſt un *minimum*, étant exprimée par cette équation $o = N - \frac{dP}{dx}$ ou $N\,dx = dP$, nous aurons pour notre cas :

$$\frac{V y\,dx\sqrt{(1+pp)}}{v} = \frac{V p\,dv}{\sqrt{(1+pp)}} + \frac{dp\int V\,dv}{(1+pp)\sqrt{(1+pp)}}$$

& multipliant par $\sqrt{(1+pp)}$

$$\frac{V y\,dx(1+pp) - V p v\,dv}{v} = \frac{dp\int V\,dv}{1+pp} = \frac{q\,dx\int V\,dv}{1+pp}$$

équation, qui à cauſe de $v\,dv = x\,dx + y\,dy = dx\,(x + py)$ ſe réduit à celle-cy

$$\frac{V\,dx(y-px)}{v} = \frac{q\,dx\int V\,dv}{1+pp} \text{ ou } \frac{V(y-px)}{v} = \frac{q\int V\,dv}{1+pp}$$

ce-qui eſt la même équation, que la ſolution du probleme précedent nous a fournie.

PROBLEME V.

Fig. 3. XXX. *Le fil parfaitement flexible* A M *étant dans tous ſes points* M *ſollicité en même tems vers pluſieurs points fixes* C, C′, C″ *&c. par des forces acceleratrices, qui ſoient exprimées par des fonctions quelconques des diſtances* MC, MC′, MC″, *&c. trouver la courbe, à laquelle ce fil ſera réduit.*

SOLUTION.

Ayant choiſi deux directions fixes MQ, MP & perpendiculaires entr'elles, ſuivant leſquelles nous décompoſerons chaque force, ſoient

ſoient les coordonnées pour chaque point avec les diſtances du point M à ces points C, C′, C″ &c. nommées comme il ſuit :

C P $= x$; P M $= y$; C M $= v$, la force M C $= V$
C′ P′ $= x'$; P′ M $= y'$; C′ M $= v'$, la force M C′ $= V'$
C″ P″ $= x''$; P″ M $= y''$; C″ M $= v''$, la force M C″ $= V''$

& on aura :

$vv = xx + yy$; $v'v' = x'x' + y'y'$; $v''v'' = x''x'' + y''y''$

Or puiſque les abſciſſes x, x', x'' &c. & les appliquées y, y', y'' &c. ne different entr'elles que de quantités conſtantes, leurs differentiels ſeront égaux, ou il ſera $dx = dx' = dx''$ &c. & $dy = dy' = dy''$ &c.

Donc poſant $dy = p\,dx$, & $dp = q\,dx$, les quantités p, q, ſeront les mêmes pour tous les differens points C, C′, C″ &c. & l'element du fil M m ſera $= dx \sqrt{(1 + pp)}$.

Decompoſons maintenant chaque force V, V′, V″ &c. ſelon les directions M Q & M P, &

	pour la direction M Q	pour la direction M B
la force V donnera	la force $= \frac{V\,x}{v}$	la force $= \frac{V\,y}{v}$
la force V′ - -	la force $= \frac{V'\,x'}{v'}$	la force $= \frac{V'\,y'}{v'}$
la force V″ - -	la force $= \frac{V''\,x''}{v''}$	la force $= \frac{V''\,y''}{v''}$

Soit pour abreger $\frac{V}{v} = U$; $\frac{V'}{v'} = U'$, $\frac{V''}{v''} = U''$ &c.

& l'elément M $m = ds = dx \sqrt{(1 + pp)}$ ſera en tout ſollicité ſuivant M Q par la force $= Ux + U'x' + U''x''$
ſuivant M P par la force $= Uy + U'y' + U''y''$

Par conſéquent mettant ces expreſſions pour Q & P, nous aurons pour la courbe du fil A M cette équation

$dy\,ds\,(Ux + U'x' + U''x'') = dx\,ds\,(Uy + U'y' + U''y'')$

qui poſant $dy = p\,dx$, donnera par la differentiation :

$dp\,ds\,(Ux + U'x' + U''x'') + p\,ds\,(Ux + U'x' + U''x'') = ds\,(Uy + U'y' + U''y'')$

Ou

Ou mettant $dp = q\,dx$, & pour ds fa valeur $dx\sqrt{(1+pp)}$

$$\int dx\,(Ux+U'x'+U''x'')\sqrt{(1+pp)} = \frac{U(y-px)\sqrt{(1+pp)}}{q} + \frac{U'(y'-px')\sqrt{(1+pp)}}{q} + \frac{U''(y''-px'')\sqrt{(1+pp)}}{q}$$

laquelle étant differentiée, comme dans la folution du probleme précedent, donnera :

$$0 = \frac{dU(y-px)\sqrt{(1+pp)}}{q} - 2Uxdx\sqrt{(1+pp)} + \frac{U(y-px)\,pdx}{\sqrt{(1+pp)}} - \frac{U(y-px)\,dq\sqrt{(1+pp)}}{qq}$$
$$+ \frac{dU'(y'-px')\sqrt{(1+pp)}}{q} - 2U'x'dx(1+pp) + \frac{U'(y'-px')pdx}{\sqrt{(1+pp)}} - \frac{U'(y'-px')\,dq\sqrt{(1+pp)}}{qq}$$
$$+ \frac{dU''(y''-px'')\sqrt{(1+pp)}}{q} - 2U''x''dx\sqrt{(1+pp)} + \frac{U''(y''-px'')pdx}{\sqrt{(1+pp)}} - \frac{U''(y''-px'')\,dq\sqrt{(1+pp)}}{qq}$$

qui étant multipliée par $\sqrt{(1+pp)}$, & integrée comme dans le §. XXVIII. donnera :

$$C = -\int V\,dv + U(y-px)(1+pp) : q$$
$$-\int V'dv' + U'(y'-px')(1+pp) : q$$
$$-\int V''dv'' + U''(y''-px'')(1+pp) : q$$

Ou fi nous tirons des centres de forces C, C', C'' des perpendiculaires fur la tangente de la courbe, & que nous nommions ces perpendiculaires u, u', u'' &c, nous aurons.

$$C = +\frac{Vu\,dv}{du} - \int V\,dv$$
$$+\frac{V'u'dv'}{du'} - \int V'dv'$$
$$+\frac{V''u''dv''}{du''} - \int V''dv''$$

Si nous multiplions par $\frac{q}{1+pp}$ nous obtiendrons cette équation :

$$\frac{q}{1+pp}(\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'') = \begin{cases} +U(y-px) \\ +U'(y'-px') \\ +U''(y''-px'') \end{cases} = \begin{cases} +V(y-px) : v \\ +V'(y'-px') : v' \\ +V''(y''-px'') : v'' \end{cases}$$

qui exprime la nature de la courbure du fil.

THEOREME V.

XXXI. *Le fil parfaitement flexible* A M *étant dans tous ſes points* M *ſollicité vers pluſieurs points fixes* C, C', C'' *&c. par des forces acceleratrices* V, V', V'' *&c. qui ſoient des fonctions quelconques des diſtances* $MC = v$, $MC' = v'$, $MC'' = v''$ *&c. (c. à d. chacune de la diſtance qui lui répond), la courbe, que le fil formera aura cette proprieté, que la valeur de cette formule* $\int ds\,(\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'')$ *y ſera un* minimum, *où* ds *marque la maſſe de l'elément du fil* M*m*.

DEMONSTRATION.

Soit le fil partout de la même groſſeur, deſorte que ds, qui devroit marquer la maſſe de l'elément du fil Mm, ſignifie ſimplement ſa longueur $dx\sqrt{(1+pp)}$, ſuppoſant $dy = p\,dx$. Car on reconnoitra aiſément, que la demonſtration ſera la même, ſi au lieu de ds on mettoit dans la formule Sds, où S marqueroit une fonction quelconque de s. Cela remarqué, ſi nous y appliquons les formules générales $\int Z dx$ & $dZ = M dx + N dy + P dp$, nous aurons :

$$Z = (\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'')\sqrt{(1+pp)}$$

& puiſque :

$$dv = \frac{x\,dx + y\,dy}{v}\,;\quad dv' = \frac{x'\,dx + y'\,dy}{v'}\,;\quad dv'' = \frac{x''\,dx + y''\,dy}{v''}$$

nous aurons les valeurs ſuivantes :

$$M = \left(\frac{Vx}{v} + \frac{V'x'}{v'} + \frac{V''x''}{v''}\right)\sqrt{(1+pp)}$$

$$N = \left(\frac{V y}{v} + \frac{V' y'}{v'} + \frac{V'' y''}{v''}\right) \sqrt{(1 + pp)}$$

$$P = \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}} (\int V \, dv + \int V' \, dv' + \int V'' \, dv'')$$

Or ces valeurs etant trouvées, nous ſavons que la courbe, où $\int Z dx$ eſt un *minimum*, ſera exprimée par cette équation : $N dx = dP$: qui ſera :

$$\left(\frac{V y}{v} + \frac{V' v'}{v'} + \frac{V'' y''}{v''}\right) dx \sqrt{(1 + pp)} =$$

$$\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}} (V dv + V' dv' + V'' dv'') + \frac{dp}{(1+pp)\sqrt{(1+pp)}} (\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'')$$

& multipliant par $\sqrt{(1 + pp)}$, nous obtiendrons en faiſant $dp = q dx$; & en remettant pour dv, dv', dv'' leurs valeurs ; cette équation :

$$\frac{V(y - px)}{v} + \frac{V'(y' - px')}{v'} + \frac{V''(y'' - px'')}{v''} =$$

$$\frac{1 + pp}{q} (\int V \, dv + \int V' \, dv' + \int V'' \, dv'')$$

laquelle étant la même, que la ſolution du problême précedent nous a fournie, la verité du theoreme eſt manifeſte. Si l'on vouloit entreprendre le calcul, on s'aſſeureroit par une opération ſemblable, de la verité du theoreme pour les cas où l'épaiſſeur du fil ſeroit ſuppoſée variable. Car alors on n'aura qu'à mettre $S ds$ pour ds, & pour S prendre une fonction quelconque de s, tout comme nous avons fait dans la ſolution du Probl. III.

XXXII. Nous voilà donc tout à fait éclaircis ſur la maniere de déterminer la quantité d'action, lorsque les forces agiſſent, ou en des directions données, ou lorsqu'elles ſont dirigées vers des points fixes, pourvuque que la quantité de chaque force ſoit exprimée par une fonction de la diſtance à ſon point fixe. Car le cas où les directions d'une force ſont paralleles entr'elles, eſt compris dans l'autre, où la force eſt dirigée vers un point fixe, quand ce point s'eloigne à l'in-

à l'infini. Or quoique dans ce cas, où la diſtance au point fixe devient infinie, il ſemble que la force ne puiſſe pas être exprimée par une fonction de cette diſtance, la régle donnée y trouve pourtant lieu, & ne demande aucune exception. Car ſoit z la diſtance infinie du lieu, où la force agit, au point fixe qu'on ſuppoſe eloigné à l'infini; on en pourra retrancher une ligne conſtante a pareillement infinie, deſorte que $z - a$ devienne une ligne finie; & alors la quantité de la force doit être exprimée par une fonction de cette ligne finie $z - a$, pourqu'on puiſſe appliquer la régle trouvée: car il eſt clair, que la force étant une fonction de $z - a$, pourra être regardée comme une fonction de la diſtance même z, bien qu'elle ſoit infinie. Or dans ce cas $z - a$ marquera la diſtance du lieu, où la force agit, à une ligne droite, qui eſt perpendiculaire aux directions de la force, qui ſeront paralleles entr'elles. C'eſt donc la raiſon, pourquoi notre régle a pu être appliquée avec ſucces dans les cas, où la force, qui agiſſoit ſelon la direction de l'abſciſſe ou de l'appliquée, a été exprimée par une fonction de l'abſciſſe, ou de l'appliquée.

XXXIII. Cela remarqué, nous pourrons établir, que la régle, que nous venons de découvrir pour déterminer la *quantité d'action*, aura lieu toutes les fois, que les forces, dont le fil eſt ſollicité, ſeront dirigées vers des points fixes, & que la quantité de chaque force ſera exprimée par une fonction quelconque de la diſtance à ce point fixe, auquel cette force eſt dirigée. Or dans les cas où cette condition a lieu, quelque grand que ſoit le nombre des forces, qui agiſſent ſur le fil parfaitement flexible, on trouvera la figure du fil, en cherchant celle, où la quantité d'action devient *un minimum*. Pour cet effet, il faut conſiderer chaque force ſeparement: Soit dS l'elément de la maſſe du fil, ſur lequel les forces agiſſent, & V une de ces forces acceleratrices dirigée vers un point fixe, dont la diſtance à l'elément du fil ſoit $= v$, deſorte que V ſoit une fonction quelconque de cette diſtance v; & alors qu'on prenne l'intégral $\int V\,dv$, auquel on donnera le ſigne $+$, ſi l'action de la force tend à diminuer la diſtance v, mais s'il arrive le contraire, le ſigne $-$. Ayant tiré ſelon cette régle pour chaque force la formule $\int V\,dv$, on recueillira tou-

tes ces formules avec leurs ſignes dans une ſomme, que je nommerai $= W$; & alors la quantité d'action ſera exprimée par cette formule $\int W\, dS$, qui étant ſuppoſée un *minimum*, donnera la figure du fil. En examinant cette expreſſion de la quantité d'action, on la trouvera parfaitement d'accord avec celle que Monſieur de *Maupertuis* a publiée dans les Mémoires de l'Academie Royale des Sciences de Paris pour l'An. 1740. & qu'il a tirée de principes, qui tiennent plutot à la Metaphyſique qu'à la Mecanique.

XXXIV. Quoique je n'aye appliqué cette régle, qu'aux fils parfaitement flexibles, on reconnoîtra aiſément que cette maniere de déterminer la quantité d'action doit être beaucoup plus générale, & qu'elle aura lieu dans tous les autres objets, ſur leſquels les mêmes forces peuvent agir: car en effet, le cas, auquel Mr. de *Maupertuis* a appliqué cette régle eſt bien different de celui cy, que j'ai conſideré dans les problemes précedens. Il n'y a donc aucun doute qu'on ne doive exprimer de la même maniere la quantité d'action des forces ſemblables, qui agiſſent ſur un fil roide, ou élaſtique: or dans ce cas, comme la courbure d'un tel fil ne dépend pas uniquement de ces forces, qui agiſſent ſur chacun de ſes élémens, mais outre cela auſſi de ſa roideur, ou de ſon élaſticité; il faut ajouter à la quantité d'action qui reſulte des forces, encore la quantité d'action qui convient à la roideur, ou élaſticité même du fil, pour obtenir l'expreſſion totale, qui ſera un *minimum*. Mais il ne paroit pas ſi facile de déterminer ſuivant la même régle, que je viens de donner pour les forces, la quantité d'action, qui convient à l'élaſticité; puiſque l'action de l'elaſticité ſemble tout à fait differente de celle des forces, que j'ai conſiderées jusqu'ici, tant par rapport à la direction qu'à la quantité de l'élaſticité. Je tacherai donc de découvrir *à poſteriori* cette quantité d'action de l'élaſticité, en cherchant l'expreſſion, qui étant ſuppoſée un *minimum*, fourniſſe la même courbe, que les principes de la Mecanique donnent pour un fil élaſtique ſollicité par des forces quelconques.

Fig. 1. XXXV. Si le fil élaſtique AYM n'eſt ſollicité qu'au bout A par deux forces conſtantes $AB = A$ & $AC = C$, la courbe à laquelle

quelle il ſera réduit, ſera exprimée par cette équation $\frac{S}{r} = By - Cx$, où r marque le rayon de la courbure au point M, & S ſignifie l'épaiſſeur du fil au point M ou l'élaſticité abſolue. De ſorte que ſi le fil eſt partout également élaſtique, cette quantité S deviendra conſtante; ſoit donc $S = A$, & l'équation $\frac{A}{r} = By - Cx$ exprimera la nature de la courbe élaſtique ordinaire. Dans ce cas Mr. *Daniel Bernoulli* a remarqué que cette courbe ſe trouve, ſi l'on rend cette formule $\int \frac{ds}{rr}$ un *minimum*, où ds marque l'elément de la courbe Mm. De là il faut donc conclurre que la quantité d'action de l'élaſticité eſt proportionnelle à la formule $\int \frac{ds}{rr}$; mais il n'eſt pas encore clair, ſi elle ſe peut combiner avec les formules, qui repréſentent les quantités d'action des forces ſollicitantes, ou en cas que cela ſoit permis, par quelle conſtante on doit multiplier cette formule $\int \frac{ds}{rr}$, pour qu'elle puiſſe être miſe en parallele avec les quantités d'action des forces, qui agiront ſur le même fil. Pour nous aſſeurer ſur cet article, je m'en vais chercher par les principes de Mecanique la courbure d'un fil élaſtique, qui eſt en chaque point M ſollicité ſelon la direction M Q parallele aux abſciſſes C P $= x$, par des forces X qui ſoient des fonctions quelconques des abſciſſes. Et enſuite je tacherai de découvrir la formule, dont la valeur ſoit la plus petite dans la courbe du fil que j'aurai trouvée.

PROBLEME VI.

XXXVI. *Le fil élaſtique* A Y M, *dont l'epaiſſeur auſſi bien que l'élaſticité ſoit partout la même, étant dans tous ſes points* M *ſollicité ſuivant la direction* M Q *parallele aux abſciſſes* C P, *par des forces ac-* Fig. 3.

celeratrices qui ſoient exprimées par une fonction quelconque de ces mêmes abſciſſes : trouver la courbe AYM, *que ce fil prendra.*

SOLUTION.

Soit l'abſciſſe CP $= x$, l'appliquée PM $= y$, l'élément du fil Mm $= ds$, la force acceleratrice MQ $= X$, & partant la force motrice $= X\,ds$, puisque ds marquera en même tems la maſſe de l'elément du fil Mm. Soit enſuite le rayon de la courbure en M $= r$, qui ſuppoſant $dy = p\,dx$; $dp = q\,dx$, ſera exprimé en ſorte $r = \frac{(1 + pp)\sqrt{(1 + pp)}}{q}$; & $ds = dx\sqrt{(1 + pp)}$. Pour l'effet de l'élaſticité, nous avons vu cy-deſſus, que ſon *moment* pour tourner le fil autour du point M, eſt $= \frac{A}{r}$, A marquant une quantité conſtante proportionelle à la quantité abſolue de l'elaſticité. Cela poſé, puisque dans l'équation générale donnée §. IX. il y aura $S = A$, $Q = X$, & $P = o$, par conſequent $\int P\,ds$ conſtant $= C$, nous aurons pour la courbe du fil AYM cette équation $\frac{A}{r} = \int dy \int X\,ds - Cx$: & prenant les differentiels : $A\,d.\frac{1}{r} = dy \int X\,ds - C\,dx$ ou $\frac{A}{p}\,d.\frac{1}{r} = dx \int X\,ds - \frac{C\,dx}{p}$. Prenons encore les differentiels en ſuppoſant dx conſtant, & nous aurons $A\,d\,(\frac{1}{p}\,d.\frac{1}{r}) = X\,dx^2\sqrt{(1 + pp)} + \frac{C\,dx\,dp}{pp}$ puisque $ds = dx\sqrt{(1 + pp)}$ d'où nous ; obtiendrons : $\frac{A}{\sqrt{(1 + pp)}}\,d.(\frac{1}{p}\,d.\frac{1}{r}) = X\,dx^2 + \frac{C\,dx\,dp}{p\,p\sqrt{(1 + pp)}}$ Pour integrer cette équation ſuppoſons $\frac{1}{p}\,d.\frac{1}{r} = R\,dx$ & à cauſe

cauſe de $d\left(\frac{1}{p}\ d.\ \frac{1}{r}\right) = dR\,dx$ nous aurons

$$\frac{A\ d\ R}{V\ (1\ +\ pp)} = X\,dx\ +\ \frac{C\,dp}{pp\ V\ (1\ +\ pp)}$$

dont l'intégral ſera :

$$\frac{A\,R}{V(1+pp)} + A\int \frac{R\,p\,dp}{(1+pp)\,V(1+pp)} = \int X\,dx - \frac{C\,V\,(1+pp)}{p}$$

Or puisque $dp = q\,dx$ & $R\,dx = \frac{1}{p}\,d.\,\frac{1}{r}$ il ſera

$$\int \frac{R\,p\,dp}{(1+pp)\,V(1+pp)} = \int \frac{q}{(1+pp)\,V(1+pp)}\,d.\frac{1}{r} = \int \frac{1}{r}\,d.\,\frac{1}{r} = \frac{1}{2rr}$$

parce que $\frac{(1+pp)\,V(1+pp)}{q} = r$. Par conſéquent nous aurons :

$$\frac{A\ d\ (1:r)}{p\,dx\ V(1+pp)} + \frac{A}{2rr} = \int X\ d\,x - \frac{C\ V(1+pp)}{p}$$

Mais il y aura $\frac{A}{2rr} = \frac{A\,q\,q}{2(1+pp)^3}$ & $d\frac{1}{r} =$

$$\frac{d\,p}{(1+pp)\,V(1+pp)} - \frac{3\,q\,p\,d\,p}{(1+pp)^2\ V(1+pp)} = \frac{d\,q}{(1+pp)\,V(1+pp)} - \frac{3\,p\,q\,q\,dx}{(1+pp)^2\ V(1+pp)}$$

de ſorte que notre équation integrée ſera :

$$\frac{A\,d\,q}{p(1+pp)^2\,dx} - \frac{3\,A\,q\,q}{(1+pp)^3} + \frac{A\ q\ q}{2(1+pp)^3} = \int X\,dx - \frac{C\,V(1+pp)}{p}$$

ou bien $\int X\,d\,x = \frac{C\,V\,(1+p\,p)}{p} + \frac{A\ d\ q}{p\,dx\,(1+pp)^2} - \frac{5\ A\ q\ q}{2\,(1+pp)^3}$

Il n'eſt pas beſoin, qu'on cherche à integrer cette équation encore une fois ; car elle ſuffit pour rechercher la formule, qui par la methode des plus grands & plus petits donne la même équation.

XXXVII. Pour

XXXVII. Pour découvrir la formule $\int Z\,dx$, qui étant ſuppoſée un *minimum* produiſe la même courbe, que nous venons de trouver, je commencerai par conſiderer ſeparément, tant les forces, dont le fil eſt ſollicité, que ſon elaſticité. Et d'abord ſi l'elaſticité du fil evanouïſſoit, la formule qui repréſente la quantité d'action, ſeroit, comme nous avons vu, $= \int ds \int X\,dx$: or ſi la force X evanouïſſoit, & que la courbe devint l'elastique commune, alors la formule qui repréſente la quantite d'action ſeroit $= \int \frac{ds}{rr}$. Delà on pourra conclure, que joignant les forces X & l'elaſticité enſemble, la formule, qui repréſentera la quantité d'action, aura une telle forme $\int ds \int X\,dx + E\int \frac{ds}{rr}$ où $\int ds\,(\int X\,dx + \frac{E}{rr})$, de ſorte que la quantité E evanouïſſe, ſi l'elaſticité $\frac{A}{r}$ ou ſa valeur abſoluë A devient $= o$, mais nous ne ſavons pas encore, ſi la quantité E eſt égale à A ou à quelque fonction de A. Je ſerai donc la recherche de la courbe, où la valeur de cette expréſſion générale $\int ds\,(\int X\,dx + \frac{E}{rr})$ devient un *minimum*. Soit pour cet effet $dy = p\,dx$, $dp = q\,dx$, & il y aura $ds = dx\sqrt{(1+pp)}$, & $r = \frac{(1+pp)\sqrt{(1+pp)}}{q}$: d'où notre formule ſera $= \int dx\,(\int X\,dx + \frac{E\,q\,q}{(1+pp)^3})\sqrt{(1+pp)}$.

XXXVIII. Celle-cy étant comparée à la formule générale $\int Z\,dx$, donnera $Z = (1+pp)^{\frac{1}{2}}\int X\,dx + \frac{E\,q\,q}{(1+pp)^{\frac{5}{2}}}$ d'où l'on voit que Z ſera une fonction des quantités x, p & q: & partant poſant $dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq$, nous aurons:

$$M = X\sqrt{(1+pp)}\,;\ N = o\,;\ P = \frac{p\int X\,dx}{\sqrt{(1+pp)}} - \frac{5E\,p\,q\,q}{(1+pp)^{\frac{7}{2}}}$$

& Q

& $Q = \frac{2Eq}{(1+pp)^{\frac{5}{2}}}$. Or l'équation pour la courbe, où la valeur de la formule $\int Z\,dx$ eſt un *minimum*, ſera $o = N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2}$, ou puisque $N = o$, celle-cy: $o = -dP + \frac{ddQ}{dx}$, & prenant les intégrales $D = P - \frac{dQ}{dx}$ ou $P\,dx - dQ = D\,dx$: ou bien $dQ - P\,dx + D\,dx = o$, ſubſtituons pour P & Q leurs valeurs trouvées, & puiſque $dQ = \frac{2E\,dq}{(1+pp)^{\frac{5}{2}}} - \frac{10Epq\,dp}{(1+pp)^{\frac{7}{2}}} = \frac{2E\,dq}{(1+pp)^{\frac{5}{2}}} - \frac{10Epqq\,dx}{(1+pp)^{\frac{7}{2}}}$ à cauſe de $dp = q\,dx$, nous trouverons:

$$\frac{2E\,dq}{(1+pp)^{\frac{5}{2}}} - \frac{10Epqq\,dx}{(1+pp)^{\frac{7}{2}}} - \frac{p\,dx\int X dx}{\sqrt{(1+pp)}} + \frac{5Epqq\,dx}{(1+pp)^{\frac{7}{2}}} + D\,dx = o$$

d'où nous tirons:

$$\int X\,dx = \frac{D\sqrt{(1+pp)}}{p} + \frac{2E\,dq}{p\,dx(1+pp)^2} - \frac{5Eqq}{(1+pp)^2}$$

Or l'équation, que nous a fournie la ſolution du probleme étant

$$\int X\,dx = \frac{C\sqrt{(1+pp)}}{p} + \frac{A\,dq}{p\,dx(1+pp)^2} - \frac{5Aqq}{2(1+pp)^3}$$

nous voyons prémierement que la conſtante D, que l'integration a introduite eſt celle, qui dans la ſolution du probleme a été nommée $= C$: Enſuite il eſt evident que $2E = A$, & partant $E = \frac{1}{2}A$, de ſorte que nous connoiſſons à préſent le coëfficient de la formule $\int \frac{ds}{rr}$ afin qu'elle puiſſe être ajoutée aux expreſſions, qui contiennent les quantités d'action réſultantes des forces ſollicitantes. Par conſéquent pour le cas du probleme précedent la courbe, qui formera le fil elastique, ſe trouvera, ſi l'on cherche parmi toutes les

courbes poſſibles celle, où la valeur de cette expreſſion $\int ds \int X\,dx + \frac{1}{2} A \int \frac{ds}{rr}$ ſera la plus petite: d'où nous tirons le theoreme ſuivant.

THEOREME VI.

XXXIX. *Le fil elaſtique* AYM, *dont l'epaiſſeur auſſi bien que l'elaſticité ſoit partout la même, de ſorte que la force de l'elaſticité au point* M, *laquelle contrebalance la ſomme des momens de toutes les forces, qui agiſſent ſur le fil, ſoit* $= \frac{A}{r}$, *où r marque le rayon de la courbure au point* M; *le fil étant ſollicité dans tous ſes points* M *ſuivant la direction* MQ *parallele aux abſciſſes* CP $= x$, *par des forces acceleratrices* X, *qui ſoient des fonctions quelconques de l'abſciſſe x, la courbe, que ce fil formera, ſera trouvée ſi l'on cherche parmi toutes les courbes poſſibles celle où cette expreſſion* $\int ds \left(\int X\,dx + \frac{A}{2rr}\right)$ *ſera un* minimum, *où ds marque la maſſe de l'élement du fil* M *m*.

On voit bien, ſi au lieu des forces X, dont les directions ſont paralleles aux abſciſſes *x*, nous euſſions ſuppoſé, que les élémens du fil M*m* fuſſent ſollicités vers pluſieurs points fixes C, C′, C″ &c. par des forces acceleratrices V, V′, V″ &c. qui ſoient des fonctions quelconques des diſtances CM $= v$, C′M $= v'$, C″M $= v''$ &c. pendant que l'élaſticité $\frac{A}{r}$ demeurât la même, dans ce cas plus général, dis-je la courbure du fil ſe trouvera en faiſant un *minimum* cette formule: Fig. 3.

$$\int ds \left(\int V\,dv + \int V'\,dv' + V''\,dv'' + \&c. + \frac{A}{2rr}\right)$$

Et même ſi le fil n'etoit pas de la même groſſeur par tout, mais que la maſſe de l'élément M*m* fut $= S\,ds$ on n'auroit qu'à écrire $S\,ds$ au lieu de ds, dans cette formule; pourvû que nonobſtant cette variabilité de l'épaiſſeur du fil, l'élaſticité abſolue A ne changeât point: car d'ailleurs la quantité A deviendroit variable.

XL. Delà

XL. De là il ſemble que la quantité d'action de l'élaſticité ſe détermine d'une façon tout à fait differente de celle, qui ſert pour les vraies forces ſollicitantes, vu qu'il n'y a pas de reſſemblance entre les formules $\int V\,dv$ & $\frac{A}{2rr}$. Cependant le coëfficient $\frac{1}{2}$ me fait conjecturer, que cette quantité $\frac{A}{2rr}$ pourroit être originairement une formule intégrale, comme $\int \frac{A}{r}\,d\,\frac{1}{r}$, forme qui approche déjà fort de celle $\int V\,dv$. De plus on voit trés clairement que $\frac{A}{r}$ répond à V, car comme V ſignifie la quantité de la force dont l'élément Mm eſt ſollicité dans la direction MC, ainſi $\frac{A}{r}$ marque la quantité de la force de l'élaſticité au point M. Mais il n'eſt pas encore clair, comme le differentiél de $\frac{1}{r}$ puiſſe répondre à dv: neantmoins l'analogie paroitra, dés qu'on fera ces réfléxions. Le differentiel dv pris negativement marque l'eſpace par lequel le point M ſeroit transporté, s'il obeïſſoit tant ſoit peu à la ſollicitation de la force V: voyons donc ſi le differentiél $d\frac{1}{r}$ pourra ſignifier le même effet par rapport à l'élaſticité.

La force de l'élaſticité $\frac{A}{r}$ tend à remettre le fil ſelon une ligne droite, ou à en diminuer la courbure. Soit donc O le centre de la courbure de l'élément M$m = ds$, qui de la ſituation droite $m\mu$ differe de l'angle M$m\mu$ = MOm; ſoit cet angle MO$m = d\varphi$, & puiſque MO = mO = r, il ſera $d\varphi = \frac{ds}{r}$; Or la courbure de l'élément M$m = ds$ ſe meſure par l'angle MO$m = d\varphi$, & abſolument ſans avoir égard à la quantité de l'élément M$m = ds$ cette meſure ſera = $d\varphi$ Fig. 4.

$\frac{d\Phi}{ds} = \frac{1}{r}$. Donc pour peu que l'élaſticité produiſe un effet, cette quantité $\frac{1}{r}$ en ſera diminuée ; & partant il eſt clair, que le differentiel de cette quantité $\frac{1}{r}$ pris négativement, repréſente le chemin, que la force de l'élaſticité fait decrire à l'élément Mm, dès qu'elle produit quelque effet : d'où l'on voit clairement, que ce que le differentiel dv marque par rapport à la force V, revient au même, que le differentiel de $\frac{1}{r}$ ou $d.\frac{1}{r}$ ſignifie par rapport à la force de l'élaſticité $\frac{A}{r}$: & comme V eſt une fonction de v, de même la force de l'élaſticité $\frac{A}{r}$ eſt une fonction de la quantité $\frac{1}{r}$, dont le differentiel répréſente l'action inſtantanée. De là on pourra tirer cette régle pour trouver la quantité d'action de la force de l'élaſticité : Soit T la force de l'élaſticité, que nous avons ſuppoſée $= \frac{A}{r}$, & que T ſoit une fonction quelconque de r ou de $\frac{1}{r}$: qu'on multiplie cette force T par le differentiel de $\frac{1}{r}$ ou par dt, ſuppoſant $t = \frac{1}{r}$ pour trouver l'intégrale $\int T\,dt$, qui étant multipliée par la maſſe de l'élément Mm, qui ſoit ds ou $S.ds$, l'intégrale du produit $\int ds \int T\,dt$ donnera la quantité d'action de la force de l'élaſticité. Où il eſt evident, que cette régle eſt préciſément la même, que celle que nous avons trouvée pour les autres forces, dont le fil puiſſe être ſollicité. Par conſéquent la régle, que Mons. *de Maupertuis* a donnée dans les Mem. de l'Acad. de Paris eſt beaucoup plus générale, qu'on pourroit penſer, puiſqu'elle s'etend non ſeulement à toutes ſortes de forces, qui ſont dirigées vers des centres fixes, mais auſſi aux forces d'elaſticité ; & il n'y a aucun doute, qu'elle ne ſoit encore plus générale.

REFLE-

RÉFLEXIONS
SUR QUELQUES LOIX GÉNÉRALES DE LA NATURE QUI S'OBSERVENT DANS LES EFFETS DES FORCES QUELCONQUES,

PAR M. EULER.

I.

Ayant examiné dans le Mémoire précedent la figure que doit prendre un fil, ſoit parfaitement flexible, ou doüé de quelque roideur, étant ſollicité par des forces quelconques dirigées vers autant de points fixes, qu'on voudra; j'ai recherché les formules, dont la valeur eſt la plus petite dans cette figure, de ſorte que, ſi l'on connoiſſoit d'ailleurs ces formules, on pourroit par la methode des plus grands & des plus petits trouver la même figure d'un tel fil, ſans avoir égard aux principes directs de la Mecanique, ſur leſquels cette recherche eſt fondée. Comme il y a longtems, que les Philoſophes ſoutiennent avec bien de la raiſon, que la nature dans toutes ſes productions affecte conſtamment un certain *minimum*, ce que Monſieur *de Maupertuis* a mis tout à fait hors de doute dans quelques Mémoires, qu'il a donnés, tant ſur l'état d'equilibre des corps, que ſur celui de mouvement; nous nous trouvons en état d'aſſigner ce *minimum* pour les figures des fils ſollicités par des forces quelconques. Mais puisque j'ai été con-

conduit à la connoiſſance de ce *minimum a poſteriori*, il s'agit maintenant de découvrir les raiſonnemens, qui nous puiſſent conduire *à priori* à la même connoiſſance: ou bien il faut rechercher les principes, desquels on pourroit conclure ce *minimum*, quand même on ne connoitroit pas encore la courbe, que le fil prend actuellement. Ces principes une fois découverts ne manqueront pas de répandre beaucoup de lumiére ſur les loix que la nature obſerve dans un nombre infini de ſes autres productions, pour la détermination desquelles la Mecanique même n'eſt pas encore portée à un degré ſuffiſant de perfection; & il n'y a aucun doute, que la Metaphyſique ne puiſſe tirer de cette découverte quantité d'éclairciſſemens ſur la maniere d'agir des forces en général.

II. Pour mieux réüſſir dans cette recherche, il faut commencer par la même conſideration, dont Mr. de *Maupertuis* s'eſt ſervi pour établir ſa loi générale du repos: car cette conſidération nous conduira à une idée plus preciſe & plus feconde de ce qu'on doit entendre par *la quantité d'action des forces*. Nous verrons que la choſe nommée par ce terme eſt de la derniere importance dans toutes les actions des forces, ſoit que les corps, qui en ſont ſollicités demeurent en équilibre, ou qu'ils ſoient mis en mouvement, ce que je ferai voir par pluſieurs preuves trés convainquantes. Aprés cela on conviendra aiſement que cette quantité d'action des forces doit entrer dans toutes les formules, dont la valeur eſt la plus petite dans les effets, qui ſont produits par ces forces. C'eſt une régle aſſés généralement reçuë, que la nature dans toutes ces productions n'emploie que la plus petite quantité d'action, qu'il ſoit poſsible; mais dans la pluspart des cas il a été jusqu'ici extrémement difficile de bien déterminer cette quantité d'action, pour l'epargne de laquelle la nature eſt ſi ſoigneuſe. Mais dès que nous nous ſerons formé une idée aſſés diſtincte de la quantité d'action des forces, que Mr. *de Maupertuis* a découverte ſi heureſement dans le cas d'équilibre, qu'il a traité, la pluspart des autres difficultés, que la diverſité des cas ſemble renfermer, diſparoitront bientot, & on ſera obligé de reconnoitre que cette idée eſt d'un uſage univerſel, tant dans la Mecanique, que dans toute

toute la Phyſique. Quand même on ne gouteroit pas les raiſonnemens, par leſquels je ferai l'application de cette idée à quantité d'effects produits par des forces quelconques, on ſera obligé d'en reconnoitre la ſolidité par un grand nombre de cas, qu'on eſt en état de verifier par les principes ordinaires de la Mecanique.

III. C'eſt la figure, que doit prendre une maſſe fluide, dont toutes les particules ſont ſollicitées par des forces quelconques, qui a été le principal objet des recherches de Mr. *de Mauperruis*, pour découvrir la loi générale du repos dans les Mémoires de l'Academie Royale des Sciences de Paris de l'An. 1740. Je conſidererai donc de même une maſſe fluide dont toutes les particules ſont attirées vers autant de centres fixes, qu'on voudra, par des forces, qui ſont proportionelles à des fonctions quelconques des diſtances à ces centres, & je rechercherai premierement la figure, que doit prendre cette maſſe fluide, afin qu'elle ſoit en repos, ou en équilibre. De là je tacherai enſuite de découvrir ce qui ſera dans cette figure un *maximum*, ou un *minimum*, pour être d'autant mieux en état de déterminer ce qu'il faut entendre ſous le nom de la *quantité d'action des forces ſollicitantes*, dont je ferai ſentir aprés, par quelques reflexions, la derniere importance dans toutes les recherches où il s'agit des effets produits par des forces quelconques. D'abord il eſt évident que, pour qu'une telle maſſe fluide ſoit en équilibre, il faut que la moyenne direction des forces, dont chaque particule, qui ſe trouve à la ſurface, eſt ſollicitee, ſoit perpendiculaire à la ſurface : car ſi la moyenne direction étoit oblique à la ſurface, la particule qui en étoit ſollicitée, ſuivroit cette direction oblique ſelon la tangente, & partant la maſſe ne ſeroit point en équilibre. Donc, pour entrer dans cette recherche, je commencerai par déterminer en général la poſition de la ligne perpendiculaire à une ſurface quelconque.

PROBLEME I.

IV. *Une ſurface quelconque étant propoſée ſur laquelle ſe trouve le point* Z, *trouver la poſition de la ligne* ZP, *qui eſt perpendiculaire à cette ſurface au point* Z. Fig. 1.

SOLU-

SOLUTION.

Pour exprimer la nature de cette ſurface, je choiſis à volonté trois axes AB, AC, AD perpendiculaires entr'eux, dont les deux AB & AC ſoient pris dans le plan de la planche, & le troiſiéme AD y ſoit perpendiculaire. Du point quelconque de cette ſurface Z je tire ſur le plan BAC la perpendiculaire ZY, & du point Y à l'axe AB la perpendiculaire YX, de ſorte que la poſition du point Z ſoit déterminée par les trois coordonnées AX, XY & & YZ, que je nommerai $AX = x$, $XY = y$, & $YZ = z$. Maintenant la nature de la ſurface étant exprimée par une équation quelconque entre ces trois coordonnées x, y, z, je n'ai qu'à en conſidérer la differentielle, qui ſoit :

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0$$

les lettres X, Y, Z marquant des fonctions quelconques des coordonnées x, y, z, qui peuvent réſulter de la differentiation de l'équation en termes finis. A preſent je conſidere premierement la figure EZ, qui réſulte, lorsqu'on coupe la ſurface propoſée par le plan IYZ parallele au plan BAD. La nature de cette ligne courbe EZ ſera donc exprimée par l'équation donnée, ſi l'on poſe XY = y conſtante & partant ſon differentiel $dy = 0$, de ſorte que pour cette courbe EZ nous aurons cette équation $X\,dx + Z\,dz = 0$ entre les deux coordonnées $IY = x$ & $YZ = z$. Soit la ligne ZM perpendiculaire à cette ſection EZ, & on ſait que la ſounormale YM ſera $= \frac{z\,dz}{dx}$; or puisque $\frac{dz}{dx} = -\frac{X}{Z}$ nous aurons $YM = -\frac{Xz}{Z}$. Qu'on tire ſur le plan BAC, auquel la ſection IYZ eſt perpendiculaire, par le point M la ligne MP perpendiculaire à YM, & il eſt clair que toutes les lignes tirées du point Z à cette droite MP ſeront également perpendiculaires à la ſection EZ. Par conſéquent parmi ces lignes ſera compriſe celle ZP, qui eſt perpendiculaire, non ſeulement à la ſection EZ, mais auſſi à la ſurface propoſée même. Pour trouver cette perpendiculaire cherchée ZP, je coupe pareillement

ment la ſurface propoſée par un plan XZ parallele au plan CAD, & ſuppoſant FZ la ſection, qui en réſulte, ſa nature ſera exprimée par l'équation générale, en faiſant AX $= x$ conſtante, & partant $dx = o$. Donc l'équation pour la ſection FZ ſera $Y\,dy + Z\,dz = o$. entre ſes coordonnées XY $= y$ & YZ $= z$. Qu'on tire de même à cette ſection FZ la perpendiculaire ZN, & on voit que la ſou-normale ſera $YN = \frac{z\,dz}{dy} = -\frac{Y\,z}{Z}$. Tirant donc par N à YN la perpendiculaire NP dans le plan BAC auquel la ſection FZ eſt perpendiculaire, toutes les lignes tirées du point Z à la ligne NP ſeront également perpendiculaires à la ſection FZ. Par conſéquent ſi de l'interſection P des lignes MP & NP nous tirons la ligne PZ, elle ſera perpendiculaire à l'une & à l'autre des ſections EZ & FZ, & partant elle ſera perpendiculaire à la ſurface propoſée même EZF. Donc le point P dans le plan BAC, où la perpendiculaire cherchée ZP rencontre ce plan, ſe trouvera ſi on prend $YM = -\frac{Xz}{Z}$ & $YN = -\frac{Yz}{Z}$, & qu'on acheve le parallelogramme YMPN, dont le quatrieme angle P ſera au point cherché. Or il eſt clair, qu'ayant pour la ſurface l'équation differentielle $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = o$, on en tirera les valeurs des lignes YM & YN en termes finis. Ce qu'il ſaloit trouver.

PROBLEME II.

V. *Trouver la nature des forces, qui peuvent agir ſur le point Z d'une ſurface propoſée, afin que leur moyenne direction ſoit perpendiculaire à cette ſurface.*

SOLUTION.

Soit comme auparavant $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = o$ l'équation differentielle, qui exprime la nature de la ſurface propoſée entre les trois coordonnées AX $= x$, XY $= y$ & YZ $= z$. Cela poſé, de quelques forces que ſoit ſollicité le point Z, elles peuvent toujours être

réduites à trois, ſelon des directions paralleles aux trois axes AB, AC, AD. Soit Q la force, qui agit ſelon la direction parallele à AB, R la force qui agit ſelon AC, & S celle qui agit ſelon AD, de ſorte que ces forces tendent à augmenter les valeurs des variables x, y, z. Parce que la moyenne direction de ces forces doit être perpendiculaire à la ſurface, elle tombera dans la ligne ZP, dont nous venons de déterminer la poſition, ayant trouvé $YM = -\frac{X z}{Z}$, & $YN = -\frac{Y z}{Z}$. Soit donc P la force, qui agiſſant dans la direction ZP ſoit équivalente aux trois forces propoſées Q, R, S. Or cette force P étant décompoſée ſelon les directions ZY & YP, donnera pour la direction ZY la force $= \frac{YZ}{ZP} P$, & pour la direction parallele à YP la force $= \frac{YP}{ZP} P$; celle-cy ſe decompoſera encore ſelon les directions YM & YN, & pour la direction YM nous aurons la force $\frac{YM}{ZP}. P$, & pour l'autre direction YN la force $= \frac{YN}{ZP}. P$. Donc la force P ſera reſoluë en trois, ſuivant des directions paralleles aux trois axes AB, AC, AD, dont la premiere qui agit parallelement à AB ſera $= \frac{YM}{ZP}. P$; la ſeconde, qui agit parallelement à AC ſera $= \frac{YN}{ZP}. P$; & la troiſieme, qui agit parallélement à AD ſera $= -\frac{YZ}{ZP}. P$; puisque la direction ZY de la derniere eſt contraire à celle de l'axe AD, auquel nous la rapportons. Donc, afin que la force P perpendiculaire à la ſurface ſelon ZP ſoit équivalente aux forces propoſées Q, R, S, il faut que celles-cy ſoient égales reſpectivement à ces trois, dans leſquelles nous venons

nons

nons de réſoudre la force P. Et partant nous en obtiendrons ces égalités

$$Q = \frac{YM}{ZP}\cdot P;\ R = \frac{YN}{ZP}\cdot P \ \&\ S = -\frac{YZ}{ZP}\cdot P.$$

Or ayant trouvé $YM = -\frac{Xz}{Z}$, & $YN = -\frac{Yz}{Z}$, à cauſe de $YZ = z$ nous aurons $YP = \frac{z}{Z}\sqrt{(XX+YY)}$ & $ZP = \frac{z}{Z}\sqrt{(XX+YY+ZZ)}$. Soit pour abréger $\sqrt{(XX+YY+ZZ)} = W$, & ayant $ZP = \frac{Wz}{Z}$ les trois égalités trouvées ſe changeront en celles-cy :

$$Q = -\frac{X}{W}\cdot P;\ R = -\frac{Y}{W}\cdot P \ \&\ S = -\frac{Z}{W}\cdot P$$

Par conſéquent les trois forces Q, R, S, qui agiſſent ſuivant les directions des trois coordonnées x, y, z, ſeront entr'elles comme les quantités X, Y, Z, qui ſe trouvent dans l'équation differentielle $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = o$ qui exprime la nature de la ſurface, C. Q. F. T.

Problème III.

VI. *Trouver la figure, à laquelle ſera reduite une maſſe fluide, dont toutes les particules ſeront ſollicitées par des forces quelconques.*

Solution.

Soit Z un point dans la ſurface de cette maſſe fluide dont nous cherchons la figure, ou ce qui revient au même, il s'agit de trouver une équation entre les trois coordonnées $AX = x$, $XY = y$ & $YZ = z$, laquelle exprime la nature de la ſurface de la maſſe fluide propoſée. Soit la differentielle de cette équation, que nous cherchons: $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = o$. Maintenant de quelques forces que ſoit ſollicité le point Z, elles ſe pourront reduire ſelon les directions

de nos trois coordonnées. Soit donc Q la force qui agit ſelon la direction parallele à A X, R la force qui agit ſelon la direction parallele à X Y, & S celle, qui agit dans la direction Y Z. Cela poſé pour que la maſſe fluide ſoit en équilibre il faut que la moyenne direction de ces trois forces ſoit perpendiculaire à la ſurface. Pour cet effet nommant P la force équivalente aux trois forces données Q, R, & S, laquelle doit agir perpendiculairement à la ſurface, & pour abréger $W = \sqrt{(XX + YY + ZZ)}$, la ſolution du probleme précedent nous fournira les équations ſuivantes,

$$Q = -\frac{X}{W}.P;\ R = -\frac{Y}{W}.P;\ S = -\frac{Z}{W}.P$$

Desquelles nous tirerons $X = -\frac{W}{P}.Q;\ Y = -\frac{W}{P}.R$ & $Z = -\frac{W}{P}.S$: ces valeurs étant ſubſtituées dans l'équation $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = o$, qui doit exprimer la nature de la ſurface que nous cherchons, nous en obtiendrons cette équation :

$$Q\,dx + R\,dy + S\,dz = o$$

D'où l'on voit, que connoiſſant les forces Q, R, S, qui agiſſent ſur chaque point de la maſſe fluide ſuivant les directions des trois coordonnées x, y, z, il n'y a rien de plus aiſé que d'aſſigner l'equation differentielle, qui exprimera la nature de la figure de la maſſe fluide, qu'il faloit chercher. Or la force équivalente aux trois forces Q, R, S, qui agiſſent enſemble ſur le point Z, ſera $P = \sqrt{(QQ + RR + SS)}$, laquelle aura ſa direction perpendiculaire à la ſurface : & pour trouver la ſituation de cette direction Z P, nous n'avons qu'à prendre $Y\,M = -\frac{Q\,z}{S}$, & $Y\,N = -\frac{R\,z}{S}$, pour en remplir le parallelogramme rectangle Y M P N, dont l'angle P donnera le lieu du point P, où la perpendiculaire Z P à la ſurface rencontre le plan B A C. Du reſte il faut remarquer que, pour que la figure ſoit poſſible, les forces Q, R, S, doivent être telles fonctions de x, y, z, afin que l'équation

tion $Q\,dx + R\,dy + S\,dz = o$ puiſſe être reduite à des quantités finies.

VII. On ſait qu'une équation differentielle, qui ne tenferme que deux variables, eſt toujours poſſible, ou qu'il y a toujours une équation en termes finis entre les mêmes quantités variables, qui étant differentiée produiſe l'équation differentielle propoſée, quoique même ſort ſouvent on ne ſoit pas en état de trouver cette équation integrale. Mais il n'en eſt pas de même des équations differentielles qui renferment trois quantités variables, comme x, y & z: car il y a quantité de cas où il eſt abſolument impoſſible, qu'une telle équation puiſſe réſulter par la differentiation d'une équation exprimée en termes finis. Un exemple d'une telle équation impoſſible eſt $x\,dx + y\,dy + x\,dz = o$: car puisque les deux premiers membres $x\,dx + y\,dy$ ſont integrables d'eux mêmes, il n'eſt pas poſſible de trouver un facteur, par lequel l'equation étant multipliée devienne integrable. On a même déjà decouvert les conditions, ſous leſquelles une telle équation devient poſſible ou impoſſible: & Mons. *Clairaut* & *d'Alembert* ont démontré qu'une équation de cette forme $Q\,dx + R\,dy + S\,dz = o$ n'eſt poſſible, que dans les cas où il y aura:

$$Q\left(\frac{dR}{dz} - \frac{dS}{dy}\right) + R\left(\frac{dS}{dx} - \frac{dQ}{dz}\right) + S\left(\frac{dQ}{dy} - \frac{dR}{dx}\right) = o.$$

Dans cette équation la formule $\frac{dR}{dz}$ marque le differentiel de la fonction R, en ne ſuppoſant que z variable, dont le differentiel dz eſt détruit par le denominateur dz. De même la valeur de $\frac{dS}{dy}$ ſe trouvera en ſuppoſant la ſeule y variable dans la differentiation de S: & pour trouver la valeur de $\frac{dS}{dx}$, dans la differentiation de S il ne faut ſuppoſer que x variable, en ſorte que ces expreſſions $\frac{dR}{dz}$, $\frac{dS}{dy}$, $\frac{dS}{dx}$, $\frac{dQ}{}$

$\frac{d\,Q}{d\,z}$ &c. ne renfermeront que des quantités finies, puisque les dénominateurs détruisent les differentiels des numerateurs. Donc toutes les fois que la proprieté contenüe dans cette équation n'aura pas lieu entre les fonctions Q, R, S, l'équation $Q\,dx + R\,dy + S\,dz = o$ sera impossible ; & dans ces cas la masse fluide ne sauroit jamais parvenir à l'état de l'équilibre, comme a fort bien remarqué Mons. *Clairaut*, dans son Traité sur la figure de la terre.

VIII. Le cas le plus évident, auquel l'équation $Q\,dx + R\,dy + S\,dz = o$ devient possible, est si Q est une fonction de x, R une fonction de y, & S une fonction de z : car alors chaque membre de l'equation sera intégrable à part. Donc si chaque particule de la masse fluide est sollicitée de trois forces Q, R, & S, suivant les directions des trois axes AB, AC & AD, ou des trois coordonnées x, y & z: & que la force Q, qui agit dans la direction de x, soit exprimée par une fonction quelconque de x, la force R qui agit dans la direction de y par une fonction de y, & la force S par une fonction de z, alors l'équation differentielle $Q\,dx + R\,dy + S\,dz = o$ étant intégrable, la figure de la masse fluide sera exprimée par cette équation intégrale.

$$\int Q\,dx + \int R\,dy + \int S\,dz = A$$

où A marque une quantité constante, que la quantité du fluide déterminera. Dans ce cas donc la masse fluide sera réduite à l'état de l'equilibre, & à chaque point de sa surface la valeur de cette formule $\int Q\,dx + \int R\,dy + \int S\,dz$ sera la même. Or si nous envisageons en général la nature de l'équilibre, nous appercevrons aisément, qu'elle exige de toutes parts une égalité dans l'action des forces, quoique nous ne sachions d'abord comme il faut estimer cette action des forces. Mais voyant dans le cas proposé, que c'est cette quantité $\int Q\,dx + \int R\,dy + \int S\,dz$ qui est par tout la même, nous en conclurrons surement, que cette même formule représente la quantité d'action des forces, qui dans l'équilibre doit partout être la même. Donc la quantité d'action des forces Q, R, S, qui agissent sur le point Z de la maniere que je viens de supposer, sera $= \int Q\,dx + \int R\,dy + \int S\,dz$:

dz: formule qui eſt parfaitement conforme aux principes de Mons. *de Maupertuis*, & dont je ferai voir plus clairement la force & l'importance dans les réflexions ſuivantes.

PROBLEME IV.

IX. *Une maſſe fluide étant attirée vers pluſieurs centres fixes* C, C′, C″ *par des forces proportionelles à des fonctions quelconques des diſtances, trouver la figure, à laquelle cette maſſe fluide ſera réduite.* Fig. 2.

SOLUTION.

Soit Z un point quelconque dans la ſurface de la maſſe fluide propoſée, dont les diſtances aux centres fixes C, C′, C″ ſoient nommées C Z $=v$, C′ Z $=v'$, C″ Z $=v''$, & les forces dont ce point Z eſt attiré vers ces centres ſoient des fonctions quelconques de ces diſtances V, V′, V″, la force V qui tire dans la direction Z C, étant une fonction quelconque de v, la force V′ dans la direction Z C′ une fonction de v', & la force V″ dans la direction Z C″ une fonction de v''. Cela poſé, qu'on choiſiſſe comme auparavant trois axes perpendiculaires entr'eux, auxquels on tire du point Z les droites paralleles Z Q, Z R, Z Y, ſuivant leſquelles on décompoſe les forces V, V′, V″ qui agiſſent ſur le point Z. Pour cet effet on n'a qu'à concevoir des plans paralleles au plan Q Z R, qui paſſent par les points C, C′, C″, leſquels feront traverſés perpendiculairement par la droite Z Y aux points Y, Y′, Y″, & dans ces plans on tire les droites C X, C′ X′ C″ X″ paralleles à Z Q, & à celles-cy les perpendiculaires Y X, Y′, X′, Y″ X″, qui ſeront paralleles à Z R. Maintenant on aura pour chaque centre C, C′, C″ trois coordonnées qu'on nommera: pour le centre C; C X $=x$, X Y $=y$ & Y Z $=z$: pour le centre C′; C′ X′ $=x'$, X′ Y′ $=y'$ Y′ Z $=z'$ & pour le centre C″; C″ X″ $=x''$; X″ Y″ $=y''$ & Y″ Z $=z''$. De ces coordonnées nous obtiendrons d'abord ces équations $vv = xx + yy + zz$; $v'v' = x'x' + y'y' + z'z'$ & $v''v'' = x''x'' + y''y'' + z''z''$. Et puiſque les variables x, x' x'' ne different entr'elles que des quantités conſtantes, leurs differentiels ſeront égaux entr'eux d'où nous aurons $dx = dx' = dx''$, & par la même raiſon:

dy

$dy = dy' = dy''$; & $dz = dz' = dz''$. Maintenant la force $ZC = V$ étant décompoſée ſuivant les directions ZQ, ZR & ZY, donnera ces trois forces

$$ZQ = \frac{Vx}{v},\ ZR = \frac{Vy}{v} \&\ ZY = \frac{Vz}{v}$$

De la force ZC' réſulteront ces trois forces

$$ZQ = \frac{V'x'}{v'};\ ZR = \frac{V'y'}{v'},\ \&\ ZY = \frac{V'z'}{v'}$$

& de la force ZC'' ces trois

$$ZQ = \frac{V''x''}{v''};\ ZR = \frac{V''y''}{v''} \&\ ZY = \frac{V''z''}{v''}$$

Dont de l'action commune de ces trois forces le point Z ſera ſollicité

ſuivant la direction	par la force
ZQ	$\frac{Vx}{v} + \frac{V'x'}{v'} + \frac{V''x''}{v''}$
ZR	$\frac{Vy}{v} + \frac{V'y'}{v'} + \frac{V''y''}{v''}$
ZY	$\frac{Vz}{v} + \frac{V'z'}{v'} + \frac{V''z''}{v''}$

Ces forces agiſſant ſelon des directions contraires à celles que nous avons données aux forces Q, R, S dans le probleme precedent, ſi nous ferons l'application, nous aurons :

$$Q = -\frac{Vx}{v} - \frac{V'x'}{v'} - \frac{V''x''}{v''}$$

$$R = -\frac{Vy}{v} - \frac{V'y'}{v'} - \frac{V''y''}{v''}$$

$$S = -\frac{Vz}{v} - \frac{V'z'}{v'} - \frac{V''z''}{v''}$$

Or

Or la nature de la ſurface de cette maſſe fluide ſera exprimée par cette équation $Q\,dx + R\,dy + S\,dz = o$. Mais ſubſtituant les valeurs trouvées pour Q, R, S, nous obtiendrons en changeant les ſignes cette équation.

$$\left.\begin{aligned} &+\frac{V\,x\,dx}{v} + \frac{V'x'\,dx'}{v'} + \frac{V''x''\,dx''}{v''} \\ &+\frac{V\,y\,dy}{v} + \frac{V'y'\,dy'}{v'} + \frac{V''y''\,dy''}{v''} \\ &+\frac{V\,z\,dz}{v} + \frac{V'z'\,dz'}{v'} + \frac{V''z''\,dz''}{v''} \end{aligned}\right\} = o$$

Or les premieres formules, qui expriment les valeurs des diſtances v, v' v'' fourniſſent

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = v\,dv$$
$$x'\,dx' + y'\,dy' + z'\,dz' = v'\,dv'$$
$$x''\,dx'' + y''\,dy'' + z''\,dz'' = v''\,dv''$$

Par conſéquent la figure de la maſſe fluide ſera exprimée par cette équation $V\,dv + V'\,dv' + V''\,dv'' = o$ dont chaque terme eſt integrable de lui même, & partant nous aurons pour la figure cherchée cette équation integrale : $\int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv'' = \text{Conſt.}$ P. Q. F. T.

X. La même équation ſe peut auſſi trouver, ſans qu'on ait égard à la poſition des trois axes, laquelle eſt arbitraire, & ne ſe trouve plus dans l'équation finale. Nous n'avons qu'à conſiderer un élément infiniment petit $Z\,z$, conçu d'une maniere quelconque depuis le point Z ſur la ſurface de la maſſe fluide, & il eſt d'abord clair, que pour que le point Z puiſſe être en équilibre ou demeurer en repos, il faut que les forces, qui ſollicitent le point Z ſelon la direction $Z\,z$ évanouïſſent, àpres avoir decompoſé les forces V, V', V'', qui y agiſſent, ſelon cette direction $Z\,z$, & d'autres qui y ſont perpendiculaires. Car ſi les forces ſuivant $Z\,z$ ne ſe detruiſoient pas mutuelle-

ment, rien n'empêcheroit, que le point Z ne ſe mût actuellement ſuivant cette direction & partant la maſſe fluide ne ſeroit pas en équilibre. On nomme ces forces *tangentielles*, qui réſultent de cette décompoſition ſelon la direction de l'élément $Z z$; ce ſeront donc ces forces tangentielles, qui doivent ſe detruire mutuellement, ou dont la ſomme doit être $= o$. Pour trouver ces forces tangentielles, je mene du point z ſur les diſtances C Z, C' Z, C'' Z les perpendiculaires $z t$, $z t'$, $z t''$, & nommant l'élément $Z z = d s$, nous aurons $Z t = - d v$, $Z t' = - d v'$ & $Z t'' = - d v''$. La reſſemblance des triangles élémentaires $Z z t$, $Z z' t'$, $Z z'' t''$ aux triangles, qui ſe forment en baiſſant des perpendiculaires des points C, C', C'' ſur la tangente ou l'élément $Z z$ prolongé, donnera les forces tangentielles, qui réſultent de chacune des forces V, V', V'' & de la force V on obtiendra la force tangentielle $= - \frac{V d v}{d s}$, de la force V' proviendra la force tangentielle $- \frac{V' d v'}{d s}$ & de la force V'' celle-cy $- \frac{V'' d v''}{d s}$. Donc puis que la ſomme de ces forces tangentielles doit être égale à o, nous aurons pour la figure de la maſſe fluide cette équation $- \frac{V d v}{d s} - \frac{V' d v'}{d s} - \frac{V'' d v''}{d s} = o$, ou bien celle-cy $V d v + V' d v' + V'' d v'' = o$, dont l'integrale ſera :

$$\int V d v + \int V' d v' + \int V'' d v'' = C.$$

qui eſt la même équation, à laquelle nous a conduit la ſolution precedente.

XI. La maſſe fluide donc étant ſollicitée par ces forces V, V', V'', que nous venons de conſiderer, parviendra dans un état d'équilibre, & la figure qu'elle prendra alors, aura cette proprieté que pour chaque point Z de ſa ſurface la valeur de cette expreſſion $\int V d v + \int V' d v' + \int V'' d v''$, ſera partout la même. Donc puiſque l'état d'équilibre exige de toutes parts une égalité d'action, il eſt d'abord clair

que

que cette même formule nous exprimera la quantité d'action, qui par ſon égalité ſe contrebalance de tous cotés ; & on ne ſauroit douter, que cette formule, $\int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv''$ ne fût la vraie meſure de la quantité d'action des forces, qui agiſſent ſur la maſſe fluide, quand même on n'auroit point d'autres raiſons, par leſquelles on ſeroit en état de determiner cette meſure. Or Mr. *de Maupertuis*, dans ſon excellente piece ſur les loix du repos, a expliqué les principes, desquels il a tiré precisément la même meſure de la quantité d'action des forces : & ces principes lui ont fourni pour ce cas d'équilibre d'une maſſe fluide la même formule $\int V\,dv + \int V'dv' + \int V''dv''$, ſans qu'il ait été obligé d'avoir recours aux principes ordinaires de la Mecanique. De là on tirera la régle ſuivante pour trouver la quantité d'action des forces, qui agiſſent ſur un point quelconque Z : *Qu'on multiplie chaque force* V *par le differentiel de la ligne* Z C $=$ *v, ſuivant la direction de laquelle cette force agit, du produit* V *dv qu'on prenne l'integrale, & la ſomme de toutes ces integrales* $\int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv''$ *donnera la quantité d'action de toutes ces forces ſur le point* Z. Cette régle, qui coule immédiatement des principes de Mr. *de Maupertuis*, eſt donc parfaitement d'accord avec la ſolution, que je viens de déduire des principes ordinaires de la Mecanique.

XII. Mr. *de Maupertuis* dans ſes réfléxions ſur cette matiére eſt encore allé plus loin, & a ſoutenu que non ſeulement la quantité d'action des forces, qui agiſſent ſur toutes les particules de la ſurface d'une maſſe fluide, étoit partout la meme ; mais que ſa valeur étoit encore la plus petite, qu'il ſoit poſſible. Cette proprieté ſi convenable aux loix générales de la nature, qui affecte conſtamment de produire ſes effets à moindres fraix, eſt auſſi une ſuite fort naturelle de la ſolution, que je viens de trouver. Car puisque la valeur de cette expreſſion $\int V\,dv + \int V'dv' + \int V''\,dv''$ eſt partout la même, ſon differentiel ſera égal à zero, ou $V\,dv + V'\,dv' + V''\,dv'' = o$. Or on ſait que, pour que la valeur d'une quantité variable ſoit la plus grande, ou plus petite, il faut, que ſon differentiel ſoit $= o$. Donc reciproquement, puisque dans la figure de la maſſe fluide le differentiel $V\,dv + V'\,dv' + V''\,dv''$ eſt $= o$, on pourra dire, qne ſon inté-

gral $\int V dv + \int V' dv_{,} + \int V'' dv''$ y eſt un *minimum*. Il eſt bien vrai que cette converſion n'eſt pas toujours juſte ; car, par exemple, dans un cercle dont la nature eſt exprimée par cette équation $xx + yy = aa$, quoique le differentiel de la quantité $xx + yy$ ſoit égal à zero, on ne ſauroit dire que la quantité $xx + yy$ même y étoit un *maximum*, ou *minimum*. Mais outre que le principe général de la nature exige que la quantité d'action, que cette formule $\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv''$ exprime, ſoit un *minimum*, de ſorte que l'exception tirée de l'exemple du cercle, n'y puiſſe pas avoir lieu, je m'en vai prouver cette concluſion par un cas tout particulier, dont l'evidence ſautera d'abord aux yeux.

XIII. Suppoſons que la maſſe fluide vienne à être diminuée à l'infini, deſorte qu'elle ſoit réduite à un ſeul point Z : on demandera donc où ce point Z doit être placé, afin qu'étant attiré vers les centres de forces C, C', C'', il ſoit en équilibre : & on s'appercevra dabord que ce lieu d'équilibre du point Z ſera là, où la quantité d'action de forces, ou la valeur de l'expreſſion $\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv''$ ſera la plus petite, Quand j'aurai prouvé cela, on ne fera aucune difficulté de reconnoitre, que pour le cas d'une maſſe fluide d'une étendue finie, le même raiſonnement n'ait lieu : & que puisque le differentiel de cette même formule eſt également zero, la valeur de cette formule n'y ſoit un *minimum*. Car ſi cette concluſion n'étoit pas juſte dans le cas d'une maſſe fluide, elle ne le ſeroit pas non plus dans le cas, où la maſſe fluide eſt reduite à un ſeul point. Or le cas de l'état d'équilibre d'un point, qui eſt ſollicité par des forces quelconques, que je m'en vai conſiderer, eſt celui d'où dépendent les premiers principes de la Statique, ſavoir la compoſition & la décompoſition des forces, dont la verité eſt par conſéquent d'autant moins aſſujetie à des doutes : quoique les demonſtrations qu'on en donne ordinairement ne ſoient pas aſſés rigoureuſes ; puisqu'on y fait entrer la conſideratiou du mouvement, qui paroit tout à fait étrangére dans ce cas, où il ne s'agit que de l'état du repos. Feu Monſieur *Nicolas Bernoulli* a bien fait ſentir ce defaut général dans le I. Tome des Comment. de l'Acad. de Petersbourg, où il a donné une fort belle

belle démonſtration de ce principe de la Statique, qui eſt auſſi ingenieuſe, que purement geometrique, & fondée ſur des axiomes inconteſtables.

XIV. Cependant je me flatte, qu'on trouvera la démonſtration ſuivante, que je donnerai de ce même principe, également convaincante, quoiqu'elle ſoit fondée ſur quelque principe tiré de la Metaphyſique. Soit un point quelconque Z, qui étant ſollicité par trois forces V, V′ V″ ſelon les directions Z C, Z C′ Z C″, ſe trouve actuellement en équilibre : & on ſoutient qu' alors ces trois forces ſeront entr'elles comme les ſinus des angles oppoſés C′ Z C″ ; C Z C″, C Z C′. Pour démontrer cette verité, de laquelle depend toute la Statique, au lieu des forces, je concevrai des fils élaſtiques égaux entr'eux, qui étant attachés aux lignes A B, A′ B′, A″ B″, & les tirant vers les parois immobiles E F, E′ F′, E″ F″ agiſſent ſur le point Z par le moyen des verges Z C, Z C′, Z C″ de la même maniere, que les forces propoſées V, V′, V″. Soit la force de chaque fil élaſtique, dont il tache de ſe contracter, = 1, & le nombre des fils, qui ſont attachés à la ligne A B pour l'approcher au parois E F, ſoit = V, afinque toute la force unie de ces fils élaſtiques devienne = V. & que le point Z par ce moyen ſoit ſollicité par la même force V dans la direction Z C. De même, ſoit le nombre des fils ſemblables attachés à la ligne A′ B′ = V′, & le nombre des fils attachés à la ligne A″ B″ = V″ afinque le point Z ſoit ſollicité ſuivant les directions Z C′ & Z C″ par les forces V′ & V″. Fig 3.

XV. Cela poſé il eſt clair que ces forces n'agiſſent qu' entant que les fils élaſtiques tachent de ſe raccourcir, & le point Z ne ſauroit être en repos, que lorsqu'il ſera impoſſible, que la contraction de tous ces fils enſemble ſe puiſſe augmenter davantage. On m'accordera donc ſans aucune difficulté, que le point Z ſera alors en équilibre, lorsque les fils ſe ſeront raccourcis autant qu'il ſera poſſible, ou lorsque la ſomme de tous les fils pris enſemble ſera la plus petite : car ſi le point Z pouvoit être trainé dans un autre endroit z, où le raccourciſſement des fils, conſiderés tous enſemble, ſeroit encore plus grand, il n'y a aucun doute, que les forces ne le tranſportaſſent dans

cet endroit là, avant que l'état d'équilibre arrive. Ce principe eſt ſi evident, que pour peu qu'on y réflechiſſe on ſera convaincu de ſa verité : puiſque ces fils ſe contracteront effectivement, tandis qu'une plus grande contraction ſera poſſible, & ils ne ceſſeront d'agir, qu'il ne s'oppoſe des obſtacles inſurmontables, qui rendront impoſſible une plus grande contraction. Donc, ſi nous nommons la longueur des fils élaſtiques A G $=x$, celle des fils A′ G′ $=x'$ & A″ G″ $=x''$, la longueur de tous les fils pris enſemble ſera $=Vx+V'x'+V''x''$, & celle-cy ſera par conſequent la plus petite, lorsque le point Z eſt réduit dans l'état d'équilibre.

XVI. Donc, ſi le point Z ſera transporté infiniment peu de l'endroit où il eſt en équilibre, la valeur de la formule $Vx+V'x'+V''x''$ demeurera encore la même, ou ſon differentiel $Vdx+V'dx'+V''dx''$ ſera égal à zero ; car je regarderai ici les forces V, V′ V″, comme conſtantes, de ſorte qu'elles n'augmentent ni ne diminuent, pendant que les fils élaſtiques s'allongent, ou ſe raccourciſſent : je fai cette hypotheſe, afin que le cas ſoit plus evident & moins embaraſſé, puiſqu'il ne ſera pas difficile enſuite de juger des cas, où les forces V, V′ V″ ſont elles-mêmes variables. Qu'on conçoive donc le point Z transporté en z par l'eſpace infiniment petit Z z, & comme un tel changement ſe peut faire d'une infinité de manieres, j'en choiſirai celui où le point z eſt également éloigné de A B, que le point Z, de ſorte que par ce changement les fils A G, B H ne ſouffrent aucune alteration. Mais comme le point Z par ce mouvement Z z s'eſt approché plus de E′ F′, & qu'il s'eſt éloigné plus de E″ F″, les fils A′ G′ B′ H′, ſe ſeront raccourcis, & les fils A″ G″, B″ H″ allongés : & partant la ligne A′ B′, à laquelle ſont attachés les fils, ſera parvenue en $a'b'$, & la ligne A″ B″ en $a'b''$: donc le raccourciſſement de ceux-là ſera $=A'a'$, & l'allongement de ceux-cy $=A''a''$. Or en vertu de la proprieté des plus petits, l'allongement total d'un coté V''. A″ a'' doit être égal au raccourciſſement de l'autre coté V′. A′ a'. Tirons les lignes z c'', z c' égales & paralleles aux lignes Z C′ & Z C″, & y ayant mené les perpendiculaires Z q, z p, le raccourciſſement A, a' ſera $=Z\,p$, & l'allongement A″ $a''=z\,q$, donc il y aura V′. Z p $=V''$.

$= V''.zq$, ce qui donnera cette proportion $V' : V'' = zq : Zp$. Or prenant Zz pour le ſinus total, zq ſera le ſinus de l'angle zZq, ou bien de CZC'' à cauſe des angles droits CZz & $C''Zq$; de même Zp ſera le coſinus de zZp & partant le ſinus de CZC', d'où il s'enſuit que les forces V' & V'' ſeront entr'elles comme les ſinus des angles CZC'' & CZC', & de là on tirera cette proportion connuë :

force ZC : force ZC' : force $ZC'' =$ ſin $C'ZC''$: ſin CZC'', ſin CZC'.

XVII. De cette nouvelle démonſtration du principe général de la Statique, en vertu duquel trois forces appliquées à un point ſont en équilibre, lorsque ces forces ſont entr'elles, comme les ſinus des angles oppoſés, on ſera convaincu, que non ſeulement la formule differentielle $V\,dx + V'\,dx' + V''\,dx''$ doit être $= o$, mais auſſi que la valeur de la formule finie $Vx + V'x' + V''x''$ y eſt la plus petite. J'ai ſuppoſé ici les forces V, V', V'' conſtantes, ou qu'elles demeurent les mêmes, quelque changement que ſubiſſent les fils élaſtiques que j'ai ſubſtitués à leurs places: mais la formule differentielle demeurera la même, quoique les forces ſoient variables : on n'a pour cet effet qu'à nommer les diſtances $ZC = v$, $ZC' = v'$ $ZC'' = v''$, & on aura $dx = -dv$, $dx' = -dv'$, $dx'' = -dv''$. De plus, ſi les forces V, V', V'' ſont des fonctions quelconques de ces diſtances v, v', v'', l'état d'équilibre du point Z donnera la même équation differentielle $V\,dv + V'\,dv' + V''\,dv'' = o$, qui a été trouvée dans la ſolution du probleme, & à préſent il n'y a aucun doute que ſon integral $\int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv''$ ne ſoit auſſi un *minimum*. Or ſi cette formule eſt un *minimum* dans le cas, où les forces n'agiſſent que ſur le ſeul point Z, elle ſera pareillement un *minimum* dans le cas d'une maſſe fluide quelconque, qui eſt ſollicitée par les mêmes forces. Par conſéquent, nous avons les plus fortes raiſons de ſoutenir, que la quantité d'action des forces V, V', V' ſur un point quelconque Z, doit être exprimée par cette formule $\int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv''$ puis-que cette formule ſe trouve, ſoit qu'on conſidere le point Z tout ſeul, ou qu'il appartienne à une maſſe fluide quelconque. Voilà donc un appuy inébranlable, ſur lequel eſt fondée la

règle

regle donnée cy-deſſus pour déterminer la quantité d'action des forces quelconques ſur un point donné.

XVIII. Les réfléxions ſuivantes mettront encore davantage dans tout ſon jour cette idée de la quantité d'action des forces, & on en entendra plus clairement la raiſon, pourquoi la quantité d'action des forces V, V′, V″ ſur le point Z doit être exprimée préciſément par la formule $\int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv''$. Dans la recherche précedente, où j'ai ſubſtitué des fils élaſtiques égaux entr'eux au lieu des forces V, V′, V″, l'état ou l'action de chaque force appliquée au point Z′ a été repreſentée par la ſomme des longueurs de tous les fils élaſtiques, qui tiennent lieu des forces: car nous avons vu, ſi la longueur des fils élaſtiques A G ſubſtitués à la place de la force V eſt nommée $= x$, & que V marque le nombre de ces fils, puisque la force de chacun a été poſée $= 1$; alors la ſomme totale de tous ces fils étoit $= V x$: ce ſera donc cette quantité $V x$, qui repréſente l'action de cette force V ſur le point Z, puisque $V x$ exprime l'état actuel de contraction des fils élaſtiques, de laquelle dépend l'action de la force V. Or poſant toute la diſtance du point Z aux parois immobiles E F $= v$, & la diſtance conſtante Z C $= a$, nous aurons $x = v - a$, & l'action de la force V ſera $= V (v - a)$ pourvu que que la force V ſoit conſtante, ou que ſa quantité ne dépende point de la diſtance v. Or en cas que la force V dépende de la diſtance v, ou ce qui revient au même de la longueur des fils élaſtiques x, alors le nombre des fils V ſeroit variable, & leur longueur totale ne ſeroit plus $V x$ ou $V (v - a)$, mais on s'appercevra aiſement que pour avoir cette longueur totale, il faudra prendre l'integrale de $V\,dx$ ou de $V\,dv$, y ayant égard à la variabilité de V. Ce ſera donc alors $\int V\,dv$, qui exprime la longueur totale des fils élaſtiques ſubſtitués au lieu de la force V, & partant il eſt évident que cette même formule $\int V\,dv$, exprimera auſſi la quantité d'action de la force V ſur le point Z; & on comprendra de même que la quantité d'action de pluſieurs forces V, V′, V″ ſera $= \int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv''$.

XIX.

XIX. Mais il y a plus : la formule $\int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv''$ eſt non ſeulement d'un ſi grand uſage dans l'état de repos, c'eſt auſſi d'elle que dépend principalement la determination du mouvement. Car ſuppoſons qu'un corps ſollicité vers les centres C, C', C'' par des forces V, V' V'' ait parcouru déjà l'arc A Z d'une courbe quelconque, ayant commencé ſon mouvement du repos en A : & ſoit u la viteſſe, que ce corps aura acquiſe au point Z : & $u+du$ celle qu'il aura au point z, aprés avoir parcouru l'élément d'eſpace, $Z\,z = ds$. Soient les diſtances du corps en Z aux centres C, C', C'' nommées $C\,Z = v$, $C'\,Z = v'$, $C''\,Z = v''$, & V, V', V'' les forces dont le corps eſt attiré à ces centres. Qu'on tire de z ſur les diſtances C Z, C' Z, C'' Z les perpendiculaires $z\,t$, $z\,t'$, $z\,t''$ & on aura $Z\,t = dv$, $Z\,t' = -dv'$, $Z\,t'' = -dv''$, d'où nous tirerons les forces tangentielles $-\frac{V\,dv}{ds}$, $-\frac{V'\,dv'}{ds}$; $-\frac{V''\,dv''}{ds}$, & partant le mouvement du corps, pendant qu'il parcourt l'élément $Z\,z = ds$ ſera acceleré par la force $-\frac{V\,dv - V'\,dv' - V''\,dv''}{ds}$, qui étant multipliée par l'eſpace ds ſera égale au produit dela viteſſe u par ſon differentiel du : deſorte que nous aurons cette équation $u\,du = -V\,dv - V'\,dv' - V''\,dv''$, dont l'integrale ſera $\frac{1}{2}uu = C - \int V\,dv - \int V'\,dv' - \int V''\,dv''$, où la conſtante C doit être priſe, en ſorte qu'au point A la viteſſe devienne $= o$. Donc le demi-quarré de la viteſſe au point Z, ou ce qui revient au même, la hauteur duë à la viteſſe ſera exprimée par la formule $C - \int V\,dv - \int V'\,dv' - \int V''\,dv''$, qui conſiſte de deux membres, dont le premier C dépend uniquement du point A où le mouvement a commencé; mais l'autre membre $-\int V\,dv - \int V'\,dv' - \int V''\,dv''$ dépend uniquement du point Z où le corps eſt parvenu. Par conſéquent la formule $\int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv''$, qui dans l'etat de repos marque la quantité d'action des forces ſur le point Z, exprime auſſi dans l'etat de mouvement la partie du quarré de la viteſſe, laquelle dépend du point Z, de ſorte que cette formule

Fig. 4.

mule eſt de la derniere importance, auſſi bien dans l'etat de repos, que dans celui de mouvement.

XX. Ayant donc établi la veritable idée de la quantité d'action des forces quelconques ſur un point donné, ſoit qu'il ſe trouve en repos, ou en mouvement, je ferai voir plus clairement le grand uſage de cette idée, en conſiderant pluſieurs centres fixes C, C', C'' &c. qui attirent à ſoi avec des forces V, V', V'' &c, proportionelles à des fonctions quelconques des diſtances v, v' v'', &c. de ſorte que la quantité d'action de ces forces ſur un point Z, dont les diſtances à ces centres ſont v, v', v'' &c. eſt $= \int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv''$ &c. Et d'abord pour trouver le lieu, où il faut placer un corps conſideré comme un point, afin qu'il demeure en repos, ou en équilibre, entre ces centres de forces, je viens de montrer que ce point cherché Z ſera là, où la valeur de cette formule $\int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv''$, ou la quantité d'action, eſt la plus petite. Par le moyen de cette proprieté on trouvera aiſement le lieu de ce point Z, en transportant ce point Z par un eſpace infiniment petit Z z, & ſuppoſant le differentiel $V\,dv + V'\,dv' + V''\,dv''$ + &c. égal à zero : comme j'ai fait voir dans le cas, où le point Z étoit ſollicité de trois forces. C'eſt de ce cas, que dépend la compoſition & la réſolution des forces, aquelle étant la baſe de toute la Statique, on voit que ce ſeul principe de la quantité d'action fournit le fondement de cette ſcience.

XXI. En ſecond lieu, ſi on conſidere une maſſe fluide dont toutes les particules ſont attirées à ces centres de forces, C, C', C'' &c. on trouvera encore la figure, que cette maſſe fluide prendra, par le ſeul moyen de la quantité d'action : car il faut, comme j'ai fait voir que la quantité d'action des forces ſoit la même partout, ſur chaque point de la ſurface de la maſſe fluide : ou la nature de cette ſurface ſera exprimée par cette équation :

$$\int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv'' + \text{&c.} = \text{Conſt.}$$

Ou bien cette maſſe fluide ne ſauroit être en repos, que dans un tel endroit & avec une telle figure, afin que la quantité d'action totale ſoit la plus petite qu'il eſt poſſible : *c. à. d.* pour que la maſſe fluide

ſoit

ſoit en équilibre, il faut que la valeur de cette formule $\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'' +$ &c. ſoit un *minimum*. C'eſt de ce principe que dépend toute l'hydroſtatique, ou la theorie de l'équilibre des liqueurs. Car ſi nous ne conſiderons qu'une ſeule force centrale, pour avoir le cas de la peſanteur naturelle, nous aurons pour l'état d'équilibre d'une maſſe fluide l'équation $\int V dv = C$, & puisque V eſt une fonction de v, la diſtance v ſera conſtante; donc tous les points de la ſurface fluide doivent être également éloignées du centre de la terre, ou la ſurface d'un fluide ſera horizontale.

XXII. Ce ne ſera pas donc ſeulement la quantité d'action des forces ſur un ſeul point Z, qui eſt la plus petite, mais on reconnoitra aiſement que dans une maſſe fluide, qui eſt en équilibre, la ſomme totale de toutes les quantités d'action des forces ſur tous les élémens de la maſſe fluide doit être un *minimum*. Ainſi ſi l'on nomme dS une particule quelconque de la maſſe fluide, & que la quantité d'action des forces V, V', V'' &c. ſur cette particule, ſoit $= \int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'' +$ &c. entant qu'elle n'eſt conſiderée que comme un point, il eſt clair que la quantité d'action ſur l'élément dS ſera $= dS (\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'' +$ &c.), puisque dS eſt déjà regardé comme un aſſemblage de pluſieurs points, ſur chacun desquels la quantité d'action des forces eſt $= \int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'' +$ &c. deſorte que cette quantité doit être multipliée par le nombre des points de l'élément dS, *c. à. d.* par l'élément dS même, pour avoir la quantité d'action des forces ſur cet élément dS. Par conſequent la quantité d'action des forces ſur toute la maſſe fluide ſera $= \int dS (\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'' +$ &c.). Ce ſera donc cette expreſſion integrale, dont la valeur doit être la plus petite; puisqu'elle comprend la ſomme totale de toutes les quantités d'action des forces ſur toutes les particules de la maſſe fluide. De là il eſt aiſé de tirer cette régle générale pour trouver l'état d'équilibre d'un corps quelconque ſollicité par des forces quelconques: *Qu'on multiplié chaque élément du corps par la quantité d'action des forces, qui y agiſſent, & l'intégrale de ce produit, qui ſera la quantité d'action totale ſur le corps entier, doit*

être un minimum. Quiconque aura compris la réalité de l'idée de la quantité d'action des forces sur un point, que je viens d'établir par les plus fortes raisons, accordera sans difficulté, que dans tous les cas d'équilibre la somme de toutes ces quantités d'action doit être la plus petite.

XXIII. Si le corps entier, dont nous cherchons l'état d'equilibre, est infiniment petit, de sorte que dS exprime tout ce corps, alors la quantité d'action totale sera $= dS\,(\int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv'' + \&c.)$ laquelle sera un *minimum*, si $\int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv'' + \&c.$ aura la plus petite valeur, puisque dS est constant : & c'est le cas que j'ai déjà dévelopé cy-dessus. Mais si le corps proposé est une masse fluide, dont dS est un élément, il n'est plus si aisé, que la figure où $\int dS\,(\int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv'' + \&c.)$ est un *minimum*, sera la même, que j'ai trouvée auparavant, & qui avoit cette proprieté, qu'à chaque point de sa surface la quantité d'action $\int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv'' + \&c.$ étoit d'une valeur constante ; Car en général il est extrémement difficile de déterminer la figure d'un solide, où une telle formule $\int dS\,(\int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv'' + \&c.)$ est un *maximum*, ou un *minimum*, puisque cette methode n'est encore assés cultivée, que pour les figures décrites sur un plan. Donc, pour affermir la verité de cette régle générale, & pour faire voir qu'elle conduit à la même solution, que j'ai déjà trouvée, je considererai une masse fluide infiniment mince, couchée sur un plan, & dont toutes les particules sont poussées vers plusieurs centres fixes C, C', C'' &c. situés dans le même plan. Fig. 5.

XXIV. Soit donc A M la surface de cette masse fluide, quand elle sera en équilibre ; & pour trouver cette figure qu'on prenne les coordonnées $CX = x$, $XM = y$, & pour les autres centres soient des coordonnées semblables $C'X' = x'$, $X'M = y'$; $C''X'' = x''$, $X''M = y''$: & il y aura $dx = dx' = dx''$ & $dy = dy' = dy''$. Mais avant que de considérer le dernier point M, il faut chercher la quantité d'action des forces sur l'élément $X\,x\,m\,M$ de l'aire $CXMA$, qui nous représente la masse fluide. Pour cet effet qu'on prenne de cet élément $X\,x\,m\,M$ une particule quelconque $Y\,y$, & qu'on nomme en

atten-

attendant $XY = y$, $X'Y = y'$, $X''Y = y''$: & la particule Yy ſera $= dx\,dy$. Maintenant ſoient les diſtances de cette particule aux centres des forces: $CY = v$, $C'Y = v'$, $C''Y = v''$, & les forces mêmes, comme jusqu'ici, V, V', V'': de ſorte que nous ayons $vv = xx + yy$; $v'v' = x'x' + y'y'$; $v''v'' = x''x'' + y''y''$. Or la quantité d'action de ces forces ſur le point Y étant $= \int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv''$, la quantité d'action ſur la particule Yy ſera $= dx\,dy\,(\int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv'')$ dont l'inregrale, en ſuppoſant x conſtant, donnera la quantité d'action des forces ſur tout l'élément $X\,x\,m$ M, pourvu qu'on avance le point Y jusqu'en M, & que les ſignifications des y, y', y'' ſoient les mêmes, que je leur ai données au commencement. Par conſéquent la quantité d'action des forces ſur tout l'élément de l'aire $X\,x\,m$ M ſera $= dx \int dy\,(\int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv'')$, ſuppoſant dans cette inregrale l'abſciſſe x conſtante, & la ſeule appliquée y variable. Je nommerai pour abréger cette inregrale, qui réſulte en ſuppoſant x conſtante, $\int dy\,(\int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv'' + \&c.) = U$, deſorte que le differentiel de U en ſuppoſant encore x conſtante ſoit $dy\,(\int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv'')$, ou ſi nous poſons en général $dU = M\,dx + N\,dy$, il y aura $N = \int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv''$.

XXV. Ayant ainſi trouvé la quantité d'action ſur l'élément $X\,x\,m$ M, laquelle eſt $= U\,dx$, il eſt clair que la quantité d'action ſur toute l'aire C X M A ſera $= \int U\,dx$. Par conſéquent cette quantité $\int U\,dx$ doit être la plus petite entre toutes les figures, que cette aire pourroit prendre; il s'agit donc de trouver parmi toutes les figures de la même aire, $\int y\,dx$, celle où la valeur de cette formule $\int U\,dx$ eſt la plus petite. Cette queſtion revient au même que ſi l'on cherchoit parmi toutes les courbes poſſibles celle, où cette formule $\alpha \int y\,dx + \int U\,dx$ ou $\int dx\,(U + \alpha y)$ eſt un *minimum*. Pour cet effet ſuivant ma methode, en comparant cette formule avec $\int Z\,dx$, & poſant $dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dp + \&c.$ la courbe cherchée ſera $o = N - \frac{dP}{dx}$. Mais puisque $Z = U + \alpha y$, & que U ne renferme que les va-

riables x & y, nous aurons $N = o$, ou bien le differentiel de $U + \alpha y$, en ne ſuppoſant que y variable doit être $= o$. Et partant le differentiel de U, en ne ſuppoſant que y variable, étant $= dy\,(\int V\,dv + \int V'\,dx' + \int V''\,dx'')$ & celui de $\alpha y = \alpha\,dy$, nous en obtiendrons pour la courbe cherchée A M cette équation $o = \alpha + \int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv''$ ou bien la quantité d'action des forces ſur chaque point M de la courbe A M doit être la même ; tout comme il a été trouvé par les autres principes. Ce bel accord de notre principe général dans ce cas ne laiſſera pas le moindre doute, qu'il ne ſoit pareillement d'accord dans tous les autres cas.

XXVI. On ſera encore plus fortement convaincu de la verité de ce principe général, ſi l'on remarquera, que la formule, dont la valeur eſt la plus petite dans la figure des fils flexibles, eſt parfaitement conforme à ce principe. Car ſoit A M la figure d'un fil parfaitement flexible, dont tous les élémens ſont ſollicités aux centres C, C', C'' par des forces V, V', V'' &c. & en vertu de notre principe le fil demeurera en repos, ſi la ſomme de toutes les actions des forces ſur le fil A M ſera la plus petite. Pour trouver cette ſomme, il faut chercher la quantité d'action ſur l'élément $M\,m = ds$, & puiſque, en nommant les diſtances $C\,M = v$, $C'\,M = v'$, $C''\,M = v''$ la quantité d'action ſur le point M eſt $= \int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv''$ l'action ſur l'élément $M\,m = ds$ ſera $= ds\,(\int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv'')$, & partant la ſomme de toutes les actions ſur la partie du fil A M, ſera l'intégrale $\int d\,S\,(\int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv'')$. La valeur de cette formule étant renduë un *minimum*, donnera la figure du fil lors qu'il s'eſt mis en équilibre. Or ayant determiné dans le Mémoire precedent la figure d'un tel fil par les principes ordinaires de la Mecanique, j'ai déjà remarqué que cette figure ſe trouve, ſi l'on cherche la courbe, où la valeur de cette meme formule $\int d\,S\,(\int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv'')$ eſt la plus petite.

XXVII. Je ne puis pas paſſer ſous ſilence une fort belle proprieté de la courbe d'un fil parfaitement flexible, & d'une épaiſſeur par tout égale, à laquelle cette ſolution conduit. Soit A M ce fil parfaitement flexible, & partout de la même epaiſſeur, dont chaque point M eſt

Fig. 6.

M eſt attiré à trois centres C, C′, C″ par des forces V, V′, V″, qui ſont des fonctions quelconques des diſtances CM = v, CM = v', C″M = v''. Qu'on nomme les abſciſſes C X = x, C′X′ = $-x'$, C″X″ = $-x''$. les appliquées XM = y, X′M′ = y', X″M = y'' & puisque $dx = dx' = dx''$ & $dy = dy' = dy''$ l'élément de la courbe Mm ſera = $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Soit maintenant $dy = p\,dx$, & $dp = q\,dx$; & la methode des plus grands & plus petits a fourni pour la courbe du fil AM l'equation ſuivante

$$\frac{V(y-px)}{v} + \frac{V'(y'-px')}{v'} + \frac{V''(y''-px'')}{v''} = \frac{q}{1+pp}\left(\int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv''\right)$$

où la formule $\int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv''$ exprime la quantité d'acti, on ſur le point M. Qu'on diviſe de part & d'autre par $\sqrt{(1+pp)}$, & puisque le rayon de la developée MO = $\frac{(1+pp)\sqrt{(1+pp)}}{q}$ nous aurons cette equation

$$\frac{\int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv''}{MO} = \frac{V(y-px)}{v\sqrt{(1+pp)}} + \frac{V'(y'-px')}{v'\sqrt{(1+pp)}} + \frac{V''(y''-px'')}{v''\sqrt{(1+pp)}}$$

Or $\frac{y-px}{\sqrt{(1+pp)}} = \frac{y\,dx - x\,dy}{ds}$ exprime la perpendiculaire CT qui eſt menée du centre C à la tangente MT; car baiſſant du point X ſur la même tangente la perpendiculaire XP & CQ ſur XP, on voit d'abord que XP = $\frac{y\,dx}{ds}$ & XQ = $\frac{x\,dy}{ds}$, de ſorte que CT = $\frac{y\,dx - x\,dy}{ds} = \frac{y-px}{\sqrt{(1+pp)}}$; Donc ſi des autres centres C′, C″ on tire pareillement ſur la tangente les perpendiculaires C′T′, C″T″, l'equation trouvée ſe changera en cette forme:

$$\frac{\int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv''}{MO} = \frac{V}{v}\cdot CT + \frac{V'}{v'}C'T' + \frac{V''}{v''}C''T''$$

Multiplions par MO, & $\frac{CT.MO}{v} = \frac{CT.MO}{CM}$ exprimera la

ligne

ligne M R, ayant baiſſé ſur la ligne C M prolongée du point O la perpendiculaire O R. Ce qui nous fournit cette proprieté : *Si du centre* O *du cercle osculateur en* M *on mene ſur les diſtances* C M, C′ M, C″ M *prolongées les perpendiculaires* O R, O R′, O R″ ; *alors la quantité d'action des forces ſur le point* M, *c'eſt à dire* $\int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv''$ *ſera égale à* V. M R + V′. M R′ + V″. M R″.

XXVIII. Mais notre principe eſt encore plus général, & s'étend même aux fils elaſtiques, comme j'ai fait voir dans mon Mémoire precedent ; il s'agit ſeulement de ramener l'effet de l'elaſticité à l'idée de la quantité d'action. Qu'on retienne toutes les dénominations du cas précedent, où chaque particule du fil A M eſt attirée vers les centres C, C′, C″ par les forces V, V′, V″, & ſoit le rayon de la developpée $MO = r = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,ddy}$, duquel dépend la force de l'élaſticité, qu'on ſuppoſe ordinairement $= \frac{A}{r}$, ou $= \frac{S}{r}$, ſi le fil n'eſt pas partout de la même épaiſſeur, de ſorte que l'élaſticité eſt dans un endroit plus grande, ou plus petite que dans un autre. Or pour rendre la ſolution plus générale, je ſuppoſerai que l'élaſticité en M ſoit $= T$, cette lettre T marquant une fonction quelconque de r, qui renferme même la longueur du fil, en cas qu'il ſoit d'une élaſticité variable. Cela poſé, les principes de la Mecanique nous fourniſſent pour la courbe de ce fil élaſtique cette équation

$$T = +\int dy \int ds \left(\frac{V\,x}{v} + \frac{V'x'}{v'} + \frac{V''x''}{v''} + \text{&c.}\right)$$
$$- \int dx \int ds \left(\frac{V\,y}{v} + \frac{V'y'}{v'} + \frac{V''y''}{v''} + \text{&c.}\right)$$

Pour trouver cette même équation par la methode des plus grands & plus petits, puiſque la quantité d'action des forces V, V′. V″ ſur le point M eſt $= f\,V\,dv + f\,V'dv' + f\,V''dv'' + \text{&c.}$ on n'aura qu'à y ajouter la quantité d'action de l'elaſticité, que je viens de nommer T :

on

Or nommant $\frac{1}{r} = t$, de ſorte que t ſoit proportionnel à la courbure même, on comprendra aiſément que, comme de la force V eſt réſulté l'action $\int V\,dv$, ainſi de la force T réſultera l'action $\int T\,dt$. Par conſéquent, nommant la maſſe de l'élément du fil $Mm = dS$, la ſomme totale de toutes les actions ſur la portion du fil AS ſera $= \int dS\,(\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'' + \&c. + \int T\,dt)$ & celle-cy ſera la plus petite, quand le fil ſe trouve en équilibre: & cette proprieté doit avoir lieu en vertu de notre principe, non ſeulement, lorsque les centres des forces C, C', C'' avec la figure du fil ſe trouvent dans le même plan, mais auſſi lorsque leur ſituation eſt quelconque.

XXIX. Mais ayant établi ce principe général, que dans toût état d'equilibre la ſomme de toutes les actions des forces ſur toutes les particules du corps, qui eſt en équilibre, eſt un *minimum*, je remarque de plus que ce même principe a lieu dans tous les mouvemens libres des corps, de quelques forces qu'ils ſoient ſollicités. Soit un corps, aprés avoir reçu un mouvement quelconque, attiré conſtamment vers pluſieurs centres de forces C, C', C'', & que les forces V, V', V'' ſoient exprimées par des fonctions quelconques des diſtances $CM = v$, $C'M = v'$, $C''M = v''$; ce corps éprouvera à chaque inſtant une autre quantité d'action de ces forces, & au moment qu'il ſe trouve en M, la quantité d'action eſt $= \int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv''$, comme j'ai fait voir au commencement de ce diſcours. Donc nommant l'élément du tems $= dt$, la quantité d'action inſtantanée, que le corps ſoutient pendant cet élément de tems dt, ſera $= dt\,(\int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv'' + \&c.)$: & partant la ſomme de toutes les actions inſtantanées, auxquelles le corps eſt expoſé pendant le tems fini $= t$, ſera $= \int dt\,(\int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv'' + \&c.)$. Maintenant il eſt fort naturel, *que ce corps prendra une telle route, que cette ſomme de toutes les actions inſtantanées y ſoit un* minimum. Voilà donc un nouveau principe général, pour le mouvement libre des corps ſollicités par des forces quelconques, dont la verité faute d'a-

bord aux yeux, dés qu'on fait réfléxion ſur l'idée de la quantité d'action, que j'ai établie.

XXX. En ſe ſervant de ce principe on trouvera en effet les mêmes courbes pour le mouvement des corps ſollicités par des forces quelconques, auxquelles les principes ordinaires de la mecanique nous conduiſent. Car ce principe ne differe point de celui, dont je me ſuis ſervi pour déterminer ces mêmes courbes par la methode *de maximis & minimis* : où j'ai fait voir, tout comme le principe de Mr. de Maupertuis exige que nommant l'élément de la courbe $M m = d s$ & la viteſſe du corps en $M = u$, la valeur de cette formule $\int u\, d s$ étoit toujours un *maximum*. Or j'ai remarqué cy-deſſus que la quantité d'action $\int V\, d v + \int V'\, d v' + \int V''\, d v''$ étant retranchée d'une quantité conſtante donne le quarré de la viteſſe $u u$, de ſorte que $\int V\, d v + \int V'\, d v' + \int V''\, d v'' = C - u u$; donc, ſuivant notre nouveau principe, cette formule $\int d t\, (C - u u)$, où $C t - \int u u\, d t$ ſera un *minimum*, ou bien pendant le même tems t la valeur de cette formule $\int u u\, d t$ ou à cauſe de $d s = u\, d t$, la valeur de celle-cy $\int u\, d s$ doit être un *maximum*, tout comme j'ai prouvé dans mon Traité *de Maximis & Minimis*.

SUR

SUR UNE CONTRADICTION APPARENTE DANS LA DOCTRINE DES LIGNES COURBES.

PAR M. EULER.

I.

On croit généralement que la Geometrie ſe diſtingue des autres ſciences, parce que tout qu'on y avance eſt fondé ſur des démonſtrations les plus rigoureuſes, & qu'il ne s'y trouve rien, qui puiſſe donner occaſion à des controverſes. En effet, puisque dans la Geometrie on n'admet d'autres propoſitions, que celles qui ſont parfaitement démontrées, on ne ſauroit comprendre, comment on pourroit tomber en diſpute. Encore moins ſera-t-il poſſible, que deux propoſitions ſolidement prouvées ſoient en contradiction entr'elles, vu que les verités, bien loin d'être contraires, ſe trouvent toujours dans la plus parfaite harmonie entr'elles. Et quoiqu'il arrive ſouvent dans les autres ſciences, que deux verités ſe paroiſſent contredire, on eſt pourtant bien aſſuré, que ce n'eſt qu'une contradiction apparente, qui tire pour la plus part ſon origine des idées moins preciſes, ou du deffaut d'une connoiſſance ſuffiſante des choſes, auxquelles il faut avoir égard. Par cette raiſon on ſera d'autant plus porté à croire, que dans la Geometrie de pareilles contradictions apparentes ne trouvent aucun lieu, puiſqu'on eſt bien eloigné de ſe contenter des idées vagues, & non ſuffiſamment déterminées.

II. Neanmoins je m'en vai mettre devant les yeux deux propoſitions de la Geometrie, dont toutes les deux ſont rigoureuſement démontrées, qui paroiſſent conduire à une contradiction ouverte. Cette difficulté ſe rencontre dans la doctrine des lignes courbes, où pour les lignes courbes d'un certain ordre on ſait combien de points il en faut pour la détermination. Ainſi une ligne du troiſieme ordre peut être décrite par 9 points donnés, ou 9 points déterminent tellement une ligne du troiſieme ordre, qu'il n'y a qu'elle ſeule qui puiſſe être tirée par ces neuf points. Mais il eſt auſſi demontré que deux lignes du 3me ordre ſe peuvent couper en neuf points ; donc, il peut arriver que deux lignes du troiſieme ordre paſſent par neuf points donnés, d'où il s'enſuit que neuf points ne ſont pas ſuffiſants pour déterminer une ligne du 3me ordre, ce qui eſt contraire à ce qu'on vient d'avancer. Avant que d'expliquer & de développer cette contradiction apparente, il ſera convenable de la mettre dans tout ſon jour, pour en mieux faire ſentir l'importance. Pour cet effet je commencerai par l'explication de ces deux propoſitions mêmes, qui ſemblent renfermer cette contradiction.

Propoſ. 1. III. Comme une ligne du premier ordre, ou une droite, ſe peut tirer par deux points donnés quelconques, ainſi une ligne du ſecond ordre, ou ſection conique, ſera tirée par 5 points, une ligne du troiſieme ordre par 9 points, une du quatrieme ordre par 14 points, & en général une ligne de l'ordre indiqué par le nombre n, pourra être tirée par $\frac{nn+3n}{2}$ points. Car l'equation générale des lignes de cet ordre :

$$Ay^{n}+(B+Cx)y^{n-1}+(D+Ex+Fx^2)y^{n-2}+(G+Hx+Ix^2+Kx^3)y^{n-3}+\&c.=o$$

contient $\frac{nn+3n}{2}+$, coëfficients arbitraires A, B, C, D, &c. Or chaque point donné, par lequel la courbe doit paſſer, fournit des valeurs données pour les coordonnées x & y, qui étant ſubſtituées donneront une

une équation. Donc $\frac{n\,n+3\,n}{2}$ points donnés conduiſent à autant d'equations, par lesquelles tous les coëfficiens A, B, C, &c. ſeront determinés, & par conſequent la courbe même. Car quoique les coëfficients ſoient d'un de plus, que les équations tirées de $\frac{n\,n+3\,n}{2}$ points, puisqu'il ne s'agit ici que du rapport mutuel entre les coëfficients, il n'en faut que $\frac{n\,n+3\,n}{2}$ équations pour déterminer tous ces rapports.

IV. Deux lignes droites, ou du premier ordre, ne peuvent ſe couper mutuellement qu'en un point; deux ſections coniques, ou deux lignes du ſecond ordre, ne peuvent ſe couper en plus qu'en quatre points. Deux lignes du troiſieme ordre ſe peuvent couper en 9 points; deux lignes du quatrieme ordre en 16 points, & ainſi de ſuite. Et comme une ligne de l'ordre m, peut-être coupée, par une ligne droite en m points, par une ligne du ſecond ordre en $2m$ points, par une ligne du troiſieme ordre en $3m$ points; ainſi on ſoutient en général qu'une ligne de l'ordre m peut-être coupée par une ligne de l'ordre n en $m\,n$ points. Cette propoſition ſe doit entendre, que le nombre des interſections de deux lignes courbes, dont l'une eſt de l'ordre m, & l'autre de l'ordre n, ne peut être plus grand que $m\,n$, bien qu'il ſoit ſouvent plus petit: quelques points d'interſection ou s'éloignant à l'infini, ou devenant imaginaires. La démonſtration, de cette propoſition n'eſt pas ſi aiſée, & j'en parlerai plus amplement dans la ſuite de ce diſcours. Propoſ. II.

V. La verité de ces deux propoſitions étant reconnue, je rapporterai premierement les conſéquences qu'on en tire, & qui paroiſſent être contradictoires. Enſuite je ferai voir le deſaut, qui ſe trouve dans ces conſéquences, qui conſiſte dans une fort ſubtile précipitation du raiſonnement, laquelle n'etant pas ſi facile à découvrir, nous doit rendre extrémement circonſpects, principalement dans les autres

ſciences, afin que nous ne nous laiſſions pas ſéduire pas de ſemblables contradictions apparentes. Car, ſi dans la Geometrie nous ſommes aſſujettis à des difficultés ſi remarquables, où il eſt pourtant permis de ramener toutes les idées presque au plus haut degré de juſteſſe, combien plus pourrons-nous être embarraſſés dans les autres ſciences, où il n'eſt pas poſſible de parvenir à des idées aſſés preciſes, & où il eſt infiniment plus difficile de ſe garantir de pareilles fautes dans le raiſonnement? Enfin je mettrai dans tout ſon jour la maniere dont il faut entendre ces deux propoſitions, en y appliquant une certaine reſtriction neceſſaire, laquelle étant remarquée, toutes les contradictions, quelques ſolides qu'elles ayent pu paroitre, évanouïront tout d'un coup, & on s'appercevra de la plus belle harmonie entre ces deux propoſitions.

I. Difficulté. VI. La premiere contradiction ſemble d'abord ſe rencontrer dans la proprieté des lignes du troiſieme ordre, ſelon qu'on a égard ou à l'une ou à l'autre des deux propoſitions générales rapportées. Voicy les conſéquences qu'on en tire :

I. *Puiſqu'il faut, ſelon la premiere propoſition, 9 points pour déterminer une ligne du troiſieme ordre ; par 9 points donnés on ne peut tirer qu'une ligne du troiſieme ordre.*

II. *Or, ſelon la ſeconde propoſition, deux lignes du troiſième ordre ſe peuvent couper en 9 points ; donc on pourra marquer 9 points, par leſquels peuvent paſſer deux lignes du troiſieme ordre.*

Ces deux conſéquences ſe contrediſent ouvertement ; car dans la premiere on ſoutient, que 9 points étant donnés, on ne ſauroit décrire qu'une ligne du troiſieme ordre qui paſſât par chacun de ces 9 points. Neanmoins la ſeconde conſéquence nous fait voir, qu'il y a une infinité de cas, où par neuf points donnés on puiſſe faire paſſer deux lignes du troiſieme ordre.

II. Difficulté. VII. La contradiction devient encore plus ſenſible dans les lignes du quatrieme & de plus hauts ordres. Pour le quatrieme ordre les conſéquences contradictoires ſont.

I. Par

I. *Par la premiere propoſition, il faut* 14 *points pour déterminer une ligne du quatrieme ordre : & partant* 14 *points étant donnés, on ne pourra decrire qu'une ligne de cet ordre, qui paſſe par tous ces points.*

II. *Mais la ſeconde propoſition nous apprend, que deux lignes du quatrieme ordre ſe peuvent couper mutuellement en* 16 *points : par conſéquent dans ces cas il ſera poſſible de faire paſſer deux lignes du quatrieme ordre par* 16 *points donnés.*

La contradiction de ces deux conſéquences eſt manifeſte, car s'il n'étoit pas poſſible de décrire plus d'une ligne du quatrieme ordre par 14 points donnés ; à plus forte raiſon on ne ſauroit décrire deux lignes de cet ordre, qui paſſaſſent toutes les deux par les mêmes 16 points :

VIII. Pour les lignes du cinquieme ordre, nos deux propoſitions générales nous fourniſſent ces deux conſéquences encore plus contraires entr'elles. III. Difficulté.

I. *La premiere propoſition nous enſeignant que* 20 *points ſuffiſent pour determiner une ligne du* 5me *ordre, il s'enſuit que par* 20 *points donnés on ne ſauroit décrire qu'une ſeule ligne du* 5me *ordre.*

II. *Or la ſeconde propoſition nous aſſure, que deux lignes du* 5me *ordre ſe peuvent couper mutuellement en* 25 *points. Donc il ſera poſſible de marquer* 25 *points, par leſquels on ſera en état de faire paſſer deux lignes du* 5me *ordre.*

Il y a par conſéquent des cas, ou 25 points donnés ne ſont pas ſuffiſants pour déterminer la ligne du 5me ordre, & pourtant la premiere conſéquence nous veut perſuader qu'il ne faut que 20 points pour determiner une ligne du cinquieme ordre. Et il eſt clair que dans les courbes de plus hauts ordres, la difference entre les nombres des points, qui devroient ſuffire à la détermination, devient encore plus grande.

IX. Ces contradictions étant tout à fait manifeſtes, il faut abſolument, ou que l'une des deux propoſitions générales ſoit fauſſe, ou que les conſéquences, qu'on en a tirées, ne ſoient pas juſtes. Pour la ſeconde propoſition, quoiqu'on n'en trouve nulle part, à ce que je ſache,

ſache, une démonſtration aſſés rigoureuſe, elle eſt pourtant trés certaine, comme je le montrerai cy-apres ; & les conſéquences, qui en ont été tirées, ſont ſi claires qu'il ne reſte pas le moindre doute de ce coté là. Car ſi par exemple deux lignes du quatrieme ordre s'entrecoupent en 16 points, on ſera abſolument forcé d'accorder, qu'il eſt poſſible de marquer 16 points, par lesquels on puiſſe faire paſſer non ſeulement une, mais deux lignes du quatrieme ordre. Donc tant la ſeconde propoſition, que les conſéquences, qu'on en a tirées, étant tout à fait averées, nous ſommes obligés de conclure, que c'eſt dans la premiere propoſition, ou dans la maniere d'en tirer les conſéquences marquées Nro. I, qu'il faut chercher quelque paralogisme.

X. Les conſéquences, qu'on a tirées de la prémiere propoſition, ſont également bien fondées : car ſi 9 points déterminent une ligne du troiſieme ordre, il s'enſuit, que par 9 points donnés on ne ſauroit tirer qu'une ligne de cet ordre : de même que par deux points donnés on ne peut tirer qu'une ligne droite, & par cinq points donnés une ſeule ſection conique. Donc, ſi l'equation générale pour les lignes de l'ordre n eſt déterminée par $\frac{nn+3n}{2}$ points, par lesquels elle doit paſſer, il ne ſera pas poſſible, que plus d'une ligne de cet ordre paſſe par autant de points donnés, que cette formule $\frac{nn+3n}{2}$ contient d'unités. Ce n'eſt pas donc dans les conſéquences, qu'on vient de déduire de la prémiére propoſition, qu'il faut chercher la ſource de ces contradictions : & par conſéquent il ne reſte que la prémiére propoſition même, ſur laquelle puiſſe tomber le ſoupçon d'un paralogisme, quelque fondée qu'elle paroiſſe d'ailleurs.

XI. En effet, en réfléchiſſant bien ſur l'état de la prémiére propoſition, nous remarquerons qu'il peut y avoir des cas, où $\frac{nn+3n}{2}$ points donnés ne ſont pas ſuffiſans pour déterminer la courbe de l'ordre n, qui peut être tirée par ces points : ou, ce qui revient

vient au même que $\frac{nn+3n}{2}$ équations ne ſuffiſent pas pour déterminer autant de coëfficients, ou pour déterminer le rapport entre $\frac{nn+3n}{2}+1$ coëfficients : quoique ces coëfficients entrent dans chacune des équations, & qu'ils n'y occupent qu'une ſeule dimenſion. D'ailleurs c'eſt le cas le plus ſimple, où pluſieurs inconnuës doivent être déterminées par autant d'équations, puisque par l'élimination ſucceſſive de ces quantités inconnuës, on demeure toujours au premier degré, de ſorte qu'on ne trouve jamais pour chaque inconnuë plus d'une valeur, qui par conſéquent ſera toujours réelle. Circonſtance qui paroit d'autant plus confirmer la verité de la premiere propoſition, & l'affranchir de toute exception.

XII. Cependant on ne doutera plus, qu'on ne doive appliquer à cette premiére propoſition une certaine reſtriction, ſans laquelle elle ne ſauroit être vraie en général ; dés qu'on aura égard aux réflexions ſuivantes.

Prémierement donc je dis, pour commencer des cas les plus ſimples, qu'il peut arriver. que deux équations ne ſont pas ſuffiſantes pour déterminer les valeurs de deux inconnuës, quoique toutes les deux entrent dans chacune de ces deux équations, & n'y occupent qu'une ſeule dimenſion. Car on n'a qu'à regarder ces deux équations $3x - 2y = 5$ & $4y = 6x - 10$ & on verra d'abord, qu'il n'eſt pas poſſible d'en déterminer les deux inconnuës x & y : puiſqu'en éliminant l'une x, l'autre s'en va d'elle même, & on obtient une équation identique, dont on n'eſt en état de déterminer rien. La raiſon de cet accident ſaute d'abord aux yeux, puiſque la ſeconde équation ſe change en $6x - 4y = 10$, qui n'étant que la premiere $3x - 2y = 5$ doublée, n'en differe point. C'eſt pourquoi, quand on dit que pour déterminer deux quantités inconnuës, il ſuffit d'avoir deux équations, il faut joindre à cette propoſition cette reſtriction, que ces deux équations ſoient differentes entr'elles, ou que l'une ne ſoit pas déjà compriſe dans l'autre & ce n'eſt qu'avec cette reſtriction, que ladite propoſition puiſſe être admiſe. I.

II Réflexion. XIII. En ſecond lieu, on reconnoitra aiſément, que trois équations peuvent ne ſuffire pas à determiner trois quantités inconnues. Car s'il arrive le même cas, que dans la réflexion precedente, qu'une des trois équations ſoit compriſe dans une des deux autres, auquel cas les trois équations ne valent que deux ; alors il ſera impoſſible d'en déterminer les trois inconnuës. Comme ſi l'on avoit ces trois équations :

$$4x - 6y + 10z = 16$$
$$3x - 5y + 7z = 9$$
$$2x - 3y + 5z = 8$$

il eſt clair que la premiere ne differant de la 3me, ne contribuë rien à la détermination des trois inconnuës x, y & z. Mais il y a auſſi des cas, où une des trois équations eſt contenuë dans les deux autres conjointement, comme ſi l'on avoit ces trois équations :

$$2x - 3y + 5z = 8$$
$$3x - 5y + 7z = 9$$
$$x - y + 3z = 7$$

où la ſomme de la premiere & troiſieme produit la ſeconde. Dans ce cas on peut obmettre telle de ces trois équations qu'on voudra, & il eſt de même que s'il n'y avoit que deux équations. Ainſi quand on dit, que pour déterminer trois inconnuës, il ſuffit d'avoir trois équations, il y faut ajouter cette reſtriction, que ces trois équations different tellement entr'elles, qu'aucune ne ſoit déjà compriſe dans les autres.

III. Réflexion. XIV. Il en eſt de même de quatre équations, qui ne ſont ſuffiſantes à determiner quatre quantités inconnues, qu'au cas qu'elles ſoient toutes differentes entr'elles, ou qu'aucune ne ſoit déjà renfermée dans les autres. Car ſi une eſt déjà compriſe dans les trois autres, ces quatre équations doivent être regardées, comme s'il n'y avoit que trois. Il peut même arriver, que deux équations ſoient déjà compriſes dans les deux autres, & alors il n'y aura que deux équations, qui reſtent dans le calcul, & par conſéquent deux inconnuës reſteront

ront indéterminées. Comme ſi l'on étoit parvenu à ces quatre équations :

$$5x + 7y - 4z + 3v - 24 = 0$$
$$2x - 3y + 5z - 6v - 20 = 0$$
$$x + 13y - 14z + 15v + 16 = 0$$
$$3x + 10y - 9z + 9v - 4 = 0$$

elles ne vaudroient que deux. Car ayant tiré de la troiſieme la valeur de $x = -13y + 14z - 15v - 16$, & l'ayant ſubſtituée dans la ſeconde pour avoir : $y = \frac{33z - 36v - 52}{29}$ & $x = -\frac{232 + v33 + 212}{29}$, ces deux valeurs de x & y étant ſubſtituées dans la premiere & quatrieme équation conduiront à des équations identiques, de ſorte que les quantités z & v reſteront indéterminées.

XV. La même circonſtance peut avoir lieu en quelque nombre d'equations qu'on voudra, de ſorte que quand même on auroit autant d'equations, qu'il y a d'inconnuës, elles ne pourroient pas être ſuffiſantes à les déterminer toutes. Car une des quantités inconnuës reſtera indéterminée, ſi une des équations propoſées eſt renfermée dans les autres. De plus, deux ou pluſieurs quantités inconnuës reſteront indéterminées, s'il y a parmi les équations deux ou pluſieurs, qui ſont déjà renfermées dans les autres, & qui par conſéquent ne contribuënt rien à la détermination des inconnuës. C'eſt pourquoi quand on ſoutient, que pour déterminer n quantités inconnuës, il ſuffit d'avoir n équations, qui expriment leur rapport mutuel, il y faut ajouter cette reſtriction, que toutes les équations ſoient differentes entr'elles, ou qu'il n'y en ait aucune qui ſoit déjà renfermée dans les autres. IV. Réflexion.

XVI. Apres ces réflexions on conviendra aiſément, que pour la détermination de la ligne courbe d'un certain degré le nombre des points, qui ſelon la premiere propoſition paroit ſuffiſant, peut en

certains cas devenir insuffisant, puisque cette détermination se réduit à la détermination d'un certain nombre de coëfficients par autant d'équations, qui, à ce que nous venons de voir, peuvent quelquefois devenir insuffisantes à ce dessein. Pour connoitre ces cas, je considererai premierement l'équation générale pour les lignes droites au du premier ordre: $\alpha y + \zeta x + \gamma = o$, & soient proposés deux points, par lesquels doive passer une ligne de cet ordre. Ayant choisi une ligne droite quelconque pour $a x e$, soient a & b les coordonnées pour premier point & $c d$, pour l'autre: ou pour le premier point on aura $x = a$; $y = b$; & pour l'autre $x = c$; $y = d$; d'où nous tirerons ces deux équations:

$$\alpha b + \zeta a + \gamma = o. \quad \alpha d + \zeta c + \gamma = o$$

de la difference desquelles nous aurons: $\frac{\alpha}{\zeta} = \frac{c - a}{b - d}$. Le rapport donc entre α & ζ sera toujours déterminé, à moins qu'il ne soit $c = a$ & $d = b$, auquel cas les deux points tombent l'un sur l'autre. Donc deux points déterminent une ligne droite, pourvu qu'ils ne soient pas coïncidents. Restriction qui s'entend de soi même dans la description de toutes les autres lignes courbes, parce que deux points qui tombent l'un sur l'autre, ne sont reputés que comme un seul.

XVII. L'équation générale pour les lignes du second degré étant:

$$\alpha x^2 + \zeta x y + \gamma y^2 + \delta x + \varepsilon y + \zeta = o$$

que 5 points soient proposés, par lesquels on doive décrire une ligne du second ordre. Pour abréger le calcul, qu'on prenne une ligne droite, qui passe par deux de ces points, pour axe, & une autre ligne tirée par un de ces deux points, & un troisieme, répréfente l'inclinaison des appliquées, puisqu'il est indifferent de les supposer perpendiculaires à l'axe, ou non. Cela supposé, soient les valeurs de x & y pour ces 5 points donnés;

	I	II	III	IV	V
$x =$	o	a	o	c	e
$y =$	o	o	b	d	f

De

De là nous aurons les 5 équations ſuivantes :

I. $\zeta = 0$

II. $\alpha a^2 + \delta a + \zeta = 0$

III. $\gamma b^2 + \varepsilon b + \zeta = 0$

IV. $\alpha c^2 + \beta c d + \gamma d^2 + \delta c + \varepsilon d + \zeta = 0$

V. $\alpha e^2 + \beta e f + \gamma f^2 + \delta e + \varepsilon f + \zeta = 0$

Des trois premieres nous avons d'abord :

$$\zeta = 0 ; \delta = -\alpha a ; \& \varepsilon = -\gamma b.$$

ces valeurs étant ſubſtituées dans les deux dernieres donnent ces équations

$$\alpha c^2 + \beta c d + \gamma d^2 - \alpha a c - \gamma b d = 0$$

$$\alpha e^2 + \beta e f + \gamma f^2 - \alpha a e - \gamma b f = 0$$

que détermineront la courbe cherchée, à moins qu'elles ne ſoient pas équivalentes. Or ce cas arrivera, quand les deux valeurs de ζ qu'on en tire ſeront les mêmes

$$\beta = \frac{\alpha c (a-c) + \gamma d (b-d)}{c d} = \frac{\alpha e (a-c) + \gamma f (b-f)}{e f}$$

c. à. d. ſi $\frac{a-c}{d} = \frac{a-e}{f}$ & $\frac{b-d}{c} = \frac{b-f}{e}$; ou ſi

$a = \frac{cf-de}{f-d}$ & $b = \frac{de-cf}{e-c}$. Par là on voit, que les cinq points donnés peuvent être tellement diſpoſés, que la ligne du ſecond ordre n'en eſt pas déterminée, & puiſque un coëfficient demeure indéterminé, il s'enſuit que par ces cinq points donnés on pourra faire paſſer une infinité de lignes du ſecond ordre.

XVIII. Si nous conſiderons de plus prés ce cas, où les cinq points donnés peuvent être inſuffiſants pour déterminer la ligne du ſecond ordre, nous remarquerons aiſément que cela arrive, quand quatre de ces cinq points donnés ſont diſpoſés dans une ligne droi-

te. Cela deviendra aſſés clair, ſi des équations $\frac{a-c}{d} = \frac{a-e}{f}$ & $\frac{b-d}{c} = \frac{b-f}{e}$ nous tirons les valeurs $f = \frac{d(a-e)}{a-c} = b - \frac{e(b-d}{c}$ ce qui donne $(c-e)(ad-ab+bc) = o$. Lorsque $e = c$, il y aura auſſi $f = d$, & deux points tombent l'un ſur l'autre; lequel cas s'exclut de lui même. Soit donc $ad-ab+bc = o$ ou $d = b - \frac{bc}{a}$, & on trouvera $f = b - \frac{be}{c}$; on n'a à preſent qu'à regarder ces formules geometriquement, pour s'aſſurer, que quatre points ſont ſitués en ligne droite. Il nauroit pas été difficile de deviner d'abord ce cas, car puisque le ſecond ordre renferme auſſi deux lignes droites ſituées d'une maniere quelconque, on reconnoit, que ſi trois des cinq points donnés ſont en ligne droite, celle-cy fera part de la ligne du ſecond ordre, & l'autre droite conjuguée ſera déterminée par les deux autres points. Donc, ſi quatre points ſont ſitués en ligne droite, celle-cy fera part de la ligne cherchée, mais l'autre partie, ou l'autre ligne droite paſſera par le cinquieme point, & n'ayant pas d'autres déterminations, on la pourra tirer comme on voudra. Si tous les cinq points donnés étoient ſitués en ligne droite, cette même droite avec toute autre quelconque ſatisferoit à la queſtion; donc, ce cas ſera encore moins déterminé que le précedent.

XIX. L'equation générale pour les lignes du troiſieme ordre étant :

$$\alpha x^3 + \beta x^2 y + \gamma x y^2 + \delta y^3 + \epsilon x^2 + \zeta x y + \eta y^2 + \theta x + \iota y + \kappa = o$$

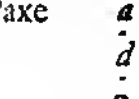
il faut definir neuf coëfficients par le dixiême, pour que l'equation ou la ligne de cet ordre ſoit déterminée. Donc ſi neuf points ſont donnés, par leſquels cette ligne doit paſſer, chacun fourniſſant une équation, la ligne ſera déterminée, pourvu que ces neuf équations ſoient toutes differentes entr'elles, & qu'il n'y en ait aucune, qui ſoit déjà

déjà compriſe dans les autres. Or on comprendra aiſément, qu'il y a une infinité de cas, où non ſeulement une, mais auſſi deux, ou pluſieurs des neuf équations peuvent déjà être renfermées dans les autres: & par conſequent dans ces cas la courbe ne ſera point déterminée par les 9 points propoſés, mais on y pourra encore ajouter le dixieme, & même l'onzieme, ou le douzieme, afin que la détermination devienne complette. Il eſt cependant fort difficile de définir ces cas généralement, comme j'ai fait pour les lignes du ſecond ordre, puisque le calcul à cauſe du grand nombre des points, & des coëfficients, deviendroit trop compliqué. Neanmoins il n'eſt pas difficile de découvrir pluſieurs cas particuliers, où ce defaut dans la détermination a lieu; desquels on ne conclurra pas difficilement, que le nombre de tels cas peut être infiniment grand, ce qui ſuffit pour mon deſſein.

XX. On ſait que l'équation générale du troiſieme ordre comprend, outre les lignes courbes de cet ordre; auſſi ou trois lignes droites, ou une ligne droite jointe à une ſection conique. Donc ſi des neuf points donnés quatre ſont diſpoſés en ligne droite, puisque dans les lignes courbes de cet ordre il n'y a pas quatre points en ligne droite, cette ligne droite tirée par ces quatre points conſtituera une partie de la figure cherchée, & les cinq autre points détermineront l'autre partie, qui ſera ou une ſection conique, ou deux droites; & ici peut déjà avoir lieu le cas précedent de marque de détermination. Mais ſuppoſons que 5 points ſoient ſitués en ligne droite, qui conſtituera une partie de la figure, & il eſt clair que les autres 4 points ne ſont pas ſuffiſants pour déterminer l'autre partie. Dans ce cas donc on aura beſoin de dix points pour déterminer la figure: or ſi des points propoſés il y en a 6 ſitués en ligne droite, il en faut encore 5, & partant en tout 11 points pour déterminer entierement la queſtion. Et de là il eſt evident, qu'il peut arriver, que quelque grand nombre que ce ſoit de points, ne ſoit pas ſuffiſant pour la détermination d'une ligne du troiſieme ordre, qui doit paſſer par tous ces points.

XXI. Comme ces cas n'ont lieu que dans les lignes droites qui ſont compriſes dans l'équation générale des lignes du troiſieme ordre

ordre, on doutera peut être, ſi la même choſe peut arriver dans les lignes courbes de troiſieme ordre, ou ſi neuf points peuvent être inſuffiſants pour déterminer une ligne courbe propre à cet ordre. Pour prouver cela je ne conſidererai qu'un cas, où les neuf points donnés ſont diſpoſés en quarré $a\ b\ c\ d\ e\ f\ g\ b\ i$: que l'axe ſoit tiré par les points $d\ e\ f$, & que le point e ſoit le commencement des abſciſſes.



Nommant l'intervalle de deux points $= a$, nous aurons pour l'abſciſſe $x = o$, trois valeurs pour l'appliquée y, qui ſont o, $+ a$, & $- a$; & ces mêmes trois valeurs répondront auſſi à l'abciſſe $x = a$, & à $x = - a$. A ces valeurs répondra cette équation

$$m\,y\,(y\,y - a\,a) = n\,x\,(x\,x - a\,a)$$

où le rapport des coëfficients m & n peut être quelconque, de ſorte qu'une infinité de lignes du troiſieme ordre peut être indiquée, qui paſſent toutes par ces points donnés.

XXII. Il eſt bien vrai que cette équation renferme auſſi des lignes droites, & des ſections coniques: car ſi $n = o$, on aura trois lignes droites $a\,c$, $d\,f$ & $g\,i$: ſi $m = o$, on aura trois lignes droites $a\,g$, $b\,b$ & $c\,i$: ſi $m = n$, on aura une droite $a\,e\,i$, & une ellipſe tirée par les points $b\ c\ f\ d\ g\ b$: & ſi $m = - n$, la ligne du troiſieme ordre ſera compoſée d'une ligne droite $c\,e\,g$ & d'une ellipſe qui paſſe par les points $a\ b\ d\ f\ b\ i$. Mais dans tous les autres rapports, qu'on poſe entre m & n, on aura toujours une vraie ligne courbe, qui paſſe par les neuf points donnés. Et de là on comprendra aiſément que toutes les fois, que deux lignes du troiſieme ordre, ſe coupent en 9 points, ces points ſeront tels, qu'ils ne déterminent pas tout à fait la ligne du troiſieme ordre, & que dans l'équation générale, aprés qu'on l'aura appliquée à ces neuf points, il reſtera un coëfficient indéterminé. Dans ces cas donc, il n'y aura pas ſeulement deux lignes du troiſieme ordre, mais une infinité de lignes de cet ordre, qui peuvent toutes être décrites par ces neuf points.

XXIII.

XXIII. Quand deux lignes du quatrieme ordre s'entrecoupent en 16 points, puisque 14 points, lorsqu'ils conduiſent à des équations toutes differentes entr'elles, ſont ſuffiſants pour déterminer une ligne de cet ordre ; ces 16 points ſeront toujours tels, que trois ou pluſieurs des équations, qui en réſultent, ſont déjà compriſes dans les autres. De ſorte que ces 16 points ne déterminent plus que s'il n'y en avoit que 13, ou 12, ou encore moins, & partant pour déterminer la courbe entierement, on pourra encore à ces 16 points ajouter un ou deux points. La même choſe arrivera ſi deux lignes du cinquieme ordre ſe coupent l'une l'autre en 25 points, qui n'etant pas ſuffiſants à determiner la courbe, ils ne vaudront plus que 19, ou même 18, de ſorte que 6 ou 7 points ſont ſuperflus : & partant ces 25 points ſeront toujours tellement diſpoſés, que dés que la courbe paſſe par 19 de ces points, elle paſſera d'elle même auſſi par les autres, ou il ſera impoſſible qu'elle paſſe par 19 points, ſans paſſer en même tems par tous les 25. Ces réfléxions étant bien compriſes, on rèſoudra aiſément toutes les autres difficultès, qui pourroient naitre de la comparaiſon des deux propoſitions générales, que j'ai rapportées dans le commencement de ce diſcours.

DEMONSTRATION
SUR LE NOMBRE DES POINTS, OU DEUX LIGNES DES ORDRES QUELCONQUES PEUVENT SE COUPER.

PAR M. EULER.

I.

Dans la Piece précedente j'ai rapporté ſans démonſtration cette propoſition, *que deux lignes courbes algebriques, dont l'une eſt de l'ordre* m *& l'autre de l'ordre* n *ſe peuvent couper en* m n *points*. La verité de cette propoſition eſt reconnuë de tous les Geometres, quoiqu'on doive avouër, qu'on n'en trouve nulle part une démonſtration aſſés rigoureuſe. Il y a des verites générales, que notre eſprit eſt prêt d'embraſſer auſſitot qu'il en reconnoit la juſteſſe dans quelques cas particuliers: & c'eſt parmi cette eſpece de verités, qu'on peut ranger à bon droit la propoſition, dont je viens de faire mention, puiſqu'on la trouve vraie non ſeulement dans quelques, ou pluſieurs cas, mais auſſi dans une infinité de cas differens. Cependant on conviendra aiſément, que toutes ces preuves infinies ne ſont pas capables de mettre cette propoſition à l'abri de toutes les objections, qu'un adverſaire peut former, & qu'il faut abſolument une démonſtration rigoureuſe, pour le réduire au ſilence.

II. Avant

II. Avant que d'entreprendre la démonſtration de cette propoſition, il en faut bien fixer le ſens, Premierement il eſt à remarquer, que le nombre des interſections de deux lignes, dont l'une eſt de l'ordre m, l'autre de l'ordre n, n'eſt pas néceſſairement $= m\,n$, mais qu'il peut fort ſouvent être plus petit. Ainſi il peut arriver, que deux lignes droites ne ſe coupent point du tout, lorsqu'elles ſont paralleles : & qu'une ligne droite ne coupe une parabole que dans un point : & que deux ſections coniques ne ſe coupent l'une l'autre qu'en deux points, ou point du tout. Ainſi le ſens de notre propoſition eſt, que le nombre des interſections ne peut jamais être plus grand que $m\,n$, quoiqu'il ſoit ſouvent plus petit; & alors on juge, ou que quelques interſections s'éloignent à l'infini, ou qu'elles deviennent imaginaires. De ſorte qu'en contant les interſections à l'infini, & les imaginaires auſſi bien que les réelles, on puiſſe dire, que le nombre des interſections eſt toujours $= m\,n$.

III. Il peut y avoir pourtant des cas, où le nombre des interſections eſt infini, ſi l'on veut regarder la coïncidence de deux lignes égales & ſemblables pour une infinité d'interſections. Ce cas arrivera donc, ſi les deux équations, qui expriment les deux lignes, ſont les mêmes, ou ſi elles ont des facteurs égaux. Mais comme la coïncidence parfaite ne peut pas proprement être regardée comme une infinité d'interſections, puiſque c'eſt plutot un attouchement continuel, le contenu de la propoſition ne ſouffre aucune exception réelle de ce coté là ; & ſi la queſtion roule ſur le nombre d'interſections de deux lignes courbes, on ſuppoſe toujours qu'elles ne ſont ni coïncidentes, ni qu'elles ont des parties, dont l'une tombe parfaitement ſur l'autre. Ainſi on pourra énoncer la propoſition en queſtion de cette maniere : que deux lignes courbes, l'une de l'ordre m, & l'autre de l'ordre n, dont les équations ne ſont, ni les mêmes, ni qu'elles ont aucun commun diviſeur, ne ſe peuvent jamais couper en plus que $m\,n$ points, bien que le nombre des interſections puiſſe fort ſouvent être plus petit.

IV. On reconnoitra aiſément la verité de cette propoſition générale dans une infinité de cas differens, & qui pourroient même tenir

lieu d'une démonſtration, ſi l'on ne ſe piquoit pas de n'avancer rien dans la Geometrie, qui ne ſoit muni d'une démonſtration rigoureuſe. Cependant comme ces preuves particulieres ne contribuënt pas peu à connoitre mieux la propoſition même, & à en faire ſentir l'importance, je commencerai par l'explication de ces preuves, avant que d'entreprendre la démonſtration générale. Et d'abord la verité de cette propoſition eſt reconnuë dans le cas, où l'une des deux lignes, qui ſe coupent, eſt droite, ou du premier ordre, c. à. d. ſi $m = 1$, car alors il eſt aiſé de démontrer que le nombre des interſections d'une ligne de l'ordre n par une ligne droite eſt égal à n, ou plus petit. Car l'équation générale des lignes de l'ordre n étant :

$$\alpha y^{n} + (\beta + \gamma x) y^{n-1} + (\delta + \varepsilon x + \zeta x^2) y^{n-2} + \&c. = 0$$

ſi de l'équation pour une ligne droite quelconque

$$a y + b x + c = 0$$

on ſubſtituë la valeur de $y = -\frac{b x - c}{a}$, on parviendra à une équation, où l'inconnuë x ne monte, qu'à n dimenſions. Donc puiſque chaque interſection eſt marquée par une racine de x de cette équation, il eſt clair que le nombre des interſections eſt égal au nombre des racines de cette équation, & qu'il ne peut pas par conſéquent être plus grand que n. De plus on verra que le nombre des interſections eſt $= n$, ſi toutes les racines ſont réelles, & qu'il ſera plus petit, ſi quelques unes de ces racines ſont imaginaires. Or ſi les plus hautes dimenſions de x ſe détruiſent mutuellement, & que l'équation apres l'elimination de y ſe réduiſe à un degré inferieur, c'eſt une marque, que quelques points d'interſections s'eloignent à l'infini.

V. Soit $m = 2$, & que la ligne du ſecond ordre ſoit compoſée de deux lignes droites, ce qui arrive, lorsque l'équation eſt réſoluble en deux facteurs, comme

$$(a y + b x + c)(d y + e x + f) = 0$$

Or

Or l'autre ligne ſoit une courbe quelconque de l'ordre n, dont la nature ſoit exprimée par cette équation

$$\alpha y^{n} + (\beta + \gamma x) y^{n-1} + (\delta + \varepsilon x + \zeta x^{2}) y^{n-2} + \text{&c.} = 0$$

Dans ce cas il eſt clair, puiſque cette ligne de l'ordre n ne peut être coupée par une ligne droite qu'en n points; que deux lignes droites qui ſont regardées comme une ſeule ligne du ſecond ordre, la pourront couper en $2n$ points, lorsque chacune la coupe en n points: ce qui eſt conforme à l'enoncé de la propoſition, puiſque mn dans ce cas devient $= 2n$.

VI. Si l'une des deux lignes propoſées eſt du troiſieme ordre, mais qu'elle ſoit compoſée de trois lignes droites, l'autre demeurant une courbe quelconque de l'ordre n, il eſt clair que le nombre d'interſections ſera $= 3n$, ou moindre, comme la propoſition exige. Et il en ſera de même d'une ligne de l'ordre quelconque m, ſi elle conſiſte de m lignes droites, ou ſi ſon équation eſt réſoluble en autant d'équations ſimples de cette forme $ay + bx + c = 0$; car puiſque chacune de ces lignes droites peut couper l'autre ligne propoſée de l'ordre n en n points, le nombre de toutes les interſections pourra monter à mn, ſelon l'enoncé de la propoſition. Et partant nous avons déjà une infinité de cas, où la verité de cette propoſition ſe trouve ſolidement établie. Mais dans tous ces cas l'une des deux lignes propoſées, n'eſt pas veritablement une ligne courbe, mais plutot un amas de pluſieurs lignes droites, ſelon l'ordre auquel elle appartient.

VII. Mais il y a auſſi une infinité de lignes courbes où la verité éclate avec autant de clarté. Car ſoit l'une des deux lignes une parabole exprimée par l'équation: $y = axx + bx + c$, & partant $m = 2$: l'autre courbe ſoit exprimée par l'équation générale de l'ordre n:

$$\alpha y^{n} + (\beta + \gamma x) y^{n-1} + (\delta + \varepsilon x + \zeta xx) y^{n-2} + \text{&c.} = a.$$

& il eſt evident que ſi l'on met ici par tout pour y ſa valeur $axx + bx + c$, cette équation montera au degré $2n$, & la racine x pourra avoir autant de racines, dont toutes les interſections ſeront indiquées:

donc il ſera poſſible que la ligne de l'ordre n ſoit coupée par la parabole en $2n$ points : & quoique le nombre des interſections puiſſe ſouvent être plus petit, on voit pourtant, qu'il ne peut jamais être plus grand que $2n$.

VIII. La même choſe paroit auſſi, ſi l'une des deux lignes eſt une courbe parabolique d'une ordre quelconque :

$$y = ax^{m} + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \&c.$$

Car ſi l'on met cette valeur pour y dans l'équation pour l'autre courbe de l'ordre n, on verra ſans difficulté, que la lettre x obtiendra dans l'équation reſultante mn dimenſions, qui marquent autant de racines & partant autant d'interſections, tout comme la propoſition prononce. De là on conclura auſſi, comme l'axe des deux courbes eſt arbitraire, quand même l'une des deux courbes ne ſeroit pas exprimée par une telle équation :

$$y = ax^{m} + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \&c.$$

pourvu qu'en changeant d'axe, & même d'inclinaiſon entre les coordonnées, l'équation puiſſe être réduite à cette forme, le nombre des interſections ſera également $= mn$, l'équation qui deſigne les interſections montant toujours à ce degré, ou un inferieur, & jamais à un plus haut.

IX. Ces cas particuliers joints enſemble nous conduiſent à un cas beaucoup plus général, où la verité de la propoſition ſe trouve confirmée. Car toutes les fois que l'équation de la premiere ligne, que je ſupoſe de l'ordre m ſe peut réſoudre en des facteurs, qui expriment, ou lignes droites, ou courbes paraboliques, cette équation étant :

$$(y - P)\ (y - Q)\ (y - R)\ (y - S)\ \&c. = o$$

où P, Q, R, S, &c. ſoient des fonctions rationelles de x, & le premier facteur $y - P = o$ marque une ligne de l'ordre p, le ſecond $y - Q = o$ une de l'ordre q, le troiſieme une de l'ordre r, &c. de ſorte que $p + q + r + s + \&c. = m$, cette ligne ſera compoſée de toutes ces lignes droites ou courbes enſemble : & l'autre courbe, que je ſuppoſe être

être de l'ordre n, pourra être coupée de la partie de la premiere, qui eſt exprimée par le facteur $y - P = o$, en $p\,n$ points, de la partie compriſe en $y - Q = o$ en $q\,n$ points, de la partie compriſe en $y - R = o$ en $r\,n$ points, &c. Et partant la ligne de l'ordre n pourra être coupée par toutes les parties de la ligne premiere de l'ordre m en $p\,n + q\,n + r\,n + s\,n +$ &c. points, c'eſt à dire en $m\,n$ points, à cauſe de $p + q + r + s +$ &c. $= m$.

X. Quoique ces cas aillent à l'infini, on conviendra neanmoins, qu'il s'en faut encore beaucoup, que la verité de la propoſition ſoit démontrée dans toute ſon étenduë. Et pour parvenir à une telle démonſtration il faut prouver, que deux équations d'ordres quelconques étant propoſées, comme:

$$a y^{m} + (b + c x) y^{m-1} + (d + e x + f x x) y^{m-2} + \text{&c.} = o$$

$$\alpha y^{n} + (\beta + \gamma x) y^{n-1} + (\delta + \varepsilon x + \zeta x x) y^{n-2} + \text{&c.} = o$$

ſi l'on elimine l'une ou l'autre des deux variables x & y, l'autre ne monte aprés l'elimination qu'à $m\,n$ dimenſions. Il eſt bien vrai qu'il ſeroit impoſſible d'achever en général cette élimination, pour faire voir actuellement, à combien de dimenſions l'autre variable pourroit monter: & même dans la plupart des cas ſi l'on ſe ſert des methodes ordinaires d'eliminer, on parviendra à une équation de plus de dimenſions, que $m\,n$; de ſorte qu'emploiant cette maniere, on devroit plutot croire que la propoſition fut fauſſe. Car quoique l'équation, à laquelle on arrive par ce chemin, ait des diviſeurs, on a lieu de douter, ſi l'on peut negliger ces diviſeurs, & s'ils ne renferment des racines, qui marquent des interſections.

XI. Pour faire ſentir plus évidemment cette difficulté, je m'en vai éliminer ſuivant la maniere ordinaire la quantité y de ces deux équations:

I. $P y^3 + Q y^2 + R y + S = o$.

II. $p y^3 + q y^2 + r y + s = o$.

Où P, Q, R, S, p, q, r, s ſoient des fonctions quelconques de l'autre

tre quantité variable x. Multiplions la premiere par s, & la ſeconde par S, & la difference étant diviſée par y donnera:

III. $(Ps - pS)\,y^2 + (Qs - qS)\,y + Rs - rS = o.$

Enſuite multiplions la premiere par p, & la ſeconde par P, & la difference donnera:

IV. $(Qp - qP)\,y^2 + (Rp - rP)\,y + Sp - sP = o.$

De la même maniere de ces deux équations du ſecond degré nous tirerons deux du premier degré de y:

V. $((Ps-pS)(Sp-sP)-(Qp-qP)(Rs-rS))y+(Qs-qS)(Sp-sP)-(Rp-rP)(Rs-rS)=o.$

VI. $((Qs-qS)(Qp-qP)-(Rp-rP)(Ps-pS))y+(Rs-rS)(Qp-qP)-(Sp-sP)(Ps-pS)=o.$

Et de là on tirera cette équation, ou la quantité y ne ſe trouve plus:

VII. $(Ps-pS)(Sp-sP)(Rs-rS)(Qp-qP)-(Ps-pS)^2(Sp-sP)^2$
$-(Qp-qP)^2(Rs-rS)^2+(Qp-qP)(sR-rS)(Sp-sP)(Ps-pS)=$
$(Qs-qS)^2(Qp-qP)(Sp-sP)-(Qs-qS)(Qp-qP)(Rp-rP)(Rs-rS)$
$-(Rp-rP)(Ps-pS)(Qs-qS)(Sp-sP)+(Rp-rP)^2(Ps-pS)(Rs-rS)$

qui ſe change en celle-cy:

$o=(Ps-pS)^4+2(Qp-qP)(Rs-rS)(Ps-pS)^2-(Qp-qP)(Qs-qS)^2(Ps-pS)+(Qp-qP)^2(Rs-rS)^2$
$+(Rp-rP)(Qs-qS)(Ps-pS)^2+(Rs-rS)(Rp-rP)^2(Ps-pS)-(Qp-qP)(Qs-qS)(Rp-rP)(Rs-rS)$

Mais les derniers termes qui ne contiennent pas le facteur $(Ps-pS)$ ſe reduiſent à:

$(Qp-qP)(Rs-rS)((Qp-qP)(Rs-rS)-(Qs-qS)(Rp-rP))$

ce qui eſt:

$(Qp-qP)(Rs-rS)(Ps-pS)(Qr-qR)$

& partant toute l'equation ſera diviſible par $Ps-pS$ étant:

$(Ps-pS)^4+2(Qp-qP)(Rs-rS)\}(Ps-pS)^2-(Qp-qP)(Qs-qS)^2\}(Ps-pS)+(Qp-qP)(Qr-qR)(Rs-rS)(Ps-pS)$
$+(Rp-rP)(Qs-qS)\}\quad+(Rs-rS)(Rp-rP)^2\}$

XII. Il eſt aſſés clair, que dans ce cas le facteur $Ps-pS$ étant poſé $= o$, ne peut pas marquer une interſection, & que par conſéquent les interſections des deux courbes propoſées ſeront contenuës dans cette équation:

$(Ps-pS)^3+2(Qp-qP)(Rs-rS)(Ps-pS)-(Qp-qP)(Qs-qS)^2$
$+(Rp-rP)(Qs-qS)(Ps-pS)+(Rs-rS)(Rp-rP)^2=o,$
$+(Qp-qP)(Qr-qR)(Rs-rS)$

Donc dans le cas de deux lignes courbes du troiſieme ordre, les coëfficiens

ficients P & p ſeront conſtans ; Q & q des fonctions de x d'une dimenſion comme $\alpha + \beta x$; R & r des fonctions de x de deux dimenſions comme $\alpha + \beta x + \gamma x^2$; & S & s des fonctions de x de trois dimenſions comme $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3$. Par conſéquent les facteurs, qui ſe trouvent dans cette équation ſeront des fonctions de x :

$Ps - pS$ de 3 dim.	$Qs - qS$ de 4 dim.
$Qp - qP$ d'une dim.	$Qr - qR$ de 3 dim.
$Rs - rS$ de 5 dim.	$Rp = rP$ de 2 dim.

d'où il eſt evident, que l'équation, qui indique les interſections ſera de 9 dimenſions, & que par conſéquent, en général deux lignes du 3me ordre ſe peuvent couper en 9 points.

XIII. Ces mêmes équations choiſies :

$$Py^3 + Qy^2 + Ry + S = o$$
$$py^3 + qy^2 + ry + s = o$$

peuvent auſſi montrer le nombre des interſections dans une infinité d'autres cas. Car que la premiere équation exprime une ligne de l'ordre m, & la ſeconde équation une ligne de l'ordre n, ce qui arrivera, quand les coëfficients ſeront des fonctions rationnelles entieres de x : ſavoir

P de $m - 3$ dimenſ.	p de $n - 3$ dim.
Q de $m - 2$ dim.	q de $n - 2$ dim.
R de $m - 1$ dim.	r de $n - 1$ dim.
S de m dim.	s de n dim.

Alors les facteurs, qui conſtituënt l'equation, qui ne contient plus la variable y, ſeront des fonctions de x :

$Ps - pS$ de $m + n - 3$ dim.	$Rp - rP$ de $m + n - 4$ dim.
$Qp - qP$ de $m + n - 5$	$Qr - qR$ de $m + n - 3$
$Rs - rS$ de $m + n - 1$	$Qs - qS$ de $m + n - 2$

Et partant le nombre des interſections de ces deux courbes ſera $= 3m + 3n - 9$; qui eſt toujours plus petit que mn ſi m & n ſont plus grand que 3. Car ſoit : $m = 3 + \alpha$ & $n = 3 + \beta$, le nombre des interſections ſera $= 9 + 3(\alpha + \beta)$ au lieu que $mn = 9 + 3(\alpha + \beta) +$

* β. Mais on voit bien que cette diminution du nombre des interſections vient de ce que les équations choiſies n'expriment pas généralement les courbes des ordres *m* & *n*, mais ſeulement des eſpeces de ces ordres; d'où il n'eſt pas ſurprenant, que le nombre des interſections a été trouvé plus petit, que la propoſition demande.

XIV. Comme l'elimination de l'inconnuë *y* des deux équations cubiques, dont j'ai fait le calcul, a conduit à une équation trop haute, qui n'a été conduite au juſte degré que par la diviſion d'un facteur, dont on pouvoit bien voir qu'il ne renfermoit aucune inrerſection: ainſi dans les équations, où *y* a plus de dimenſion, on parviendra par l'elimination de *y* à une équation encore plus élevée, qüi en verité admettra un diviſeur, mais cette methode, qui ſeroit d'ailleurs impracticable dans de plus hautes équarions, ne nous metrra pas en ſeureté, ſi l'on rrouvera toujours un tel diviſeur, qui ne regarde point les interſections, & encore moins, ſi aprés la diviſion l'équation ſera juſtement d'autant de dimenſions, que la propoſition générale marque; c. à d. ſi le nombre des dimenſions ne ſera jamais plus grand que *mn*, ſi les deux équation propoſées ont été des ordres *m* & *n*. Cette circonſtance prouve donc encore davantage la néceſsité de démontrer la propoſition générale dans toute ſon érenduë, puiſque ſans cela on auroit bien de la raiſon de douter de ſa verité.

XV. C'eſt donc principalement de l'ouvrage de l'elimination, que dépend la démonſtration de notre propoſition générale, où il faut prendre garde, que par l'elimination on ne parvienne à une équation, qui renferme des racines inutiles. Car deux équations étant propoſées, dont chacune contient une même variable *y*, qui doit être eliminée, on voit aiſément que l'elimination ſe peut faire d'une infinité de manieres differentes, ſelon qu'on multiplie l'une & l'autre équation par une quantité arbitraire. Il s'agit donc de bien fixer l'idée de l'elimination, & de diriger cette opération, en ſorte que l'equation, à laquelle on arrive, ne contienne d'autres racines, que telles, qui marquent des interſections, & qu'on puiſſe être aſſüré, qu'elle ne renferme des facteurs ſuperflus, dont on pourroit douter s'ils indiquent des interſections, ou non?

XVI. Soient

XVI. Soient donc propoſées deux équations quelconques :

$$y^m - Py^{m-1} + Qy^{m-2} + Ry^{m-3} - Sy^{m-4} + \&c. = o$$

$$y^n - py^{n-1} + qy^{n-2} + ry^{n-3} - sy^{n-4} + \&c. = o$$

leſquelles il faille combiner, en ſorte qu'il en réſulte une équation qui ne contienne plus la lettre y. Or d'abord on voit que la valeur de y, qui reſulte d'une de ces équations doit être égale à la valeur de y, qui réſulte de l'autre. Donc ſi l'une & l'autre équation donne pluſieurs valeurs de y, les deux équations propoſées pourront ſubſiſter enſemble, ſi une valeur quelconque de y de l'une ſera égale à une valeur quelconque de y de l'autre. Suppoſons que toutes les racines de la premiere équation ſoient :

A, B, C, D, E, F, G &c.

& les racines de l'autre équation :

a, b, c, d, e, f, g &c.

Cela poſé, il eſt clair que chacune des deux équations propoſées aura lieu dans tous les cas, qu'une des racines de la premiere équation ſera égale à une des racines de l'autre.

XVII. Le nombre des racines A, B, C, D &c. de la premiere équation ſera $= m$, & le nombre des racines de l'autre équation ſera $= n$; donc les équations propoſées pourront être répreſentées ſous ces formes :

$(y - A)\ (y - B)\ (y - C)\ (y - D)\ (y - E)\ \&c. = o.$

$(y - a)\ (y - b)\ (y - c)\ (y - d)\ (y - e)\ \&c. = o.$

A préſent il eſt clair que ſi $A = a$, la valeur $y = A = a$ ſatisfera à l'une & à l'autre équation ; la même choſe arrivera ſi $A = b$; ou $A = c$; ou $A = d$; ou $A = e$; &c. de plus la valeur $y = B$ ſatisfera à l'une & à l'autre, ſi $B = a$, ou $B = b$; ou $B = c$; ou $B = d$; ou $B = e$; &c. & la valeur $y = C$ ſatisfera à toutes les deux équations ſi $C = a$, ou $C = b$; ou $C = c$; ou $C = d$; ou $C = e$; &c. & ainſi des autres. Et il eſt evident, que toutes ces combinaiſons enſemble répreſentent tous les cas poſſibles, où les deux équations propoſées pourront ſubſiſter à la fois.

XVIII. Donc puisque l'équation, qu'on cherche par l'élimination, doit contenir tous les cas posſibles, où la même valeur miſe pour y ſatisfait à l'une & à l'autre équation à la fois, il eſt clair qu'elle doit contenir tous les cas marqués, & partant elle ſera compoſée de tous ces facteurs

$$\left.\begin{array}{llllll}
(A-a) & (A-b) & (A-c) & (A-d) & (A-e) & \&c. \\
(B-a) & (B-b) & (B-c) & (B-d) & (B-e) & \&c. \\
(C-a) & (C-b) & (C-c) & (C-d) & (C-e) & \&c. \\
(D-a) & (D-b) & (D-c) & (D-d) & (D-e) & \&c. \\
(E-a) & (E-b) & (E-c) & (E-d) & (E-e) & \&c.
\end{array}\right\} = 0.$$

&c.

Donc, puiſque la quantité y ne ſe trouve plus dans cette équation, elle ſera la même qu'on cherche par l'élimination, & qui montre tous les cas, où les deux équations propoſées peuvent avoir la même racine. Mais comme les racines A, B, C, D &c. a, b, c, d &c. ſont ſouvent impoſſibles d'être aſſignées, il s'agit d'exprimer cette équation par les coëfficients P, Q, R, S &c. p, q, r, s &c. dont le rapport aux racines eſt connu.

XIX. Parceque, comme nous avons vu, le produit de tous ces facteurs $(y-a)(y-b)(y-c)(y-d)(y-e)$ &c. eſt égal à l'expreſſion $y^n - py^{n-1} + qy^{n-2} - ry^{n-3} + sy^{n-4} -$ &c. ſi nous ſubſtituons ſucceſſivement pour y les valeurs A, B, C, D &c. l'équation, qui doit réſulter par l'élimination, ſera compoſée de ces facteurs:

$$\left.\begin{array}{l}
(A^n - pA^{n-1} + qA^{n-2} - rA^{n-3} + sA^{n-4} - \&c.) \\
(B^n - pB^{n-1} + qB^{n-2} - rB^{n-3} + sB^{n-4} - \&c.) \\
(C^n - pC^{n-1} + qC^{n-2} - rC^{n-3} + sC^{n-4} - \&c.) \\
(D^n - pD^{n-1} + qD^{n-2} - rD^{n-3} + sD^{n-4} - \&c.) \\
(E^n - pE^{n-1} + qE^{n-2} - rE^{n-3} + sE^{n-4} - \&c.)
\end{array}\right\} = 0.$$

&c.

où

où le nombre de ces facteurs eſt $= m$, ſelon le nombre des racines de la premiere équation. D'où eſt il evident auſſi que changeant les équations, l'equation, qui reſulte par l'elimination, peut être repréſentée auſſi ſous cette forme:

$$\left.\begin{array}{l}
(a^m - Pa^{m-1} + Qa^{m-2} - Ra^{m-3} + Sa^{m-4} - \&c.)\\
(b^m - Pb^{m-1} + Qb^{m-2} - Rb^{m-3} + Sb^{m-4} - \&c.)\\
(c^m - Pc^{m-1} + Qc^{m-2} - Rc^{m-3} + Sc^{m-4} - \&c.)\\
(d^m - Pd^{m-1} + Qd^{m-2} - Rd^{m-3} + Sd^{m-4} - \&c.)\\
(e^m - Pe^{m-1} + Qe^{m-2} - Re^{m-3} + Se^{m-4} - \&c.)\\
\&c.
\end{array}\right\} = 0.$$

où le nombre des facteurs eſt $= n$.

XX. Quoique les expreſſions des racines A, B, C, D &c. & a, b, c, d &c. ſoient pour la pluspart fort irrationelles, & ſouvent telles, qu'on ne les peut pas aſſigner; on ſait pourtant que la ſomme de toutes les racines A, B, C, D &c. eſt $= P$

la ſomme des produits de deux à deux $= Q$

la ſomme des produits de trois à trois $= R$

la ſomme des produits de quatre à quatre $= S$

&c.

Et par ces valeurs P, Q, R, S &c. on eſt en état d'exprimer toutes les expreſſions, dans leſquelles entrent toutes les racines également, par des formules rationnelles compoſées de P, Q, R, S &c. Or on voit aiſément, que ſi l'on multiplie les facteurs mentionnés actuellement, on parviendra toujours à de ſemblables expreſſions, qui renferment toutes les racines également, & au lieu desquelles on pourra mettre des fonctions rationnelles des coëfficients P, Q, R, S &c. & p, q, r, s &c. Cela eſt auſſi clair par la double forme de cette équation du §. preced. Car s'il reſtoit dans la premiere forme quelque irrationalité, ce ſeroit une irrationalité de la premiere équation, mais

par la ſeconde forme nous voyons, qu'il n'y peut y avoir une irrationalité de la premiére équation. D'où il s'enſuit, que l'une & l'autre forme doit conduire à la même expreſſion rationnelle, qui ne renferme que les coëfficients P, Q, R, S &c. & p, q, r, s &c.

XXI. Si nous réflechiſſons maintenant, que dans les équations propoſées

$$y^{m} - Py^{m-1} + Qy^{m-2} - Ry^{m-3} + Sy^{m-4} - \&c. = o$$
$$y^{n} - py^{n-1} + qy^{n-2} - ry^{n-3} + sy^{n-4} - \&c. = o$$

entant qu'elles expriment des lignes des ordres m & n les coëfficients P & p marquent des fonctions du premier degré de x comme $\alpha + \beta x$; les coëfficients Q & q des fonctions du ſecond degré $\alpha + \beta x + \gamma xx$; les coëfficients R & r des fonctions du troiſieme degré $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3$ &c. Donc la ſomme des racines A, B, C, D &c. ou a, b, c, d, e &c. ſera exprimée par une fonction de x d'un degré. La ſomme des produits de deux à deux de ces racines par une fonction du ſecond degré: la ſomme des produits de trois à trois racines par une fonction du troiſieme degré, & ainſi de ſuite. C'eſt pourquoi dans la compoſition de toutes ces racines dans la premiere forme (§. XVIII.) on pourra regarder chaque racine comme une fonction d'une dimenſion de x: & partant cette forme étant compoſée de mn facteurs ſimples, elle montera à mn dimenſions de x & déſignera par conſéquent mn interſections des deux courbes propoſées.

XXII. S'il y a dans cette démonſtration encore quelque obſcurité, cela vient de ſa grande univerſalité: & tous les doutes qu'on en pourroit avoir évanouïront entierement, dèsqu'on fera l'application à quelques cas particuliers, d'où l'on reconnoitra dabord, que tout ce que je viens d'avancer ſur les dimenſions de chaque partie, doit avoir lieu non ſeulement dans ces cas, mais auſſi en général. Je commencerai par deux équations du ſecond ordre, qui ſoient

	Les racines
$yy - Py + Q = o$	A, B
$yy - py + q = o$	a, b

donc

donc, puisque $m = 2$ & $n = 2$, l'équation, où l'élimination doit conduire, ſera :

$$(A^2 - pA + q)(B^2 - pB + q) = 0$$

qui étant développée, donnera :

$$A^2B^2 - pAB(A+B) + q(A^2+B^2) + ppAB - pq(A+B) + qq = 0$$

Or ayant $AB = Q$ & $A + B = P$, il ſera $AA + BB = PP - 2Q$; par conſéquent l'équation cherchée ſera :

$$Q^2 - pPQ + qPP - 2Qq + ppQ - pqQ + qq = 0$$

dont chaque terme ſera de quatre dimenſions de x pourvu que P & p renferment une dimenſion de x, & Q & q deux.

XXIII. Soient les deux équations propoſées du troiſieme ordre :

	Les racines étant
$y^3 - Py^2 + Qy - R = 0$	A, B, C & $m = 3$
$y^3 - py^2 + qy - r = 0$	a, b, c & $n = 3$

Donc l'équation cherchés par l'élimination de y ſera :

$$(A^3 - pA^2 + qA - r)(B^3 - pB^2 + qB - r)(C^3 - pC^2 + qC - r) = 0$$

qui par le developpement deviendra :

$$A^3B^3C^3 - pA^2B^2C^2(AB+AC+BC) + qABC(A^2B^2+A^2C^2+B^2C^2) - r(A^3B^3+A^3C^3+B^3C^3)$$
$$+ p^2A^2B^2C^2(A+B+C) - pqABC(A^2B+AB^2+A^2C+AC^2+B^2C+BC^2) - p^3A^2B^2C^2$$
$$+ q^2ABC(A^2+C^2+C^2) + pr(A^3B^2+A^2B^3+A^3C^2+A^2C^3+B^3C^2+B^2C^3) + q^3ABC$$
$$+ r^2(A^3+B^3+C^3) - qr(A^3B+AB^3+A^3C+AC^3+B^3C+BC^3) - r^3$$
$$+ p^2qABC(AB+AC+BC) + pqr(A^2B+AB^2+A^2C+AC^2+B^2C+BC^2)$$
$$- p^2r(A^2B^2+A^2C^2+B^2C^2) - q^2r(AB+AC+BC)$$
$$- pq^2ABC(A+B+C) + qr^2(A+B+C)$$
$$- pr^2(A^2+B^2+C^2) = 0$$

où il faut remarquer que :

$A + B + C = P$	d'une dimenſion de x
$AB+AC+BC = Q$	de deux dimenſions
$ABC = R$	de trois dimenſions.

XXIV. Pour les autres expreſſions on les trouvera formées des coëfficients P, Q, R en ſorte :

$A^2 + B^2 + C^2 = P^2 - 2Q$ de 2 dimenſ.

$A^2B + AB^2 + A^2C + AC^2 + B^2C + BC^2 = PQ - 3R$ de 3 dimenſ.

$A^3 + B$

$A^3 + B^3 + C^3 = P^3 - 3PQ + 3R$ de 3 dim.

$A^3B + AB^3 + A^3C + AC^3 + B^3C + BC^3 = P^2Q - PR - 2Q^2$ de 4 dim.

$A^2B^2 + A^2C^2 + B^2C^2 = Q^2 - 2PR$ de 4 dim.

$A^3B^2 + A^2B^3 + A^3C^2 + A^2C^3 + B^3C^2 + B^2C^3 = PQ^2 - 2P^2R - QR$ de 5 dim.

$A^3B^3 + A^3C^3 + B^3C^3 = Q^3 - 3PQR + 3RR$ de 6 dim.

d'où l'on voit clairement, puisque p, q, & r ſont des fonctions d'une, 2 & 3 dimenſions de x, que tous les termes renferment le même nombre de dimenſions de x, & que ce nombre eſt $= 9$, comme l'enoncé de la propoſition exige. Or cette ſubſtitution donnera l'equation ſuivante par l'elimination de la variable y:

$$+R^3 - pQR^2 + qQ^2R - 2qPR^2 - rQ^3 + 3rPQR - 3rR^2$$
$$- r^3 + qr^2P - q^2rQ + 2pr^2Q + q^3R - 3pqrR + 3r^2R$$
$$+p^2PR^2 - pqPQR + 3pqRR + prPQ^2 - 2prP^2R - prQR + q^2P^2R$$
$$- pr^2P^2 + pqrPQ - 3r^2PQ - pq^2PR + 2p^2rPR + qrPR - p^2rQ^2$$
$$+ rrP^3 - 2qqQR - qrP^2Q$$
$$- p^3R^2 + 2qrQQ + ppqQR = o.$$

XXV, Cet exemple ſervira à nous convaincre en général, ſi les deux équations propoſées ſont:

$$y^m - Py^{m-1} + Qy^{m-2} - Ry^{m-3} + Sy^{m-4} \ldots \pm V = o$$
$$y^n - py^{n-1} + qy^{n-2} - ry^{n-3} + sy^{n-4} \ldots \pm v = o$$

où P & p ſont des fonctions d'une dimenſion de x; Q & q de deux; R & r de trois &c. & les derniers termes V de m dimenſions & v de n dimenſions: que le premier terme, que l'equation du §. XIX. réſultante par l'elimination fournit, ſera $A^n B^n C^n D^n$ &c. $= V^n$ & partant de mn dimenſions de x, & puiſqu'on voit auſſi clairement, que tous les autres termes pouvant être exprimés par les lettres P, Q, R &c. & p, q, r &c. doivent contenir le même nombre de dimenſions de x, il eſt inconteſtablement démontré, que l'equation, à laquelle on parvient par l'elimination de la lettre y, ſera de mn dimenſions de x: tout comme la propoſition générale avance.

SUITE

SUITE DES RECHERCHES SUR LE CALCUL INTEGRAL.

PAR M. D'ALEMBERT.

TROISIE'ME PARTIE.

DES DIFFERENTIELLES QUI SE RAPPORTENT A' LA QUADRATURE DES LIGNES DU TROISIEME ORDRE.

PROBLEME I.

I.

Trouver l'integrale de $\frac{dx}{x^n \sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}}$, *n étant un nombre entier positif.*

Si on prend la difference de $x^{-q} \sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}$, on trouvera que cette difference eſt égale à la quantité ſuivante ;

$$\frac{dx}{2\sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}} \cdot (-2aqx^{-q-1} - 2bqx^{-q} - 2cqx^{-q+1} - 2fqx^{-q+2} + bx^{-q} + 2cx^{-q+1} + 3fx^{-q+2})$$

d'où il s'enſuit 1°. que ſi l'on fait $q = 1$, l'integrale de dx

$\frac{dx}{x^2\sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}}$ dépendra de celle de $\frac{dx}{x\sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}}$, de celle de $\frac{dx}{\sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}}$ & de celle de $\frac{x\,dx}{\sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}}$. Or ces deux dernieres se rapportent à la rectification des sections coniques, comme nous l'avons fait voir dans la seconde partie: donc la differentielle $\frac{dx}{x^2\sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}}$ dépend de la rectification des sections coniques, & de l'intégration de $\frac{dx}{x\sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}}$

2°. On prouvera de la même maniére, en faisant $q = 2$, que $\frac{dx}{x^3\sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}}$ dépendra de $\frac{dx}{x^2\sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}}$, de $\frac{dx}{x\sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}}$ & de $\frac{dx}{\sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}}$; d'où il s'ensuit qu'elle dépendra des sections coniques, & de la differentielle $\frac{dx}{x\sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}}$; & parconséquent il est facile de voir qu'en général $\frac{dx}{x^n\sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}}$ dépend de la rectification des sections coniques, & de la differentielle $\frac{dx}{x\sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}}$. Or cette derniére differentielle ne peut se réduire, du moins par la methode présente, à la rectification des sections coniques, parcequ'en faisant $q = 0$, on a $2aqx^{-q-1} = 0$. Nous enseignerons dans le probleme suivant, laquelle est la quadrature la plus simple à laquelle elle paroisse pouvoir se réduire.

CO-

COROLL. I.

II. Au reſte il eſt bon de remarquer qu'il y a des cas où la differentielle $\frac{dx}{x^n V(a+bx+cx^2+fx^3)}$ ſe rapporte uniquement à la rectification des ſections coniques. Ce ſont les cas, où les coëfficients a, b, c, f, & l'expoſant n ſont tels, que le coëfficient qui affecte $\frac{dx}{xV(a+bx+cx^2+fx^3)}$ eſt $=o$. Par exemple $\frac{dx}{x^3 V(a+bx+cx^2+fx^3)}$ dépend de la rectification des ſections coniques, & des intégrales de $\frac{3bdx}{-2ax^2 V(a+bx+cx^2+fx^3)}$ & de $\frac{3cdx}{-2axV(a+bx^2+cx^2+fx^3)}$; or l'intégrale de $\frac{dx}{x^2 V(a+bx+cx^2+fx^3)}$ dépend de la rectification des ſections coniques, & de $\frac{bdx}{-2axV(a+bx+cx^2+fx^3)}$, donc l'integrale cherchée dépend de la rectification des ſections coniques, & de $\left(\frac{3bb}{4aa}-\frac{3c}{2a}\right)\cdot\frac{dx}{xV(a+bx+cx^2+fx^3)}$. D'où il s'enſuit que la differentielle propoſée eſt abſolument dépendante de la rectification des ſections coniques, ſi $bb=2ca$.

On verra de même que $\frac{dx}{x^2 V(a+cx^2+fx^3)}$ dépend de la rectification des ſections coniques, parceque $b=o$, & ainſi des autres.

COROLL II.

III. Si b & $c=o$, c'eſt à dire ſi la differentielle propoſée eſt $\frac{dx}{x^n V(a+fx^3)}$; En ce cas elle ſe réduira toujours à la rectification

des ſections coniques. Car $\frac{dx}{x\sqrt{(a+fx^3)}}$ ſe change en une fraction rationelle, en faiſant $x^3 = u$ & $a + fu = z$; d'où il s'enſuit qu'elle s'integre, ou par des arcs de cercle, ou par les logarithmes, c'eſt à dire, par des arcs de cercle, ou de parabole. Donc &c.

Coroll. III.

IV. De là il s'enſuit que la differentielle $x^{\pm p} dx.(a+bxx)^{\pm \frac{n}{3}}$, dans laquelle p & n répréſentent des nombres entiers quelconques, ſe rapporte toujours à la rectification des ſections coniques: car ſi on fait $a + bxx = z^3$, on aura une transformée de cette forme $z^{\pm q} dz(e+gz^3)^{\pm \frac{r}{2}}$, q & r marquant des nombres entiers poſitifs. Or cette derniere quantité ſe rapporte à la rectification des ſections coniques, car 1°. ſi on a $+\frac{r}{2}$, on multipliera le haut & le bas par $\sqrt{(e+gz^3)}$ & on aura une transformée, dont les differens termes ſeront de la forme $\frac{z^{\pm k} dz}{\sqrt{(e+gz^3)}}$, & par conſequent ſe rapportent à la rectification des ſections coniques. 2°. Si on a $-\frac{r}{2}$, on pourra toujours réduire l'integration de la differentielle propoſée à celle de $\frac{z^{\pm k} dz}{\sqrt{(e+gz^3)}}$. Car la differentielle de $\frac{z^s}{(e+gz^3)^{\frac{m}{2}}}$ eſt $\frac{s z^{s-1} dz}{(e+gz^3)^{\frac{m}{2}}} - \frac{3mgz^{s+2} dz}{2(e+gz^3)^{\frac{m+2}{2}}}$; d'où l'on voit qu'en général

l'inte-

l'integration de $z^{\pm q} dz\,(e+gz^3)^{-\frac{r}{2}}$ depend de celle de $z^{\pm q-3} dz\,(e+gz^3)^{-\frac{r+1}{2}}$ & ainſi de ſuite, & que par conſéquent l'intégration de la differentielle propoſée ſe réduit à celle de $\frac{z^{\pm k} dz}{\sqrt{(e+gz^3)}}$. Or comme cette derniére ſe reduit à la rectification des ſections coniques, il s'enſuit &c.

COROLL. IV.

V. De ce que $z^{\pm q} dz\,(e+gz^3)^{\frac{\pm r}{2}}$ ſe réduit à la rectification des ſections coniques, il s'enſuit, en faiſant $z = u^{-1}$, que $u^{\frac{\pm n}{2}} du\,(m+pu^3)^{\frac{\pm r}{2}}$ s'y réduit auſſi, n & r étant des nombres poſitifs & entiers.

COROLL. V.

VI. Il eſt donc evident, tant par ce que nous avons dit dans la ſeconde partie, que par les Coroll. precedens, qu'en général $z^q dz\,(e+gz^m)^n$ ſe réduit à la rectification des ſections coniques, m étant $= 2$ ou $= 3$; q étant égale à la moitié d'un nombre entier poſitif ou negatif, & n étant égale à la moitié d'un nombre entier poſitif ou negatif, ou même encore au tiers d'un nombre entier poſitif ou negatif, lorſque $m = 2$. Ou enfin, lorſqu'on a $m = 2$; $q =$ à un nombre entier poſitif ou negatif, & $n =$ au quart d'un nombre entier poſitif ou negatif. Or ſoit propoſé d'integrer $z^p dz\,(a+bz^r)^{\frac{s}{r}}$, & ſoit fait $a+bz^r = u^t$, on aura pour transformée une quantité de cette forme $u^{ts+t-1} du\,(f+gu^t)^{\frac{p+1-r}{r}}$; d'où il

s'enſuit que la propoſée eſt réductible à des arcs de ſections coniques Io. ſi $t = 2$, $2t + 1 = \pm\frac{n}{2}$ & $\frac{p+1-r}{r} = \pm\frac{q}{2}$ ou $\pm\frac{q}{3}$ n & q exprimant des nombres entiers. 2°. ſi $t = 3$, $3t + 2 = \pm\frac{n}{2}$, & $\frac{p+1-r}{r} = \pm\frac{q}{2}$. 3°. ſi $t = 2$, $2t + 1 = \pm n$, & $\frac{p+1-r}{r} = \pm\frac{q}{4}$.

PROBLEME II.

VII. *Trouver l'intégrale de* $\frac{dx}{x\sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}}$.

On commencera par ſuppoſer $x = u^{-1}$, ce qui donnera pour transformée $\frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}$. Or je dis que l'intégration de cette derniére differentielle dépend de celle de $\frac{du\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}{\sqrt{u}}$ qui eſt l'élément d'un eſpace curviligne du 3e ordre, dont l'équation ſeroit $uyy = k + lu + mu^2 + nu^3$. Pour le démontrer, je ſuppoſe, qu'on ait à integrer $\frac{du\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}{\sqrt{u}}$; je mets d'abord cette quantité ſous la forme ſuivante $\frac{k\,du}{\sqrt{u}.\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}} + \frac{l\,du\sqrt{u}}{\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}} + \frac{mu\,du\sqrt{u}+nu^2\,du\sqrt{u}}{\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}$, or de ces trois quantités la premiére ſe rapporte à des arcs de ſections coniques, en faiſant $u = z^{-1}$. De plus on trouvera que

$$\frac{n\mu^2 du\sqrt{u}+mu\,du\sqrt{u}+l\,du\sqrt{u}}{\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}} = d\left(\frac{u^{\frac{1}{2}}\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}{2}\right)$$

$$+\frac{l\,du\sqrt{u}}{2\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}+\frac{m}{4n}\cdot d\left(u^{-\frac{1}{2}}\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}\right)$$

$$-\frac{m\,m\,du\sqrt{u}}{8n\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}+\frac{m}{4n}\cdot\frac{k\,du.\,u^{-\frac{3}{2}}-\frac{k\,n\,u^{-\frac{1}{2}}\,du}{m}}{\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}.$$

Or en faiſant $u = z^{-1}$, on verra facilement que

$\frac{k\,du.\,u^{-\frac{3}{2}}-\frac{k\,n\,u^{-\frac{1}{2}}\,du}{m}}{\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}$ ſe rapporte à des arcs de ſections coniques, d'où il s'enſuit que la differentielle $\frac{du\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}{\sqrt{u}}$ dépend de la rectification des ſections coniques, & de $\left(\frac{l}{2}-\frac{m\,m}{8\,n}\right)\frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}$. Donc réciproquement $\frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}$ dépend de $\frac{du\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}{\sqrt{u}}$. *Ce qu'il falloit trouver.*

Remarque Iere.

VIII. Il n'y a qu'un ſeul cas où la demonſtration précedente puiſſe ſouffrir quelque difficulté, c'eſt celuy où $\frac{l}{2}$ ſera égal à $\frac{m\,m}{8\,n}$; car alors les deux differentielles $\frac{d\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}{\sqrt{u}}$ &

du

$\frac{-du\sqrt{u}}{\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}$ ne dépendroient plus l'une de l'autre. Je feray voir dans la ſuite, qu'en ce cas, l'une & l'autre differentielle ſe rapporte à la rectification des ſections coniques ; mais je me contenteray de faire voir pour le préſent, que la differentielle $\frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}$ peut ſe réduire à une autre qui dépende de la quadrature d'une courbe du 3e ordre. Pour le démontrer, ſoient $au+b$, $cu+e$, $gu+f$, les trois racines de $k+lu+mu^2+nu^3$, dont deux peuvent être imaginaires ; la condition de $4ln = mm$, donnera $2baecgg+2bfccag+2faacge = bbcegg+aaeegg+ffaacc$. Faiſons maintenant $au+b=x$, la differentielle propoſée ſe changera en

$$\frac{x\,dx-b\,dx}{\sqrt{a}.\sqrt{x}.\sqrt{(x-b)}.\left(\frac{cx-cb+ae}{a}\right).\left(\frac{gx-gb+af}{a}\right)}.$$

Or la ſeconde partie

$$\frac{-b\,dx}{\sqrt{x}\sqrt{(ax-ab)}\ \sqrt{\left(\frac{cx-cb+ae}{a}\right)-\left(\frac{gx-gb+af}{a}\right)}},$$

s'integre par des arcs de ſections coniques, en faiſant $x=z^{-1}$: à l'égard de la premiére partie, elle s'integrera par le Probleme précedent, pourvu que $3ccggbb-2baecgg-2afccbg$ ne ſoit point $=aaeegg-2aaegfc+aaffcc$. Or cette équation étant combinée avec l'équation $2baeegg+2bfccag+2faacge = bbccqq+aaeegg+ffaacc$ donne $ccggbb-aebcgg-bccagf=o$. d'où l'on tire $cbg=o$, ou $cgb-aeg-acf=o$ dans le 1er. cas on aura $k=o$ ou $n=o$, & la differentielle propoſée ſe reduira à des logarithmes ou à des arcs de cercle, ou à des arcs de

ſections

ſections coniques; dans le ſecond cas on aura $cgb = aeg + acf$ & $ggccbb + aaeegg + aaccff = 2ggbcae + 2ccafgb - 2aaegcf$; & cette équation étant combinée avec la premiére équation, qui réſulte de la condition $4ln = mm$, on aura $aaegcf = o$; donc a ou g ou e, ou c, ou $f = o$, & par conſéquent on a encore $k = o$ ou $n = o$ & la propoſée ſe réduit à des logarithmes, ou à des arcs de cercle, ou à des arcs de ſections coniques. Donc ſi $4ln = mm$, on pourra toujours réduire la differentielle propoſée à la quadrature d'une courbe du 3. ordre, à moins que $3ccggbb - 2baecgg - 2faccbg$ ne ſoit $= aaeeegg - 2aaeecfc + aaffcc$, auquel cas elle s'integrera par des arcs de ſections coniques, c'eſt à dire par des arcs, de cercle, ou de parabole, ou d'ellipſe, ou d'hyperbole.

Remarque II.

IX. Je n'ai pu parvenir jusqu' à préſent à m'aſſurer, ſi la differentielle $\frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}$ pouvoit en général ſe réduire à des arcs de ſections coniques; mais j'ai trouvé un trés grand nombre de cas où elle peut en effet s'y réduire, & je crois qu'il ne ſera pas inutile d'en parler icy.

En prémier lieu, je dis que ſi $4ln = mm$, la differentielle eſt toujours réductible à des arcs de ſections coniques. Pour le démontrer, je remarque que ſuivant les calculs de l'art. 7 on a $\int \frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}$ egal à une fraction dont le denominateur eſt $\frac{mm}{8n} - \frac{l}{2}$ & dont le numerateur eſt

$$\frac{\int du\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}{\sqrt{u}} + V' + \int \frac{\left(\frac{k-kn}{4m}\right) u^{-\frac{1}{2}} du + \frac{kmu}{4n}^{-\frac{1}{2}} du}{\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}$$

V' marquant une fonction finie de n, & lorsque $mm = 4ln$, le numerateur

merateur & le denominateur de cette fraction deviennent égaux à zero. Il faut donc pour avoir alors la valeur de cette fraction, en differentier le haut & le bas fuivant les regles connuës, en faiſant varier une des quantités l, m, n, à volonté, par exemple l & faiſant tout le reſte conſtant. Or en faiſant cette differentiation, ou aura fuivant les regles connuës des Geometres, la difference de $\frac{mm}{8n} - \frac{l}{2} = -\frac{dl}{2}$ celle de $\int \frac{du\,V(k+lu+mu^2+nu^3)}{V\,u} = dl \int \frac{du\,V\,u}{2V(k+lu+mu^2+nu^3)}$ celle de $V' = V''\,dl$, V'' exprimant une fonction finie de u, & enfin celle du terme fuivant $= -\frac{dl}{2} \frac{\int \frac{3k}{4} u^{\frac{1}{2}} du + \frac{km}{4n} u^{-\frac{1}{2}} du}{(k+lu+mu^2+nu^3)^{\frac{3}{2}}}$ laquelle ſe réduira aiſement à des arcs de ſections coniques en faiſant $u = z^{-1}$. On aura donc

$$\int \frac{du\,V\,u}{V(k+lu+mu^2+nu^3)} = \Phi\,dl + dl \int \frac{du\,Vu}{2V(k+lu+mu^2+nu^3)} - \frac{dl}{2},$$

Φ étant une quantité en partie integrable, & en partie réductible à des arcs de ſections coniques donc $\int \frac{du\,V\,u}{V(k+lu+mu^2+nu^3)} = -\frac{\Phi}{2}$ donc &c. Ce *q. f.* D.

RE-

REMARQUE III.

X. Nous avons fait voir dans l'art. 8 que la differentielle $\frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}$ ou $\frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{(au+b).\sqrt{(cu+e)(gu+f)}}}$ ſe réduiſoit à la differentielle $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(ax-ab).\sqrt{\left(\frac{cx-cb+ae}{a}\right)\left(\frac{gx-gb+af}{a}\right)}}}$. Or la Iere. differentielle eſt réductible à des arcs de ſections coniques (art. 8 & 9) lorsque $2baecgg+2bfccag+2faacge=bbccgg+aaeegg+aaffcc$ ..... (A). Donc ſi on fait $-ab=b'$, $\frac{c}{a}=c'$, $-\frac{cb+ae}{a}=e'$, $\frac{g}{a}=e'$, $\frac{-gb+af}{a}=f'$, la IIde. & la Iere, differentielle ſe réduiront à des arcs de ſections coniques, toutes les fois que $2b'a'e'c'g'g'+2b'f'c'c'a'g'+2f'a'a'c'g'e'=b'b'c'c'g'g'+a'a'e'e'g'g'+a'a'f'f'c'c'$; c'eſt à dire toutes les fois que $2baecgg+2aecgg+2afbccg-2aaeegfc$ ſera $=3ccbbgg-aaeegg-aaffcc$.

De plus on a vu cy-deſſus que $\frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{(k+nu^3)}}$ étoit toujours réductible à des arcs de ſections coniques ; d'où il s'enſuit que chacune des deux differentielles precedentes eſt réductible à des arcs de ſections coniques toutes les fois que l'on a $-3cbg+aeg+afc=o$ & $-3bbcg-2aebg-2afcb+aafe=o$; ou $-3c'b'g'+a'e'g'+a'e'g'+a'f'c'=o$ & $-3b'b'c'g'-2a'e'b'g'-2a'f'c'b'+a'a'f'e'=o$.

REMARQUE IV.

XI. On peut encore trouver beaucoup d'autres cas, où la differentielle $\frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{(au+b)\ \sqrt{(cu+e)\ (gu+f)}}}$ eſt réductible à

des arcs de ſections coniques. Pour les déterminer, je me propoſe, au lieu de cette differentielle, celle-cy qui revient au même (art. 7) $\frac{dx\sqrt{x}}{x\sqrt{(mx+n)}.\sqrt{(a+bx+cxx)}}$, & que j'ecris ainſy $\frac{-mdx}{n\sqrt{(mx+n)}.\sqrt{(a+bx+cxx)}} + \frac{\sqrt{(mx+n)}.dx}{nx.\sqrt{(a+bx+cxx)}}$ & dont la premiére partie s'integre par des arcs de ſections coniques. Pour integrer la ſeconde, je fais $\frac{mx+n}{(a+bx+cxx)} = \frac{1}{Bz+\frac{a}{n}}$; je tire de cette équation $x = -\frac{b}{2c} + \frac{am}{2nc} + \frac{Bmz}{2c} \pm \sqrt{\frac{(nb-am)^2}{4nncc} + \frac{Bmz(am-bn)}{2ncc} + \frac{BBmmzz}{4cc}}$; $+\frac{nBz}{c}$

ſubſtituant une de ces valeurs de x dans la difference propoſée, & multipliant le haut & le bas de la fraction par l'autre valeur de x, on aura une transformée, dont une partie des termes s'integrera par des arcs de ſections coniques, & l'autre ſe réduira à l'integration de la differentielle ſuivante

$$\frac{(bn-am)\,dz}{\frac{nBz}{c}\sqrt{(Bz+\frac{a}{n})}\sqrt{\frac{(bn-am)^2+2Bmnz(am-bn)+4n^3cBz+BBmmnzz}{4nncc}}}.$$

Je ſuppoſe pour abreger $B = m'$, $\frac{a}{n} = n'$, $\frac{(bn-am)^2}{4nncc} = a'$, $\frac{2mm'n(am-bn)+4n^3cm'}{4nncc} = b'$, $\frac{m'm'mmnn}{4nncc} = c'$; & il

eſt

eſt evident que la differentielle propoſée $\frac{dx}{x\sqrt{(mx+n)}.\sqrt{(a+bx+cxx)}}$ ſe réduira à la differentielle $\frac{dz}{z\sqrt{(m'z+n')}.\sqrt{(a'+b'z+c'zz)}}$.

De même en faiſant $\frac{a'}{n'} = n''$, $\frac{(b'n'-a'm')^2}{4n'n'c'c'} = a'$ &c. cette dernière differentielle ſe reduira à la differentielle $\frac{dz}{z\sqrt{(m''z+n'')}.\sqrt{(a''+b''z+c''zz)}}$; & ainſy de ſuite; d'où il réſulte que la differentielle propoſée ſera intégrable par des arcs de ſections coniques, toutes les fois qu'une des differentielles transformées le ſera.

Or I°. les differentielles transformées ſeront réductibles à des arcs de ſections coniques, toutes les fois que a', a'', a''' &c. ſeront égaux à zero. Ainſy pour avoir les cas où la propoſée eſt réductible à des arcs de ſections coniques, il faut d'abord ſuppoſer $a' = o$, c'eſt à dire $bn - am = n$, enſuite $b'n' - a'm' = o$, & ſubſtituer dans cette dernière équation les valeurs de b', n', a', m' en m, n, a, b, c, ce qui donnera une nouvelle équation: pour en avoir une troiſiéme, en ſubſtituant dans cette dernière m', ou ſa valeur à la place de m, n' à la place de n, a' à la place de a &c. Ainſy pour avoir en général toutes les équations que ce cas peut fournir, il faudra prendre pour première équation $a = o$; d'où l'on tirera une ſeconde équation en mettant $(bn - am)^2$ au lieu de a; & cette ſeconde en donnera un troiſiéme, en y ſubſtituant $(bn - am)^2$ au lieu de a, $\frac{n}{n}$ au lieu de n, m' à la place de m (& cette dernière quantité diſparoitra toujours) $nn'm'mm$ nn à la place de c & $2nm'mn(am-bn) + 4nncm'$ à la place de b. &c.

II°. La differentielle transformée $\frac{dz}{z\sqrt{(zm'+n')}.\sqrt{(a'+b'z+c'zz)}}$

eſt réductible à des arcs de ſections coniques, lorsque le produit de $m' z + n'$ par $a' + b' z + c' zz$ n'a que deux termes $A + B z^3$ ce qui donne deux équations entre les coëfficiens m', n', a', b', c', & ces deux équations en donneront pluſieurs autres, en ſubſtituant au lieu de m', n', a', b', c', leurs valeurs, comme on a fait dans l'art. precedent.

III°. La transformée eſt integrable par des logarithmes, ou des arcs de cercle, lorsque le produit de $m' z + n'$ par $a' + b' z + c' z z$ a deux racines égales, & cette condition fournit encore de nouvelles équations.

IV°. Enfin ſi ou fait $z = u^{-1}$ on trouvera encore (art. 10) d'autres cas où la transformée ſera integrable, & d'où l'on tirera encore des équations de condition entre les coëfficiens a, b, c &c.

REMARQUE V.

XII. Reciproquement, ſi la differentielle propoſée eſt integrable par des arcs de ſections coniques, toutes ſes transformées le ſeront auſſy; de ſorte que ſi on a une differentielle $\frac{dx}{x\sqrt{(Mx+N)}.\sqrt{(A+Bx+Cxx)}}$, & qu'on faſſe $\frac{a}{n} = N$, $\frac{(bn-am)^2}{4n^2c^2} = A$, $\frac{2mMn(am-bn)+4n^3cM}{4n^2c^2} = B$, $\frac{m^2M^2n^2}{4n^2c^2} = C$, l'integration de la differentielle propoſée ſe reduira à celle de la differentielle $\frac{dx}{x\sqrt{(mx+n)}.\sqrt{(a+bx+cxx)}}$; c'eſt à dire de la differentielle

$$\frac{dx}{x\sqrt{\left(\frac{+2nx\sqrt{C}.}{n\overline{B-2\sqrt{CA}}}\right)}\sqrt{\left(nN+2nx\sqrt{C}\left(\frac{N\sqrt{C}+M\sqrt{A}}{B-2\sqrt{CA}}\right)+\frac{nMxx}{B-2\sqrt{CA}}\right)}}$$

ainſy la differentielle propoſée ſera integrable toutes les fois que cette derniére

derniére le ſera ; ce qui donnera encore de nouvelles équations de condition entre les coëfficiens A, B, C, M, N ; & chacune de ces équations en donnera pluſieurs autres, en ſubſtituant ſucceſſivement n à la place de N, $\frac{2n\sqrt{C}}{B-2\sqrt{CA}}$ à la place de M, n N à la place de A &c.

Remarque VI.

XIII. On voit par là qu'en combinant enſemble les differentes transformations dont la differentielle $\frac{dx}{x\sqrt{(mx+n)}.\sqrt{(a+bx+xx)}}$ eſt ſuſceptible, & les differens cas dans leſquels cette differentielle ou ſes trans formées ſont réductibles à des arcs de ſections coniques, on trouvera un grand nombre d'équations de condition entre les coëfficiens a, b, c, m, n ; qui rendront la differentielle integrable par des arcs de ſections coniques ; & ſi la propoſée étoit donnée ſous la forme $\frac{dx}{x\sqrt{(p+qx+rxx+sx^3)}}$. Il faudroit mettre dans les équations de condition, au lieu de m, n, a, &c. leurs valeurs en p, q, r, &c. qu'on trouveroit facilement. Mais en voilà aſſés ſur cette recherche, que je laiſſe à d autres à pouſſer plus loin.

Remarque VII.

14. De plus ſi $a \pm bx + cxx$ a ſes racines imaginaires, ce qui n'arrivera que quand a & c ſeront poſitifs & que bb ſera $< 4ac$ on pourra toujours transformer la differentielle propoſée en d'autres de même forme, & dans les quelles les racines du binome ſeront réelles. Pour cela il ſuffira de ſuppoſer $x \pm \frac{b}{2c} = z$ & $z + \sqrt{(zz + \frac{a}{c} - \frac{bb}{4cc})} = e$; ou (ſi on a $-bx$ & que $\frac{b}{2c}$ ſoit $> x$) $\frac{b}{2c} - x = z$ & $\sqrt{(zz$

& $V(zz+\frac{e}{c}-\frac{bb}{4cc})-z=u$. Ainſy quand je diray dans la ſuite qu'une differentielle eſt réductible à la quadrature des courbes du III$_e$. ordre, j'entendray toujours les courbes qui ont pour équation $xyy=p+qx+rx^2+sx^3$, le ſecond membre ayant toutes ſes racines réelles.

PROBLEME III.

XV. *Trouver l'intégrale de* $(Kx+c)^{\frac{p}{q}}.(f+gx)^{\frac{n}{q}}dx(a+bx+cxx)^{\frac{m}{q}}$ p, n, m, *exprimant des nombres entiers poſitifs ou negatifs.*

I$_o$. Si p eſt un nombre entier negatif, on pourra toujours (en faiſant $f+gx=z$) changer la propoſée en une quantité dont chaque terme aura cette forme $\frac{qz^k dz}{(hz+e)^p.z^{\frac{r}{2}}(\alpha+\beta z+\delta zz)^{\frac{s}{2}}}$; on diviſera z^k par $(bz+e)^p$ tant que cela ſe pourra faire, & chacune des parties du quotient etant multipliée par $\frac{dz}{z^{\frac{r}{2}}(\alpha+\beta x+\delta zz)^{\frac{s}{2}}}$ s'integrera par des arcs de ſections coniques.

II$_o$. Lors qu'on ſera enfin parvenu à avoir $k<p$, on commencera par mettre la quantité reſtante ſous cette forme, $\frac{qz^k.z^{\frac{s}{2}}dz}{(hz+e)^p.z^{\frac{r+s}{2}}(\alpha+\beta z+\delta zz)^{\frac{s}{2}}}$ & enſuite ſous celle-cy $\frac{Pdz.z^{\frac{s}{2}}}{(hz+e)^p(\alpha+\beta z+\delta zz)^{\frac{s}{2}}}+\frac{Qdz.z^{\frac{s}{2}}}{z^{\frac{r+s}{2}}(\alpha+\beta z+\delta zz)^{\frac{s}{2}}}$

P & Q

P & Q etant des fonctions de z, rationelles & ſans diviſeur. Cel poſé, on remarquera que la II^{de}. de ces deux quantités s'integre par des arcs de ſections coniques, à l'egard de la Iere, on ſuppoſera

$\frac{z}{a + \delta z + \delta z\, z} = \frac{1}{y}$ d'où l'on tire $z = Ay + B \pm \sqrt{(G + (Ay + B)^2}$ ($\&\ bz + e = bAy + bB + e \pm b\sqrt{G + (Ay + B)^2}$) ſubſtituant ces valeurs, & multipliant le haut & le bas de tous les termes par $bAy + bB + e \mp b\sqrt{(G + (Ay + B)^2)}$ on aura une transformée, dont les termes les plus difficiles à integrer ſeront de cette forme $\frac{y^{\pm \frac{n}{2}}\, dy}{(Ky + H)^p \sqrt{(M + Ny + Ryy)}}$, qu'on peut toujours réduire à la forme $\frac{u^{\frac{q}{2}}\, du}{(Pu + L)^p \sqrt{(D + Fu + Gu)^2}}$, q étant un nombre entier poſitif, parceque ſi n eſt negatif, il n'y a qu'à faire $y = u^{-1}$ & qu'on aura pour transformée $\frac{R\, u^{\frac{n-1+p}{2}}\, du}{(Pu + L)^p \sqrt{(D + Fu + Gu)^2}}$.

Pour trouver maintenant l'integrale de $\frac{y^{\frac{n}{2}}\, dy}{(Ky + H)^p \sqrt{(M + Ny + Ryy)}}$, n & p étant des nombres entiers poſitifs, je ſuppoſe $Ky + H = s$ pour avoir une transformée de

cette forme, $\frac{dt.(\gamma t+\varepsilon)^{\frac{n}{2}}}{t^{p}\sqrt{(\mu+\nu t+\omega tt)}}$ qui pourra encore être développée en differens termes de la forme $\frac{t^{\pm q}\,dt\sqrt{(\gamma t+\varepsilon)}}{\sqrt{(\mu+\nu t+\omega tt)}}$.

Or I°. si on a t^{q}, l'integrale n'a aucune difficulté, & se réduit à des arcs de sections coniques. II°. Si q est negatif, on multipliera le haut & le bas par $\sqrt{(\gamma t+\varepsilon)}$ pour avoir deux differentielles de cette forme, $\frac{dt}{t^{k}\sqrt{(a+bt+ctt+t^{3})}}$ qui (art. 1. & suiv.) se réduiront à la quadrature d'une courbe du IIIe. ordre.

Coroll. I.

XVI. Donc le produit de $(f+gx)^{\frac{n}{2}}\,dx.\,(a+bx+\tilde{c}xx)^{\frac{m}{2}}$ (n & m étant des nombres entiers positifs ou negatifs) par une fonction rationelle quelconque de x, pourra s'integrer par le Problême precedent, pourvuque l'on puisse partager le dénominateur de la fonction (si elle est une fraction) en des quantités simples $(x+b)^{p}$, p étant un nombre entier quelconque, c'est à dire, pourvu que le denominateur de la fonction, s'il y en a un, ait toutes ses racines réelles.

Coroll. II.

XVII. Donc on pourra integrer encore par le Probleme precedent le produit de $dx\,(e+fx)^{\frac{n}{2}}.\,(g+kx)^{\frac{m}{2}}.\,(a+bx+\tilde{c}xx)^{\frac{s}{2}}$ par une fonction rationelle de x, qui ait les conditions marquées dans l'art. 16. Pour le bien voir, il n'y a qu'à écrire $(g+kx)^{\frac{m+n}{2}}$

$(e+f$

$\left(\frac{e+fx}{g+kx}\right)^{\frac{n}{2}}$ au lieu de $(e+fx)^{\frac{n}{2}}\ (g+fx)^{\frac{m}{2}}$ & ſuppoſer en ſuite $\frac{e+fx}{g+kx} = z$.

Corol. III.

XVIII. Le produit d'une fonction rationelle de x, qui ait toujours les mémes conditions, par $dx\ (a+bx+cxx)^{\pm\frac{m}{2}}\ (e+fx+gxx)^{\pm\frac{n}{2}}$ peut toujours ſe développer en divers termes de cette forme

$$\frac{Kx^q\,dx}{(lx+n)^r\,(a+bx+cxx)^{\frac{q+s}{2}}\left(\frac{a+fx+gxx}{a+bx+cxx}\right)^{\frac{s}{2}}} = \frac{Q\,dx}{(lx+n)^r\left(\frac{e+fx+gxx}{a+bx+cxx}\right)^{\frac{s}{2}}} + \frac{P\,dx}{(a+bx+cxx)^{\frac{q+s}{2}}\left(\frac{e+fx+gxx}{a+bx+cxx}\right)^{\frac{s}{2}}},$$

P & Q etant des fonctions de x rationnelles & ſans diviſeur.

Or ſi on fait $\frac{e+fx+gxx}{a+bx+cxx} = \Phi + \frac{gx+\delta}{a+bx+cxx} = \Phi + \frac{I}{z}$, qu'on tire de la deux valeurs de x en z, & qu' aprés avoir ſubſtitué l'une de ces valeurs dans la differentielle donnée, on multiplie le haut & le bas par les valeurs de $(lx+n)^r$ & de $(a+bx+cxx)$ ou $(\gamma x+\delta)\ z$ qui réſulteroient de l'autre valeur de x, on aura une transformée, dont les differentes parties ſeront intégrables par le Corol. precedent.

Remarque I.

XIX. Il eſt presque inutile d'avertir qu'il y aura des cas, où par la deſtruction mutuelle des coëfficiens, les differentielles ſe reduiront à des arcs de ſections coniques. On peut même démontrer qu'elles s'y réduiront toujours, lorsque la differentielle propoſée ſera $\frac{dx}{(a+bx+cxx)^{\frac{q}{2}}.(e+fx+gxx)^{\frac{s}{2}}}$; & comme la démonſtration que nous avons à en donner, eſt aſſés ſinguliére, nous croyons devoir l'expoſer icy avec quelque etenduë. Suppoſons d'abord que l'un des deux facteurs du dénominateur, par exemple $(a+bx+cxx)$ ait ſes racines réelles, comme $mx+n$, $rx+p$, il eſt certain qu'en faiſant $mx+n=z$ & $z=u^{-1}$, la differentielle propoſée ſe changera en une autre de cette forme $\frac{u^{q+s-2}\,du}{(Au+B)^{\frac{q}{2}}(C+Du+Euu)^{\frac{s}{2}}}$ qui ſera réductible à des arcs de ſections coniques.

Or ſi l'on fait $\frac{e+fx+gxx}{a+bx+cxx}=\Phi+\frac{\gamma x+\delta}{a+bx+cxx}$ $=\Phi+\frac{1}{z}=\Phi+\frac{u}{m}$ on verra facilement par la methode du Corol. précedent que la differentielle propoſée ſe réduira à l'integration de la differentielle

$$\frac{du}{uV(\Phi\ \frac{u}{m})V(\frac{\gamma^2 m^2}{bb-4ac}+\frac{4c\delta mu-2b\gamma m uu}{bb-4ac}+u^2)}$$

ou à la rectification des ſections coniques, ſi le coëfficient qui doit affecter cette derniere differentielle, eſt $=o$.

Cela

Cela posé, I°. si ce coëfficient est égal à zero, il le sera toujours, soit que $a + bx + cxx$ ait ses racines réelles, ou non: car la condition que $a + bx + cxx$ ait ses racines réelles, n'emporte aucune équation entre les coëfficiens a, b, c, mais seulement la condition que $bb > 4ac$, donc si le coëfficient est $= o$ dans le cas des racines réelles, cela ne vient point de ce que les coëfficiens ont entr'eux un certain rapport, mais de ce qu'ils se détruisent mutuellement dans le coëfficient. Donc ils se detruiront également, quand $a + bx + cxx$ aura ses racines imaginaires: donc la differentielle proposée sera integrable dans ce Ier. cas par des arcs de sections coniques, soit que les racines de $a + bx + cxx$ soient réelles, ou non.

II°. Si le coëfficient de la differentielle n'est pas $= o$, alors il sera toujours possible de réduire la differentielle . . . .

$$\frac{du}{u\sqrt{(\Phi + \frac{u}{m})}.\sqrt{(\frac{\gamma^2 m^2}{bb - 4ac} + \frac{4c\delta m u - 2b\gamma m u}{bb - 4ac} + m^2)}}$$

à la rectification des sections coniques, & à l'integration de la differentielle . . . $\frac{dx}{(a+bx+cxx)^{\frac{q}{2}} . (e+fx+gxx)^{\frac{s}{2}}}$, $a + bx + cxx$ ayant ses racines réelles, c'est à dire, qu'on pourra toujours réduire à la rectification des sections coniques toute differentielle

$\frac{du}{u\sqrt{(\Phi + \frac{u}{m})}.\sqrt{(\alpha + \beta u + uu)}}$, α etant positif. [Il n'y auroit qu'un cas qui pût faire de la difficulté; ce seroit celuy où le coëfficient de la differentielle

$$\frac{du}{u\sqrt{(\Phi + \frac{u}{m})}.\sqrt{(\frac{\gamma^2 m^2}{bb - 4ac} + \frac{4c\delta m u - 2b\gamma m u}{bb - 4ac} + u^2)}}$$

seroit égal à zero, en vertu d'un certain rapport entre les coëfficiens a, b, c,

γ, δ: mais alors on prouveroit que la differentielle ſe réduiroit encore à des arcsde ſections coniques, par une methode parfaitement ſemblable à celle par laquelle on a prouvé dans l'art. 9. cy-deſſus que $\frac{d\,u\,V\,u}{V(k+l\,u+m\,u^2+n\,u^3)}$ ſe réduiſoit à des arcs de ſections coniques, lorsque $4\,l\,n = m\,m$.]

III. Si la differentielle étoit $\frac{d\,u}{u\,V(\Phi+\frac{u}{m}).\,V(\pm A+B\,u-u\,u)}$ on commenceroit par ſuppoſer cette differentielle

$$= -\frac{d\,u}{m\Phi\,V(\Phi+\frac{u}{m}).\,V(-A+B\,u-u\,u)} + \frac{du\,V(\Phi+\frac{u}{m})}{\Phi u V(-A+Bu-u^2}\,;$$

dont la Iere. partie s'integre par des arcs de ſections coniques, & dont la II^de^. ſe réduit (en faiſant $\frac{\Phi+\frac{u}{m}}{\pm A+B\,u-u^2} = \frac{1}{B\,z\pm\frac{A}{\Phi}}$) à des arcs de ſections coniques, & à l'integration de la differentielle $\frac{d\,z}{z\,V(B\,z+\frac{A}{\Phi}).\,V(\alpha+\beta z+z\,z)}$, α étant une quantité poſitive (art. 11). Or cette derniere differentielle ſe réduit (n. 2. art. pres.) à des arcs de ſections coniques. Donc la differentielle $\frac{d\,u}{u\,V(\Phi+\frac{u}{m}).\,V(\pm A+B\,u-u\,u)}$ s'y réduira auſſy.

IV. Or lorsque $a+b\,x+c\,x\,x$ a ſes racines imaginaires, c'eſt à dire, lorsque $b\,b < +\,a\,c$, la differentielle

$\frac{dx}{(a+bx+cxx)^{\frac{q}{2}}.(e+fx+gxx)^{\frac{s}{2}}}$ ſe réduit à la differentielle

$\frac{du}{u\sqrt{(\Phi+\frac{u}{m})}.\sqrt{(\frac{\gamma^2 m^2}{4ac-bb} - \frac{2b\gamma mu+4c\delta mu}{4ac-bb} - u^2)}}$

c'eſt à dire $\frac{du}{u\sqrt{(\Phi+\frac{u}{m})}.\sqrt{(\pm A+Bu-u^2)}}$. Donc la differentielle propoſée ſe réduira à des arcs de ſections coniques, même dans le cas où $a+bx+cxx$ aura ſes racines imaginaires. C. q. f. D.

REMARQUE II.

XX. Nous avons fait voir dans la ſeconde partie que lorsque $a+bx+cxx$ a ſes racines réelles, la differentielle

$\frac{(lx+n)^p dx}{(a+bx+cxx)^{\frac{q}{2}}(e+fx+gxx)^{\frac{s}{2}}}$ ſe réduit à des arcs de ſections coniques, pourvuque $q+s-2-p$ ne ſoit pas <0. Or on prouvera de la même maniére que dans l'article precedent, que cette même differentielle ſe reduit à des arcs de ſections coniques, lorsque $a+bx+cxx$ a ſes racines imaginaires.

REMARQUE III.

XXI. De plus, il eſt bon d'obſerver que ſi le coëfficient qui affecte la differentielle

$\frac{du}{u\sqrt{(\Phi+\frac{u}{m})}.\sqrt{(\frac{\gamma^2 m^2}{bb-4ac} + \frac{4c\delta mu-2b\gamma mu}{bb-4ac} + u^2)}}$

n'eſt pas égal à zero, on pourra, ſuivant la démonſtration donnée dans

dans l'art. 19, réduire toujours à des arcs de ſections coniques la différentielle $\frac{d\,u}{u\,V(A\,u+C).\,V(B+G\,u+H\,u\,u)}$, A, C, B, G, H etant des quantités conſtantes quelconques ; & ainſy toutes les quantités que nous avons appris à réduire à la quadrature des courbes du III. ordre, ſe réduiroient à des arcs de ſections coniques. Mais comme on ne peut s'aſſurer que par un calcul trés penible, ſi le coëfficient dont il s'agit eſt ègal à zero, ou s'il ne l'eſt pas? nous abandonnons cette recherche à d'autres, nous contentant d'indiquer icy l'utilité qu'on en pourroit tirer.

PROBLEME IV.

XXII. *Trouver la quadrature de toutes les courbes du 3e. ordre.*

Une courbe quelconque du 3e. ordre etant donnée avec ſon équation rapportée à un axe quelconque, on commencera par changer les coordonnées, de maniére que ſon équation devienne une des quatre que M. *Newton* a aſſignées pour toutes les lignes de cet ordre ; & on aura pour l'élément de l'aire, $p\,y\,d\,x$, en ſuppoſant que p ſoit le ſinus des ordonnées y avec les abſciſſes x, en prenant y & x pour les coordonnées nouvelles. Or l'integrale de $p\,y\,d\,x$ étant trouvée il n'y aura plus que des eſpaces rectilignes à ajouter ou à ſouſtraire pour avoir l'aire rapportée aux coordonnées primitives: toute la difficulté ſe réduit donc à trouver l'integrale de $y\,d\,x$ dans les quatre équations de M. *Newton*. Or la Ire. de ces équations donne $y\,d\,x = -\frac{e\,d\,x}{2\,x} \pm \frac{d\,x}{2\,x}\,.\,V(4\,a\,x^4+4\,b\,x^3+4\,c\,x^2+4\,\delta\,x+e\,e)$ qui s'integre par l'art. 18. La IIde. & la IIIe. donnent $y\,d\,x\,x = \frac{d\,x}{x}(a\,x^3+b\,x^2+c\,x+\delta)$ & $y\,d\,x = (a\,x^3+b\,x^2+c\,x+\delta)\,d\,x$; ce qui n'a aucune difficulté.

Enfin la IV. donne $y\,d\,x$ &c. $= d\,x\,V(a+b\,x+c\,x^2+e\,x^3)$ qui s'integre par des arcs de ſections coniques.

Donc

Donc toutes les lignes du 3e. ordre ſont quarrables, ou abſolument, ou par logarithmes, ou par des arcs de ſections coniques, ou enfin par la quadrature de la courbe, qui a pour équation $xy,y = a + bx + cx^2 + fx^3$, le II. membre ayant toutes ſes racines réelles.

COROLLAIRE.

XXIII. Si on propoſe d'integrer $(bx+l)^{p} dx\,(a+bx+cx^2+ex^3)^{\frac{+n}{-3}}$, p étant un nombre entier poſitif, & n un nombre entier, cette differentielle ſera toujours integrable par la quadrature d'une courbe du IIIe. ordre. Car ſoit $x = qu + ry + a'$ & $\sqrt[3]{(a+bx+cx^2+ex^3)} = b' + ku + my$, a', b', k, m, r, q, étant des conſtantes indeterminées, il eſt certain qu'on aura une transformée en u & en y, qu'on pourra toujours réduire à l'une des 4 équations de M. *Newton*, puiſque $\sqrt[3]{(a+bx+cx^2+ex^3)}$ eſt l'ordonnée d'une courbe du IIIe. ordre dont x eſt l'abſciſſe. On aura donc une valeur de x en u ou en y, qui étant ſubſtituée dans la differentielle propoſée, la rendra integrable par l'art. 18.

Si l étoit $= o$, & que p fut negatif, on pourroit encore ſe ſervir alors de la même methode, pourvuque $p - 2 \mp n$ ne fut pas plus petit que zero.

On pourra de même réduire à la quadrature d'une courbe du IIIe. ordre $(bx+l)^{p} dx.\ Y^{n}$, Y étant l'ordonnée d'une courbe quelconque du IIIe. ordre, & n, p, des nombres entiers poſitifs.

REMARQUE I.

XXIV. Il y a encore d'autres differentielles plus compliquées, qu'on peut, du moins en certains cas, réduire à la quadrature des courbes du IIIe. ordre. Par exemple ſi on a la differentielle $P dx$,

$(a+bx+cxx)^{\pm\frac{n}{2}}.(e+fx+gxx)^{\pm\frac{m}{2}}$, P étant une fonction rationelle de x, on pourra toujours, en ſuivant la methode de l'art. 18. réduire cette differentielle en differens termes, dont les plus compliqués ſeront de la forme

$$\frac{z^k dz}{(zz+pz+q)^r}\cdot\frac{Vz}{V(\alpha+\mathfrak{G}z+\delta zz)}.$$ Or faiſant $\frac{z}{V(\alpha+\mathfrak{G}z+\delta zz)}=-\frac{1}{u}$ on aura $zz+pz+q=zu-\frac{\mathfrak{G}z}{\delta}+pz-\frac{\alpha}{\delta}+q$; & $z=\frac{u-\mathfrak{G}}{2\delta}\pm V(-\frac{\alpha}{\delta}+\frac{(u-\mathfrak{G})^2}{4\delta\delta})$. D'où l'on conclura aiſement que ſi $q=\frac{\alpha}{\delta}$, la propoſée eſt réductible à la quadrature d'une courbe du IIIe. ordre, parcequ'on peut alors réduire $zu-\frac{\mathfrak{G}z}{\delta}+pz$ en diviſeurs ſimples z, & $u-\frac{\mathfrak{G}}{\delta}+p$.

Remarque II.

XXV. Toutes les differentielles que nous avons appris à integrer dans les trois differentes parties de ces recherches, ſoit par logarithmes, ſoit par des arcs de ſections coniques, ſoit enfin par la quadrature des courbes du IIIe. ordre, pourroient encore s'integrer par les mêmes methodes, ſi on y ſubſtituoit $nx^{n-1}dx$ au lieu de dx, & x^n au lieu de x.

QUATRIE'ME PARTIE

METHODES POUR INTEGRER QUELQUES E'QUATIONS DIFFERENTIELLES.

Je ſuppoſerai toujours dans les propoſitions ſuivantes $z = \frac{dx}{dy}$, $u = \frac{dz}{dy}$, ou $\frac{ddx}{dy^2}$, $k = \frac{du}{dy}$ ou $\frac{d^3x}{dy^3}$ &c.

PROBLEME I.

XXVI. *Trouver l'integrale d'une équation differentielle qui renferme telles fonctions qu'on voudra de* d x & *de* d y, *& dans laquelle* x *&* y *ſe trouvent, pourvu qu'ils ne ſoient ny multipliés ou diviſés l'un par l'autre, ny elevés à aucune puiſſance plus grande que l'unité.*

Il eſt viſible que ces ſortes d'équations pourront toujours être repréſentées par la formule $x = y\,\varphi\,z + \Delta\,z$, $\varphi\,z$ & $\Delta\,z$ marquant des fonctions quelconques de z, c'eſt à dire de $\frac{dx}{dy}$. Or differentiant cette formule, & mettant pour dx ſa valeur $z\,dy$ on aura $z\,dy = dy\,\varphi\,z + y\,d\,(\varphi\,z) + d\,(\Delta\,z)$ équation; d'où l'on tirera facilement la valeur de y en z, & par conſéquent auſſi celle de x, puisque $x = \int z\,dy$.

COROLL. I.

XXVII. On prouvera de la même maniere que l'on peut integrer toute équation réductible à la forme $z = y\,\varphi\,u + \Delta\,u$, ou $u = y\,\varphi\,k + \Delta\,k$ &c. d'où il s'enſuit qu'en général toute équation qui renfermera y & $d^n x$ lineaires, avec telle fonction qu'on voudra de $d^{n+1} x$ & de dy, ſera integrable par la methode du preſent probleme.

Coroll. I.

XXVIII. Si $x = y\varphi z$, c'eſt le cas des équations homogenes connu depuis longtems.

Si $x = yz + \Delta z$, l'équation appartient alors en même tems à une ligne droite, & à une ligne courbe. Car la differentiation donne $(y + \Gamma z)\,dz = o$, d'où l'on tire, ou bien $dz = o$ qui appartient à une ligne droite, ou $y = -\Gamma z$ qui eſt à une ligne courbe.

On peut auſſi obſerver en paſſant que l'équation $dx + \frac{ax + by + c}{gx + hy + f}\,dy = o$, ſur laquelle pluſieurs Geometres ſe ſont exercés, eſt un cas particulier de notre Problême.

Probleme II.

XXIX. *Trouver les conditions d'integrabilité de l'équation* $x^{m}y^{n}z^{r} = \varphi(x^{q}y^{s}z^{t})$ *dans laquelle* m, n, r, q, s, t, *marquent des nombres quelconques, &* $\varphi(x^{q}y^{s}z^{t})$ *une fonction quelconque de* $x^{q}y^{s}t$.

On ſuppoſera $x^{q}y^{s}z^{t} = u$, ce qui donnera $x = u^{\frac{1}{q}}y^{-\frac{s}{q}}z^{-\frac{t}{q}}$ & $x = (\varphi u)^{\frac{q}{qn-ms}}y^{\frac{-n}{m}\cdot\frac{q}{qn-ms}}z^{\frac{-r}{m}\cdot\frac{q}{qn-ms}}$; d'où l'on tire $y = (\varphi u)^{\frac{-m}{qn-ms}}u^{\frac{-rq+tm}{nq-ms}}z^{\frac{-s}{nq-ms}}$ & $x = (\varphi u)^{\frac{n}{nq-ms}}u^{\frac{rs-nt}{nq-ms}}z$: or $dx = z\,dy$. C'eſt pourquoy ſi on ſubſtituë les valeurs de dx & de dy dans cette derniére équation, on trouvera qu'elle eſt integrable dans tous les cas ſuivants, ſçavoir I°. $tm - rq = o$.

II°.

II. $rs - nt = o$. III. $1 + \frac{tm - rq}{nq - ms} = \frac{rs - nt}{nq - ms}$; c'eſt à dire $nq - ms + tm - rq = rs - nt$.

Scolie I.

XXX. Il eſt à remarquer qu'on ne retrouveroit que les mêmes équations de condition, ſoit qu'on tirât de l'équation differentielle donnée, les valeurs de y & de z, ou de x & de z.

De plus on obſervera que la Iere. équation $tm - rq = o$, donne $x^{mr} z^{n} y^{s} = \varphi(y^{pm} x^{pr} z)$ & qu'ainſi on a $x^{mr} z = \Delta y^{s}$ ce qui donne une équation facile à integrer. Mais la Methode que nous propoſons icy, a cet avantage, qu'elle donne le moyen d'integrer ces ſortes d'équations differentielles, ſans chercher la valeur de $x^{mr} z$ en y, ce qui ſeroit ſouvent impoſſible de trouver. Il en eſt de même du cas où $rs - nt = o$, qui donne $y^{n} z^{r}$ égale à une fonction de x.

Scolie II.

XXXI. Si $nq - ms = o$, on aura pour lors $x = u^{\frac{1}{q}} y^{\frac{-s}{q}} z^{\frac{-r}{q}}$ & $z^{\frac{m}{q} r - \frac{tm}{q}} = \varphi u$; & l'équation propoſée ſera integrable dans le cas où $-s = q$ & $n = -m$, ce qui revient au cas des équations homogenes.

Scolie III.

XXXII. Si on fait $t = o$, $r = 1$, on aura au lieu de la III. équation de condition $nq - ms = q + s$. Donc toute équation de cette forme $dx = x^{p} y^{t} dy \varphi(x^{q} y^{s})$ ſera integrable ſi $-tq + ps = q + s$.

Par exemple l'équation $dx = \frac{ax}{y} dy\ \varphi(x^q y^s)$ eſt integrable, parceque $-tq + ps = q + t$; de même l'équation $dx = dy \frac{\varphi(x y^s)}{y^{s+1}}$; & ainſy de pluſieurs autres ; le cas des équations homogenes eſt renfermé dans l'équation générale $-tq + qs = q + s$.

Scolie IV.

XXXIII. On peut déterminer par là les conditions d'integrabilité de l'équation $dx = ax^m y^n dy + px^e y^h dy + fx^g y^l dy +$ &c. car ſoit $x^b y^a = u$, a & b étant deux indeterminées, on aura une transformée integrable, toutes les fois que l'on aura $-\frac{a}{b} - 1 = -\frac{ma}{b} + n = -\frac{ea}{b} + h = -\frac{ga}{b} + l$ &c. c'eſt à dire lorsque l'on aura $\frac{n+1}{m-1} = \frac{h+1}{e-1} = \frac{l+1}{g-1}$ &c.

Scolie V.

XXXIV. Si dans toutes les équations précedentes, on met $\frac{d^n x}{dy^n}$ au lieu de x, & $\frac{d^{n+1} x}{dy^{n+1}}$ au lieu de z ou $\frac{dx}{dy}$, elles ſeront encore integrables dans les mêmes cas qui ont été determinés art. 29 & ſuiv.

PROBLEME III.

XXXV. *Trouver les conditions d'integrabilité de l'équation* $x = y^{k}\,z^{r}\,\varphi(y^{p}\,z^{n}) + \Delta(y^{p}\,z^{n})$.

I°. Soit $y^{p}\,z^{n} = u$, on aura $z = u^{\frac{1}{n}}\,y^{-\frac{p}{n}}$ & $dx = u^{\frac{1}{n}}\,y^{-\frac{p}{n}}\,dy$; & enfin $y^{k}\,z^{r} = u^{\frac{r}{n}}\,y^{k-\frac{pr}{n}}$; d'où l'on voit que la proposée sera integrable si $-\frac{p}{n} + 1 = k - \frac{pr}{n}$.

II°. Si on fait encore $y^{p}\,z^{n} = v$, on aura $y = u^{\frac{1}{p}}\,z^{-\frac{n}{p}}$; d'où l'on voit que l'équation proposée sera integrable, si $-\frac{n}{p} + 1 = -\frac{nk}{p} + r$; ce qui revient à la condition précedente.

SCOLIE I.

XXXVI. Si l'on avoit $x = y^{k}\,z^{r}\,\varphi(y^{p}\,z^{n}) + y^{k'}\,z^{r'}\,\Delta(y^{p}\,z^{n}) + y^{k''}\,z^{r''}\,\Gamma(y^{p}\,z^{n})$ &c. on trouveroit que cette équation seroit integrable, lorsque l'on auroit $\frac{p}{n} = \frac{k-1}{r-1} = \frac{k'-1}{r'-1} = \frac{k''-1}{r''-1}$ &c. ou bien lorsque k' & r', ou k'' & r'' &c. seroient égaux à zero.

SCOLIE II.

XXXVII. Si au lieu de x on met $\frac{d^{n}x}{dy^{n}}$, & au lieu de z, d^{n+1}

$\frac{d^{n+1}z}{dy^{n+1}}$ dans les équations precedentes, elles ſeront encore integrables dans les mêmes conditions.

Probleme II.

XXXVIII. *Trouver l'integrale de l'équation* $x + Z + a = \frac{yyz\,dz}{2\,dZ} + \frac{z\,dZ}{2\,dz}$ (a *marquant une conſtante &* Z *une fonction de* z).

Je ne donne icy la ſolution de ce probleme, que parce qu'elle me conduira à des formules plus générales. On mettra donc l'équation propoſée ſous la forme ſuivante $x - yz + Z + a = (y - \frac{dZ}{dz})^2 \frac{z\,dz}{2\,dZ}$; d'où l'on tire $(y - \frac{dZ}{dz}) \cdot \sqrt{\frac{z\,dz}{2\,dZ}} = \sqrt{(x - yz + Z + a)}$: or on a $dx - z\,dy = o$ & par conſéquent $dx - zdy - y\,dz + dZ + ydz - dZ = o$; & par conſéquent $\frac{dx - z\,dy - y\,dz + dZ}{\sqrt{(x - yz + Z + a)}} = \frac{-dz\,(y - \frac{dZ}{dz})}{(y - \frac{dZ}{dz})\sqrt{\frac{z\,dz}{2\,dZ}}}$; dont l'integrale eſt $\sqrt{(x - yz + Z + a)} = \frac{1}{2}\int -dz\sqrt{\frac{2\,dZ}{z\,dz}}$: cette équation combinée avec l'équation donnée, on en tirera la valeur de x ou de y en z, & enſuite l'équation $dx = z\,dy$, donnera la valeur de y ou de x en z.

Scolie I.

XXXIX. Si on diviſe le premier membre $dx - z\,dy - y\,dz + dZ$ de l'équation differentielle par $\Phi(x - yz + Z + a)$, & le ſecond mem-

membre $y\,dz - dz$ par la même quantité, on verra facilement que ce fecond membre, & par conféquent l'équation, eſt integrable, ſi $\frac{y\,dz - dZ}{\Phi(x - yz + Z + a)}$ eſt égal à $dz\,\Delta z$; donc on pourra intégrer toutes les équations dans lesquelles $x - yz + Z + a$ eſt égale à une fonction de $(y - \frac{dZ}{dz})$. Γz.

Si on fait $Z = o$, on aura $x - yz = \Phi(y\,\Delta z)$, équation qui renferme comme un cas particulier le probleme propoſé par Mons. *Bernoulli* en 1692, qui conſiſtoit à trouver des courbes dans lesquelles la refecte $x - yz$ fût en raiſon donnée avec la tangente $y\sqrt{(zz+1)}$.

Scolie II.

XL. Nous remarquerons icy en paſſant à l'occaſion de ce dernier probleme, que ſi on propoſoit de trouver des courbes, dans lesquelles la refecte fut proportionelle au produit d'une puiſſance quelconque de l'abſciſſe par une fonction quelconque de l'ordonnée & par une fonction quelconque de l'abſciſſe diviſée par l'ordonnée, on auroit pour équation $dx - \frac{x\,dy}{y} = Y\,x^n\,dy\,\frac{x}{y}$, Y étant une fonction de y. Or cette équation peut s'integrer aiſément en faiſant $x = yu$. Il en eſt de même de l'équation

$$dx - \frac{x\,dy}{y} = \frac{dy\,\Delta\frac{x}{y}}{\Phi\frac{x}{y} + y^p\,\Gamma\frac{x}{y}}.$$

Scolie III.

XLI. Soit encore $dx - z\,dy = o$; on multipliera cette équation par X que je ſuppoſe être une fonction de x, & on aura $X\,dx - X\,z\,dy - yX\,dz - z\,y\,dX + yX\,dz + z\,y\,dX = o$; multipliant

enſuite les quatre premiers membres par une fonction de leur integrale $\int X\,dx - y\,X\,z$, on trouvera que l'équation eſt integrable, ſi $\int X\,dx - y\,X\,z$ eſt égal à une fonction de $y \Delta X\,z$. Ainſi l'équation $\int X\,dx = p\,y\,X\,z + q\,y\,X^{n}\,z^{n} + a$, p, q, & a étant des conſtantes, peut être integrée par ce Theorême, ainſy que pluſieurs autres.

En général tout l'artifice de la methode que nous propoſons icy pour découvrir des équations integrables, conſiſte à préparer l'équation $dx - z\,dy = o$, de telle maniére qu'on puiſſe la diviſer en deux parties, dont l'une ſoit integrable, ou puiſſe au moins être renduë telle, & dont l'autre ſoit une differentielle exacte multipliée par quelque quantité que ce ſoit, ou au moins ſoit le produit d'une quantité quelconque, par une quantité infiniment petite, qui puiſſe être renduë aiſément une differentielle exacte; aprés cette préparation, on multipliera la prémiere partie par une fonction de ſon integrale ; & on ſuppoſera enſuite que le produit de cette fonction par la quantité qui multiplie la differentielle dans la II^{de}. partie, ſoit égal à une fonction de l'integrale de la differentielle contenuë dans la II^{de}. partie ; par là on aura l'équation de condition, qui rend la propoſée integrable.

De plus, au lieu d'écrire $dx - z\,dy = o$, on peut ecrire $dy - \frac{dx}{z} = o$, & mettant dans les équations de condition y pour x, x pour y, & $\frac{1}{z}$ pour z, on en trouvera de nouvelles. Par exemple $x - yz = \varphi(y \Delta z)$ donne $y - \frac{x}{z} = \varphi(x \Delta z)$ où $x - yz = z\,\varphi(x \Delta z)$ & ainſy des autres.

Enfin ces mêmes équations de condition auroient lieu, ſi à la place

place de x, on mettoit $\frac{d^n x}{dy^n}$ & à la place de z ou de $\frac{d^x}{d^y}$,

$\frac{d^{n+1} x}{(dy)^{n+1}}$.

Probleme V.

XLII. *On propoſe de trouver l'integrale des deux équations*

$$dx + (Cx + Dy)\,dt = o$$
$$dy + (Kx + Ly)\,dt = o.$$

On multipliera la II^de. de ces équations par un coëfficient indéterminé v, enſuite on les ajoutera enſemble, ce qui donnera : $dx + v\,dy + dt\,((C + Kv)x + (D + Lv')y) = o$. Enſuite on fera en ſorte que $(C + Kv)x + (D + Lv)y$ ſoit un multiple quelconque de $x + vy$, ce qui donnera $\frac{C + Kv}{1} = \frac{D + Lv}{v}$; équation d'où l'on tirera $v = -\frac{C + L}{2K} \pm \frac{\sqrt{((L-C)^2 + 4DK)}}{2K}$. On ſuppoſera enſuite $x + vy = u$, & l'on aura $du + (C + Kv)\,u\,dt = o$; dont l'integrale eſt $u = g\,e^{-(C+Kv)t}$, g étant une conſtante & e le nombre dont le logarithme eſt 1.

Cela poſé ſoient p, p' les deux valeurs de, v, trouvées par l'équation précedente, & ſoit $x + py = u$, $x + p'y = u'$, on aura $u' = g'\,e^{-(C+Kp')t}$; $u = g\,e^{-(C+Kp)t}$; $y = \frac{u - u'}{p - p'}$:

$x = \frac{p'u - pu'}{p' - p}$; & on déterminera les conſtantes g & g' par les

valeurs que x & y doivent avoir, lorsque t eſt $= o$, ou eſt égal à quelque grandeur connuë.

Scolie I.

XLIII. Cette ſolution ne peut ſouffrir de difficulté que dans le cas où l'équation $Kvv + Cv - Lv - D = o$ ne donne point deux valeurs de v, ce qui arrivera ſi $K = o$ ou $D = o$, & dans le cas où les deux valeurs de v ſont égales.

Or I°. ſi $D = o$, une des valeurs de v eſt $= o$, & l'autre eſt $= \frac{L - C}{K}$, c'eſt pourquoy il n'y aura qu'à ſuppoſer dans les formules précedentes $p' = o$ & l'on aura les valeurs de y & de x.

II°. Si $K = o$, au lieu de le ſuppoſer abſolument nul, on le ſuppoſera infiniment petit, ce qui revient au même, & alors une des valeurs de v ſera $\frac{D}{C - L}$ & l'autre ſera $\frac{L - C}{K}$; on aura donc $u = ge^{-(C + \frac{K D}{C - L})t} = ge^{-Ct}$; $u' = g'e^{-(Lt)}$ $y = \frac{K(u - u')}{C - L}$; $x = u - \frac{p u'}{p'} = u + \frac{D K u'}{(C - L)^2}$.

III°. Enfin ſi les valeurs de p & de p' ſont égales, au lieu de les ſuppoſer telles, on ſuppoſera $p = a + \alpha$, $p' = a - \alpha$, α étant une quantité infiniment petite, & on aura $u = g\,e^{-(C + Ka)}$; $-Kg\,\alpha\,te^{-(C+Ka)t}$; $u' = ge^{-(C+Ka)t} + Kg'\alpha\,te^{-(C+Ka)t}$ $y = \frac{u' - u}{2\alpha}$; $x = \frac{a\,u - a\,u' - \alpha\,u - \alpha\,u'}{2\,\alpha}$; de ſorte que ſi $g = g'$, on a $y = -Kg\,te^{-(C + Ka)t}$; & $x = -Kg\,te^{-(C + Ka)t}$.

Sco-

Scolie II.

XLIV. Les methodes que je viens de donner dans le Scolie précedent pour trouver les valeurs de x & y, lorsque v n'a pas deux valeurs inégales, ſont principalement remarquables par l'uſage que nous en ferons dans des cas plus compoſés. Car on pourroit s'en paſſer icy, puiſque K ou D étant $= o$, une des deux équations eſt integrable, & que l'integration de l'autre ſe reduit à l'integration de la formule $dz + bz\,dt + T\,dt = o$, b étant une conſtante, & T une fonction de t; & ſi les deux valeurs de v ſont égales, on prendra arbitrairement une de ces valeurs; & àpres avoir réſolu l'équation $du = -dt\,(C + Kv)u$, on tirera de l'équation $x + vy = u$, une valeur de x ou de y en u, c'eſt à dire en t, & cette valeur étant miſe dans une des deux équations données, on verra que ſon integration ſe réduit à celle de la formule $dz + bz\,dt + T\,dt = o$. On aura donc les valeurs de x & de y en t.

Scolie III.

XLV. Si les valeurs de v étoient imaginaires, le probleme ſe réſoudroit toujours de la même maniére. Car les exponentielles imaginaires ſe réduiroient toujours à $A + B\sqrt{-1}$, A & B étant réelles, & ſi les valeurs de y & de x devoient être réelles, les imaginaires en diſparoitroient. Voyez le Traité des Vents art. 79.

Scolie IV.

XLV. Si les équations propoſées étoient

$$T'\,dx + T''\,dt\,(Cx + Dy) + \theta\,dt = o$$
$$T'\,dy + T''\,dt\,(Kx + Ly) + t\,dt = o$$

le probleme n'auroit gueres plus de difficulté; car T', T'', θ, t, étant des fonctions quelconques de t, on auroit, en ſuivant la même methode que dans l'art. 42, $T'\,du + T''u\,dt\,(C + Kv) + (\theta + tv)\,dt = o$. Or cette équation s'integrera par des methodes connuës des Geometres.

SCOLIE V.

XLVII. Il n'eſt pas plus difficile de trouver l'integrale des équations

$$T' A\,dx + T' B\,dy + T''\,dt(Cx + Dy) + \theta\,dt = o$$
$$T' F\,dx + T' G\,dy + T''\,dt(Kx + Ly) + t\,dt = o$$

Car on peut trés aiſément réduire ces équations à deux autres dont la Ire. ait $T'\,dx$ pour Ier. terme ſans renfermer dy, & dont la II^de. ait $T'\,dy$ pour Ier. terme, ſans renfermer dx. Il eſt vray que cette réduction ne pourra ſe faire, lorsque $B F - A G$ ſera $= o$, mais on remarquera que le probleme devient alors beaucoup plus ſimple. Car il ſe réduit alors à une équation finie

$$T''\,dt(CF x + DF y) + F\theta\,dt = T''\,dt(KA x + LA y) + t A\,dt$$

& à une des deux équations differentielles, qui s'integre par la formule $dz + bz\,dt + T\,dt = o$.

PROBLEME IV.

XLVIII. *On propoſe d'integrer les équations*

$$dx + (ax + by + cz)\,dt = o.$$
$$dy + (ex + fy + gz)\,dt = o.$$
$$dz + (hx + my + nz)\,dt = o.$$

On multipliera la ſeconde de ces équations par une indéterminée ν, la IIIe. par une indéterminée μ, & enſuite on les ajoutera enſemble; puis on ſuppoſera $a + e\nu + b\mu = \frac{b + f\nu + m\mu}{\nu} = \frac{c + g\nu + m\mu}{\mu}$; afin qu'en faiſant $x + \nu y + \mu z = u$, on ait $du + (a + e\nu + b\mu)\,u\,dt = o$. Cela poſé, on aura la valeur de μ en ν, & une équation du IIIe. degré, qui donnera trois valeurs de ν, que j'appelle p, p', p''. Or ſoient m, m', m'', les trois valeurs correſpondantes de μ, on aura $x + py + mz = g\,E^{-t(a + ep + bm)}$, E étant le nombre dont le logarithme eſt l'unité; $x + p'y + m'z = g'\,E^{-t(a + ep' + bm')}$;

$x + p''$

$x + p'' y + m'' z = g'' \mathrm{E}^{-t(a+ep''+bm'')}$; de ces trois équations on tirera les valeurs de x, y, z, & on déterminera les conſtantes g, g', g'' par les valeurs que doivent avoir x, y, z, lorsque $t = o$, ou eſt égal à une conſtante donnée.

Scolie I.

XLIX. Si l'équation en ν n'a pas trois racines inégales, on pourra toujours, pourvu que cette équation ait au moins une racine, réduire le probleme préſent au cas de l'art. 47. car ſoit p la valeur de ν & m la valeur de μ, on ſera $x + my + pz = g\,\mathrm{E}^{-(a+ep+bm)t}$, & l'on réduira les trois équations données à deux, en faiſant évanouïr par le moyen de cette dérniére équation une des indéterminées, par exemple z

Mais il peut ſe faire que l'équation en ν n'ait aucune racine, ce qui arrivera ſi les coëfficiens qui affectent les differentes puiſſances de ν ſont égales à zero ; en ce cas ſi le terme tout connu de l'équation s'en va auſſy, c'eſt une marque que l'on peut donner à ν telles valeurs qu'on voudra, & le probleme devient alors plus ſimple, ſi le terme tout connu de l'équation ne s'en va pas, on augmentera, ou on diminuera à volonté un des coëfficiens $a, b, c, e,$ &c. d'une quantité infiniment petite pour retablir un des termes de l'équation, & on aura pour lors par la régle du Parallelogramme de Mons. *Newton* une valeur infinie de ν, qui ſervira à réſoudre le probleme.

Scolie II.

L. Au reſte ſans reduire le probleme préſent au cas de l'art. 49. on peut toujours ſuppoſer que toutes les valeurs de ν ſoient inégales. Il n'y a qu'à augmenter tous les coëfficiens a, b, c &c. d'une quantité infiniment petite α, ou ſeulement l'un de ces coëfficiens, alors on aura des valeurs de ν, toutes inégales entr'elles, & dans leſquelles entrera la quantité α, & ces valeurs étant ſubſtituées à la place de p, p', p'' &c. on aura aprés la fin du calcul des valeurs de x, y, z. dans leſ-

queiles

quelles la quantité α ne ſe trouvera plus. Pour avoir ces valeurs de v, on ſe ſervira de la régle du Parallelogramme de Mons. *Newton*, ou de la régle pour trouver les tangentes aux points multiples des courbes. Car on peut regarder l'équation en v comme l'équation d'une courbe dont v eſt l'ordonnée, & dont une des conſtantes, par exemple a, conſiderée comme variable eſt l'abſciſſe ; or dans le cas préſent cette courbe ſera du III. degré ; & lorsque la valeur de a ſera telle que pour une même abſciſſe on n'ait pas trois valeurs inégales de v, alors imaginant que l'abſciſſe a ſoit augmentée d'une quantité infiniment petite α, on doit trouver par les régles dont nous venons de parler trois valeurs differentes de v, répondantes à l'abſciſſe $a + \alpha$ ou $a - \alpha$; & il n'importe que deux ou pluſieurs de ces valeurs ſoient imaginaires, pourvu qu'elles ſoient differentes entr'elles.

Scolie III.

LI. Il eſt facile d'integrer par ce probleme trois équations qui contiendront les indéterminées x, y, z, multipliées par des conſtantes, & par une fonction quelconque de t, avec leurs differences auſſy multipliées par des conſtantes & par une fonction de t, & de plus un terme quelconque $t\,dt$, $\theta\,dt$, $\theta'\,dt$, qui ne renferme que des conſtantes avec t. Voyez les art. 46 & 47.

Scolie IV.

LII. Si avec les trois équations de l'art. 48, on en propoſoit une IVe. il faudroit multiplier cette quatriéme par une nouvelle indéterminée π, & aprés avoir trouvé l'équation en v & l'équation qui donne la valeur de μ en v en mettant dans cette derniére π aulieu de μ, & au lieu de b, m, n, les coëfficiens qui leur répondroient dans la IV. équation, & réciproquement b, m, n, au lieu de ces coëfficiens ; aprés quoy on reſoudroit le probleme par une methode entierement ſemblable à celle de l'art. 48.

Scolie V.

LII. De là & des articles précedens il eſt facile de conclure que ſi on a un nombre n d'équations differentielles qui renferment n indeter-

derminées, x, y, z, u, &c. multipliées par des conſtantes & par une même fonction de t, avec leurs differentielles $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{du}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, &c. auſſy multipliées par des conſtantes & par une fonction de t, qui ſoit la même pour toutes, & de plus une fonction quelconque $\mathfrak{t}$, θ, θ' &c. de la variable t, on pourra toujours integrer ces équations par la methode que nous venons d'expoſer.

Scolie VI.

LIII. Par la même raiſon, ſi on a un nombre p d'équations differentielles qui contiennent p variables x, y, z, u, &c. multipliées par des conſtantes & par une fonction quelconque T de t, avec leurs differences $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ &c. auſſy multipliées par des conſtantes & par T, & les differences ſecondes $\frac{ddx}{dt^2}$, $\frac{ddy}{dt^2}$, $\frac{ddz}{dt^2}$ &c. auſſy multipliées par des conſtantes, & par T, & les differences troiſiémes $\frac{d^3x}{dt^3}$, $\frac{d^3y}{dt^3}$ &c. auſſy multipliées par T & par des conſtantes, & ainſy de ſuite, jusqu'aux differences $\frac{d^qx}{dt^q}$ &c. de tel degré q, qu'on voudra; & que de plus chacune de ces équations contienne, ſi l'on veut, une fonction quelconque $\mathfrak{t}$, θ, θ' &c. de la variable t, on pourra toujours les integrer par le ſcolie précedent. Car en faiſant $d^{q-1}x = x' dt^{q-1}$; $d^{q-2}x = x'' dt^{q-2}$ &c. $d^{q-1}y = y' dt^{q-1}$; $d^{q-2}y = y'' dt^{q-2}$ &c. on changera les équations données en d'autres

équations qui ſeront au nombre de $p + p(q-1) = pq$, & qui ne contiendront que les indéterminées x, y, z, u &c. x', x'' &c. y', y'' &c. avec leurs 1ers. differences ſeulement dx, dy, dz, &c. dx', dx'', &c. dy', dy'' &c. & ces équations s'integreront par l'art. 52.

Scolie VII.

LIV. On peut quelquefois abreger cette methode : par exemple, ſi les équations données étoient

$$ddx + (Cx + Dy)dt^2 = o$$
$$ddy + (Kx + Ly)dt^2 = o$$

on les réduiroit, en ſuivant la methode de l'art. 42, à l'équation $ddu + (C + Kv)u\,dt = o$, qui eſt facile à integrer. De même ſi on avoit les équations $d^4x + Mx\,dt^4 = o$, $ddu + (Fx + Gu)dt^2 = o$, on les changeroit, en ſuppoſant $ddx = p\,dt^2$, dans les trois équations $ddx = p\,dt^2$, $ddp = -Mx\,dt^2$, & $ddu + (Fx + Gu)dt^2 = o$ qui par la methode de l'art. 48 ſe réduiroient à une équation de cette forme $ddx + Kx\,dt^2 = o$.

Scolie VIII.

LV. On pourroit auſſy integrer les équations dont nous avons parlé depuis l'art. 42, par une autre methode qui revient au même dans le fond, que celle que nous avons deja expoſée. Pour en donner une idée, ſoit ſuppoſée dans l'art. 42. $x = mu + nz$, $y = pu + qz$, m & n étant deux indeterminées ainſy que p & q, on aura $m\,du + n\,dz + dt((Cm + Dp)u + (Cn + Dq).z) = o$. & $p\,du + q\,dz + dt((Km + Lp)u + (Kn + Lq)z) = o$. Or faiſant $m = 1$ & $p = 1$ & ſuppoſant deplus $\frac{Cn + Dq}{n} = \frac{C + D}{1}$; & $\frac{Kn + Lq}{q} = \frac{K + L}{1}$ on déterminera n & q à être telles que les deux transformées ſe réduiſent chacune à une differentielle de cette forme $ds + Nsdt = o$: mais la methode que j'ay donnée dans les articles précedens paroit encore plus ſimple, & j'ai cru devoir l'expliquer le plus ſuccinctement qu'il m'a été poſſible, à cauſe de l'utilité dont elle peut être non ſeulement

lement dans l'Analyſe, mais encore dans pluſieurs problemes Phyſico-mathematiques. J'en avois même deja donné quelque idée dans l'art. 101. de mon Traité de Dynamique, que dans l'art. 79 de mon Traité des vents: j'eſpere donc que les Geometres pourront tirer quelque utilité de mon traivail, & que les differentes branches de cette methode ſeront même applicables à d'autres Problemes. Je me contenterai d'en donner un exemple ; on ſçait que l'integrale de $\frac{d\,x}{(x+a).(x+b)}$ eſt $\frac{1}{b-a}$ Log. $\frac{x+a}{x+b}$; & lorsque $x+a=x+b$, c'eſt à dire lorsque $b=a$, cette integrale devient $\frac{0}{0}$. Pour la determiner je ſuppoſe $b=a+\omega$; & j'ay $\frac{1}{\omega}$ Log. $(1-\frac{\omega\,(x+a)}{(x+a)^2})$ $=-\frac{1}{x+a}$, comme elle eſt en effet. C'eſt encore par une methode à peu prés ſemblable que j'ay déterminé cy-deſſus l'integrale de $\frac{d\,x\,\sqrt{x}}{\sqrt{(k+l\,x+m\,x^2+n\,x^3)}}$ dans le cas où $4\,l\,n=m\,m$.

ce 13 Avril 1747.

OBSERVATION DE L'ECLIPSE PARTIALE

DE LA LUNE 1748 LE 8me Août

PAR M. KIES.

Suite des Obſervations : Le commencement étoit	Tems vrai à 11h 6′ 56″
L'ombre touche *mare humorum*	11 59
Tycho	19 59
Grimald	24 5
Ricciol.	27 26
Alpetragius	41 0
Sinus maris nubium	44 36
Fracaſtorius	55 29
mare Nectaris	58 34
emerſion de *Grimald*	12 6 56
Alpetrag.	33 48
Bulliald	37 38
Fracaſtor.	56 8
Tycho.	57 34
La fin arrivoit.	13 19 42

La pendule étoit corrigée par pluſieurs hauteurs correſpondantes que je pris le 9 Août.

Fig: 1.

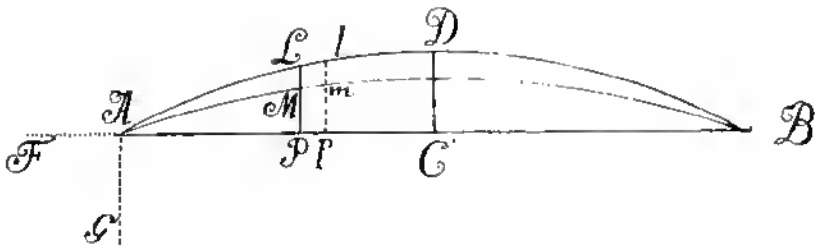


Fig. 2.

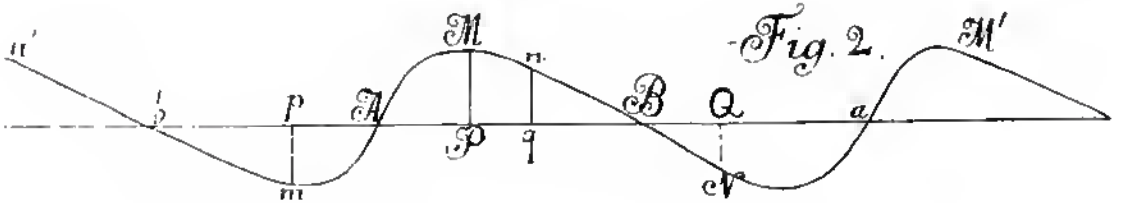
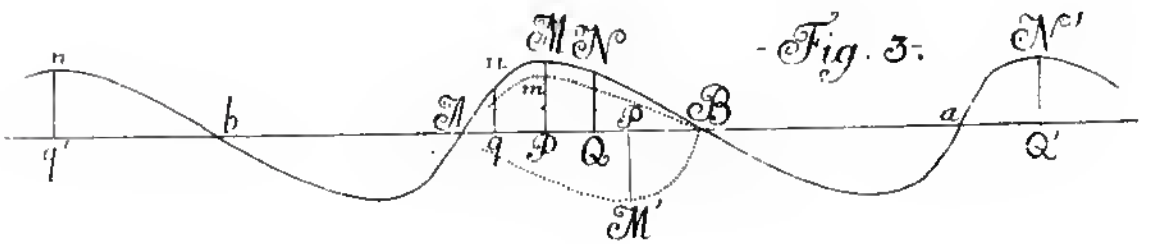
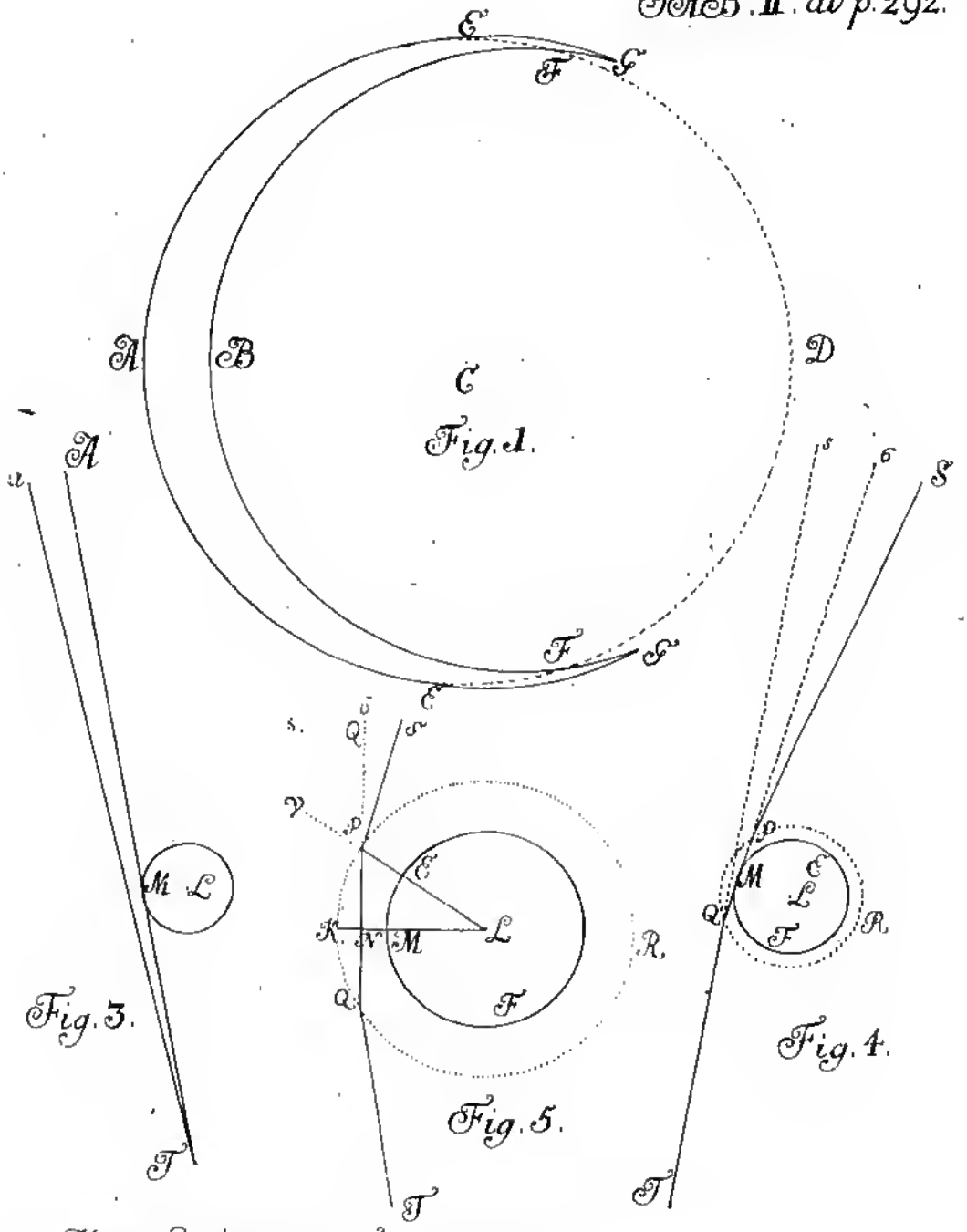


Fig. 3.



Mem: de l'Acad: T. IV. ad p. 71.


E
F
G
A
B
C
D
Fig. 1.
F
G
E
A
M L
T
Fig. 3.
s
Q
S
P
p
E
K
V
M
L
R
Q
F
T
Fig. 5.
s
c
S
p
M
E
L
F
Q
R
T
Fig. 4.

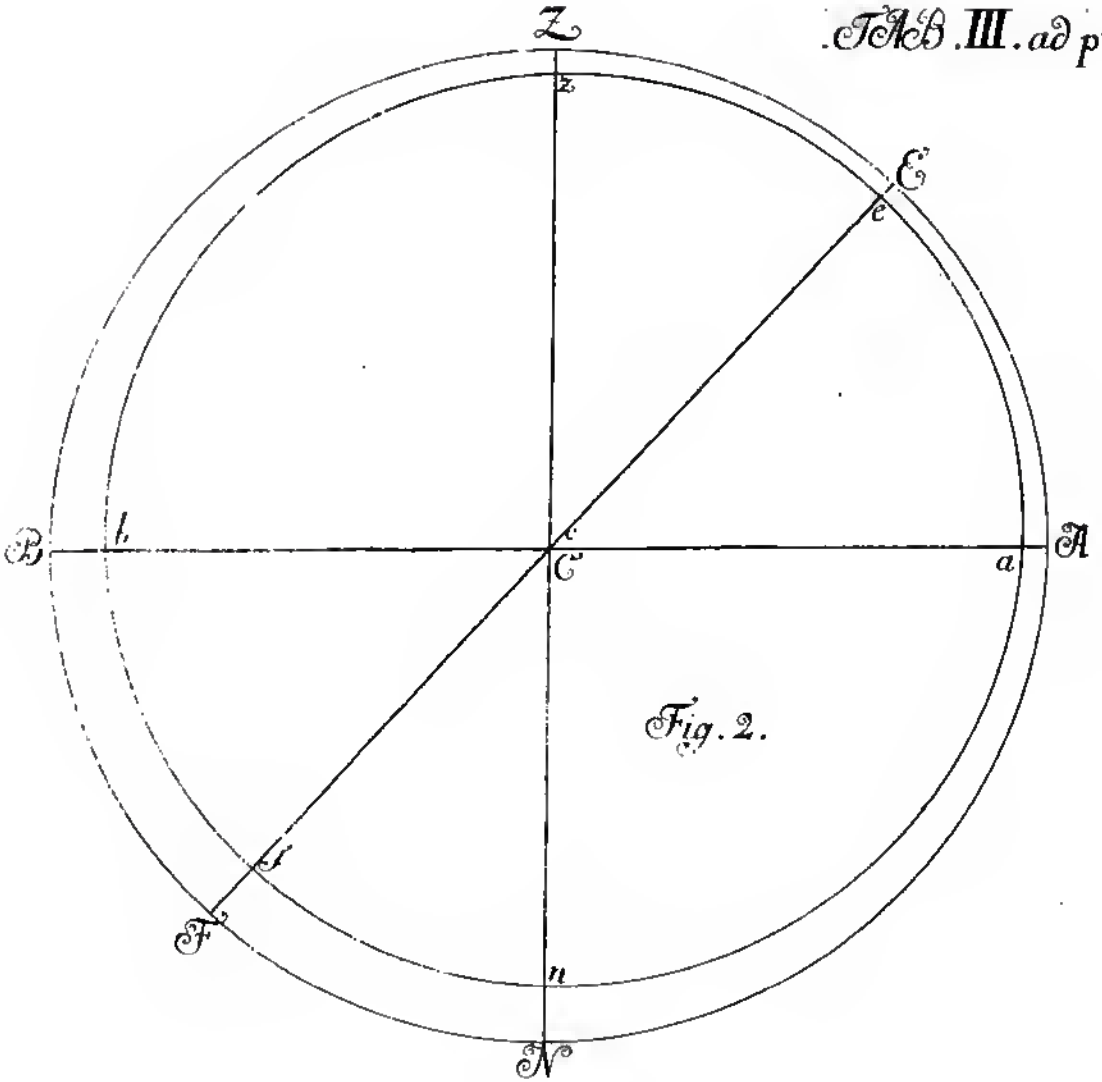


Fig. 2.

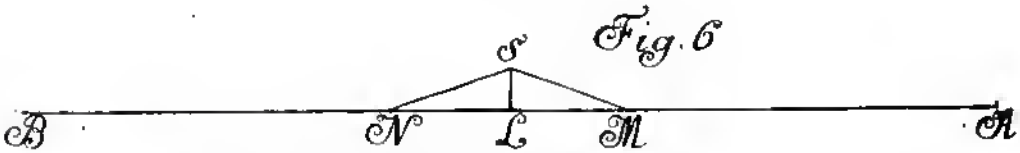
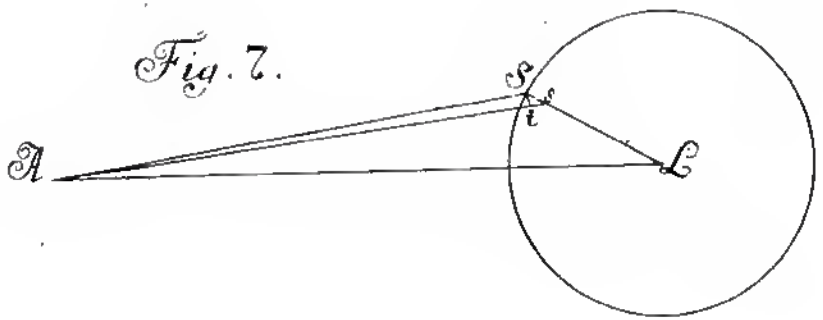


Fig. 6

Mem. de l'Acad. T. IV. ad p. 105.

TAB. IV. ad p. 292.

Fig. 7.



TAB. V. ad p.

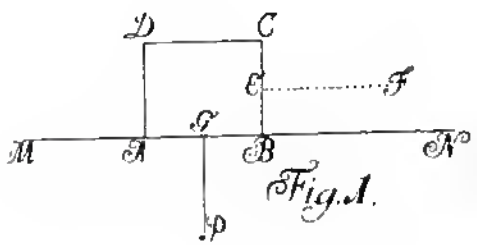


Fig. 1.

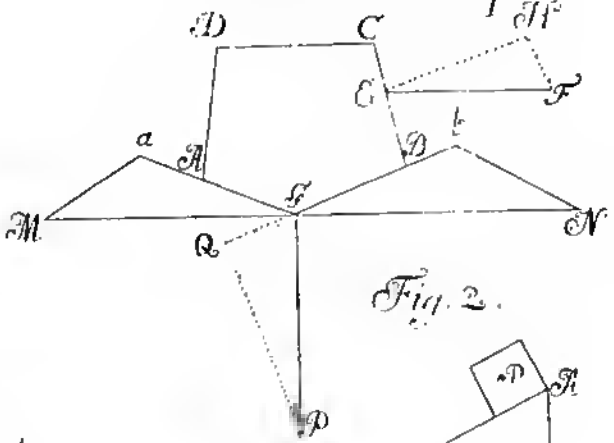


Fig. 2.

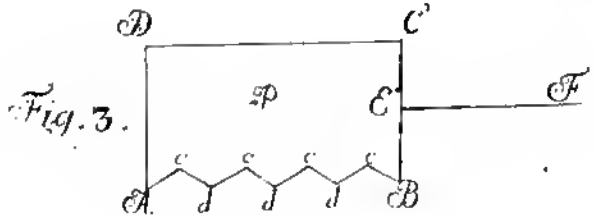


Fig. 3.

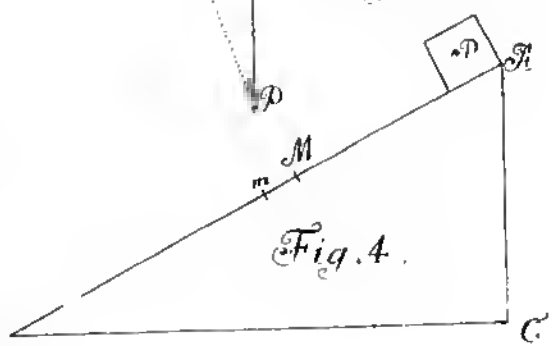


Fig. 4.

Mem. de l'Acad. T. IV. ad p. 124. B

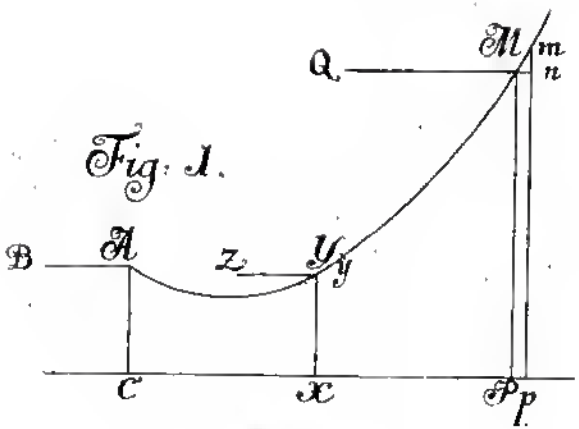


Fig. 1.

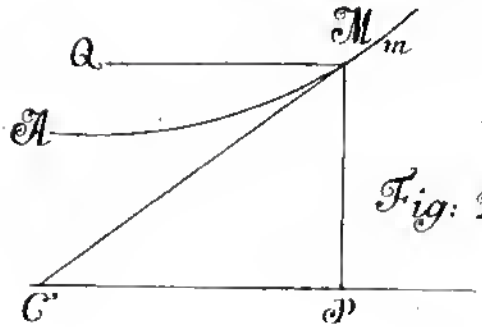


Fig. 2.

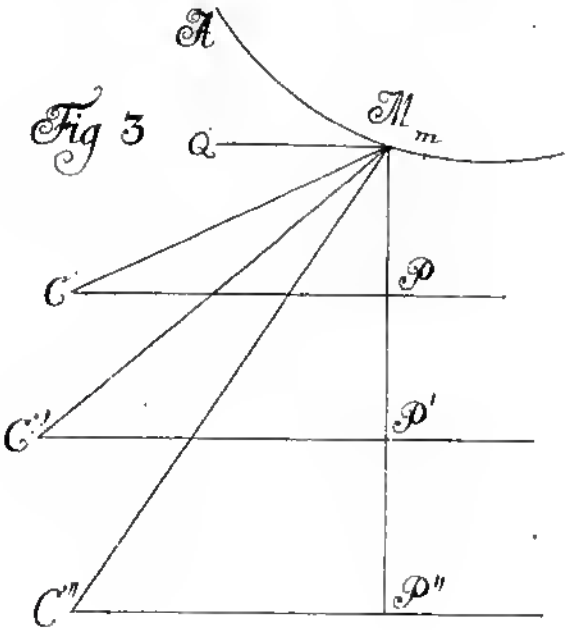


Fig 3

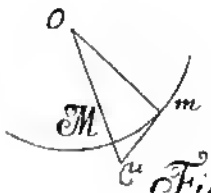


Fig. 4.

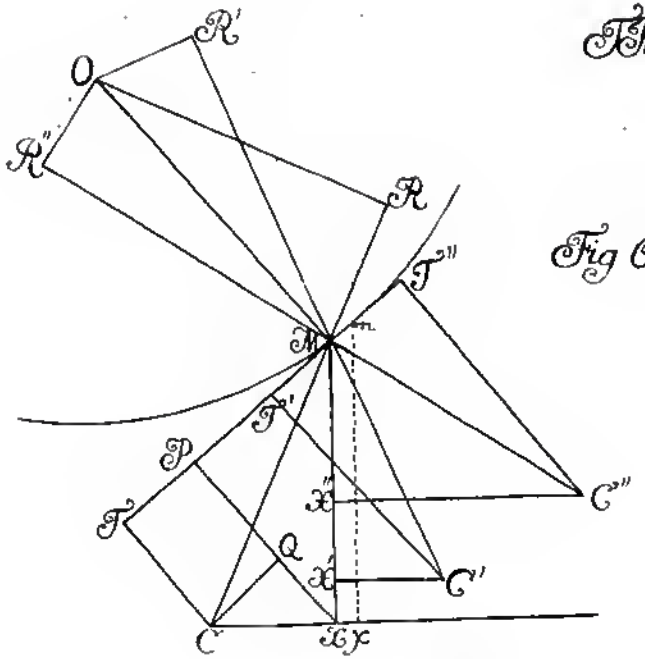


Fig 6

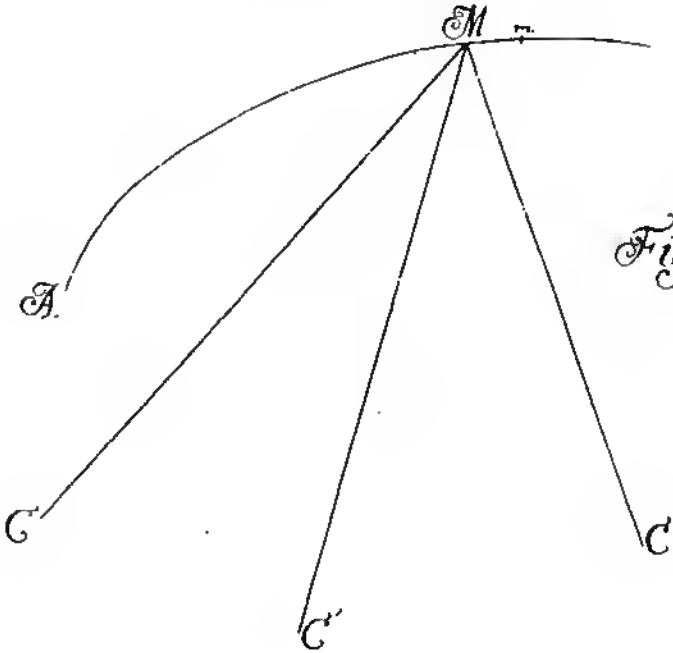


Fig. 7.

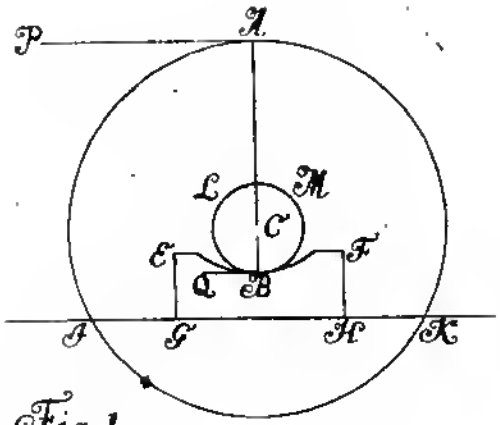


Fig. 1.

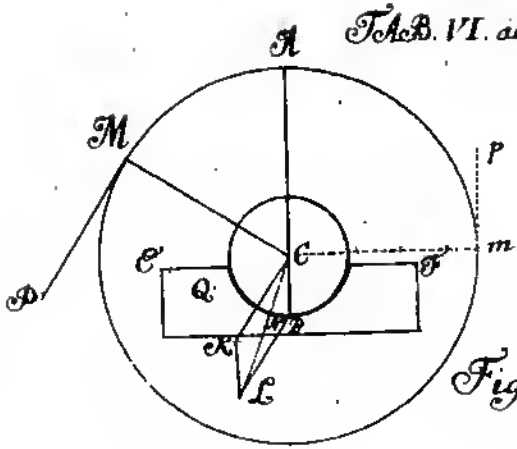


Fig. 2.

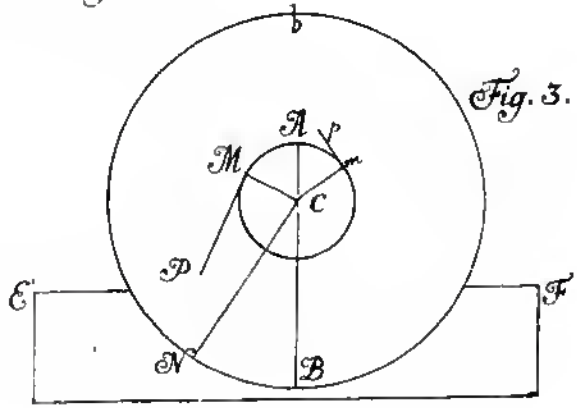


Fig. 3.

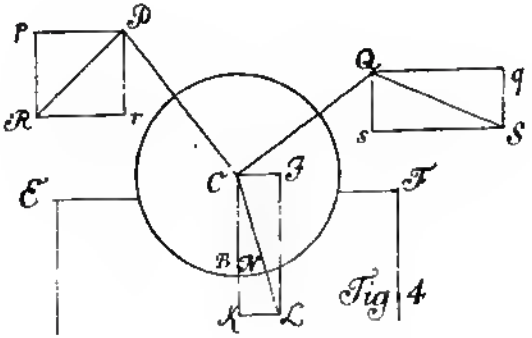


Fig. 4

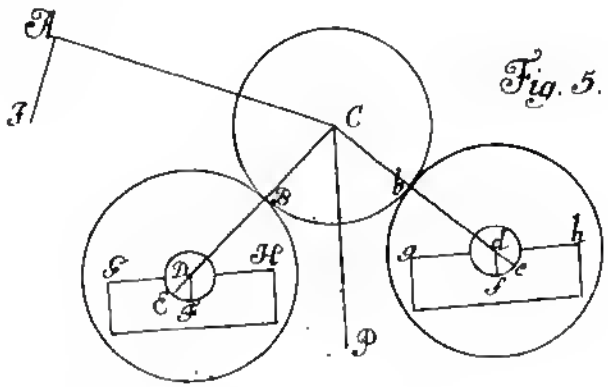


Fig. 5.

Mem: de l'Acad: T: IV ad p. 134.

TAB. VIII. ad p. 292.

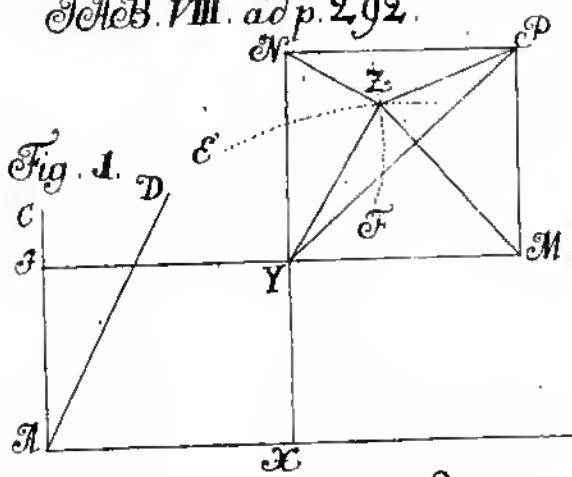


Fig. 1.

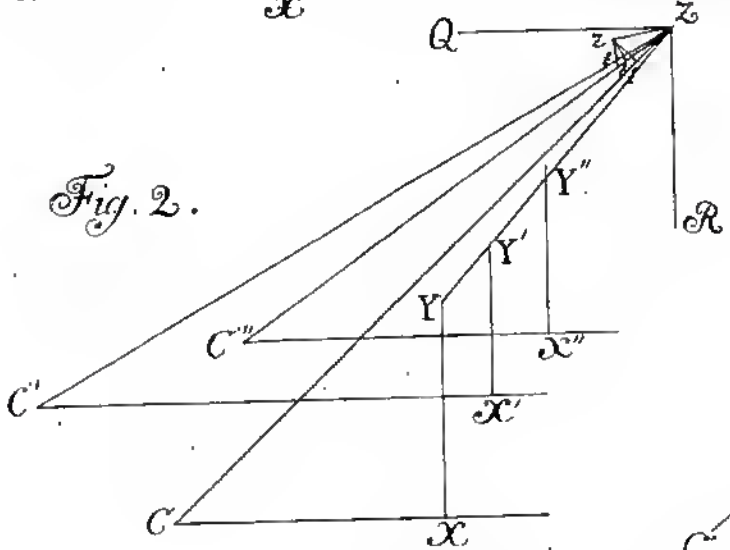
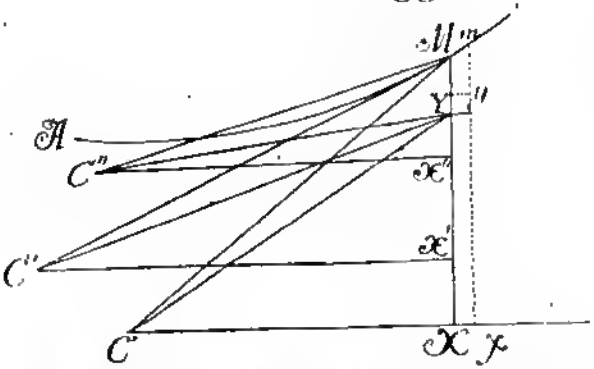


Fig. 2.



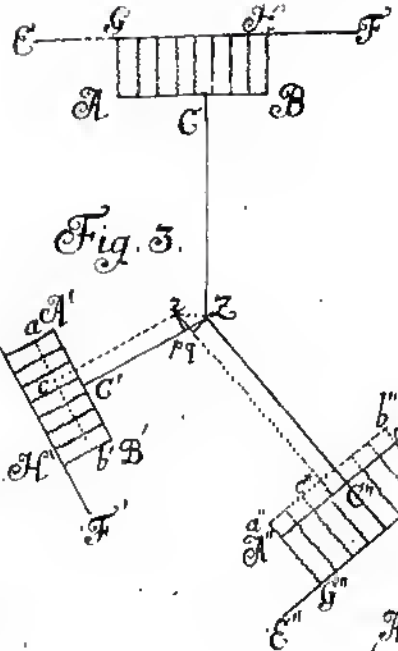


Fig. 3.

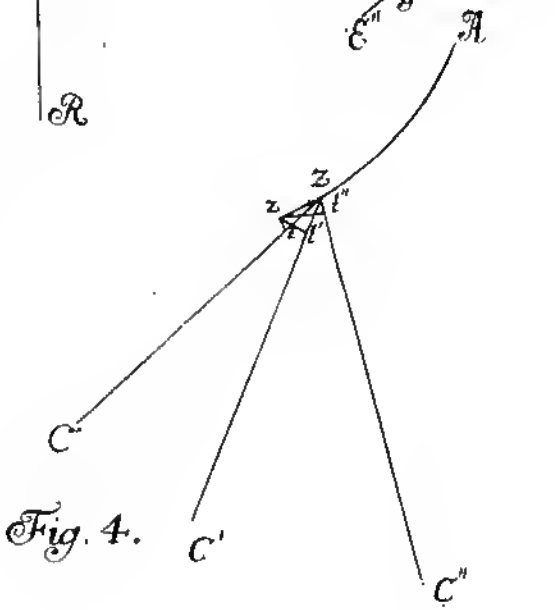


Fig. 4.

Mem: d l'Acad: T. IV ad p. 191.

MEMOIRES
DE
L'ACADEMIE ROYALE
DES
SCIENCES
ET
BELLES LETTRES.

CLASSE DE PHILOSOPHIE SPECULATIVE.

* *
*

DISSERTATION
SUR LE PHILOSOPHE CLITOMACHUS,
SUCCESSEUR DE CARNEADE DANS L'ACADEMIE,
PAR M. HEINIUS.

Traduit du Latin.

I.

CLITOMACHUS, un des plus célébres Maitres de l'Ecole Academique, a rendu de ſi grands ſervices à la Philoſophie, qu'il nous a paru digne de la peine que nous allons prendre pour le tirer en quelque ſorte de la pouſſiere, & le faire connoitre au Monde ſavant, en rapportant à cette illuſtre Aſſemblée tout ce qui le concerne. Il réſulte une grande utilité des travaux que l'on conſacre à l'examen de la vie & des actions des anciens Philoſophes. Cela fournit l'occaſion de démaſquer diverſes erreurs, de peſer les différentes opinions de diſſiper les doutes, & de tirer la lumiere de la verité du conſentement des plus ſavans hommes, dont le témoignage ſe réünit en ſa faveur. On auroit tort de s'imaginer que cette occupation eſt une peine ſuperflue, depuis que tant d'habiles Critiques s'y ſont livrés, & en particulier, depuis la publication de l'excellente Hiſtoire de la Philoſophie, dont nous ſommes redevables à Mr. *Brucker*. Malgré l'abondante moiſſon que ce docte Ecrivain a faite, il reſte toujours à glaner. En con-

conſtruiſant un ſi vaſte édifice, il n'a pû prendre garde à tout; & enfin, les mépriſes mêmes ſont inévitables dans un auſſi vaſte travail. Les bornes que nous nous ſommes preſcrites dans cette Diſſertation, ſont telles qu'en nous y renfermant, nous n'omettrons rien de tout ce qu'il y a d'intereſſant à ſavoir au ſujet de Clitomachus.

II. Commençons par rechercher dans quel tems il a vêcu. Il n'y a point d'Auteur qui ſoit exact là deſſus que *Jonſius**. Perſonne ne conteſte que Clitomachus ait ſuccedé à Carneade dans l'Ecole Academique. Et pour la mort de Carneade, voici ce qu'en dit *Diogene Laërce*; „*Apollodore* rapporte dans ſes Chroniques, que Car„neade mourut la quatrieme année de la CLXII Olympiade, à l'age „de LXXXV ans.„ La *Deſcription des Olympiades*, qui ſe trouve dans l'Ouvrage Chronologique de Scaliger, remarque ſur cette année: *qu'il arriva une Eclipſe de Lune, & que le Philoſophe Carneade mourut le même jour.* (*) *Suidas* & *Heſychius* rapportent la même Eclipſe d'aprés Diogene Laërce. Voilà donc trois témoins, Apollodore, l'Auteur Anonyme de la Deſcription des Olympiades, & Diogene Laërce, qui dépoſent l'année de la mort de Carneade, & par conſequent celle ou Clitomachus lui ſucceda. Il eſt vrai que *Petau*, & quelques autres Savans, ont formé ſur cette année une controverſe, dans laquelle nous n'entrons point ici, parce qu'elle eſt tout à fait étrangére à notre but. Ceux qui veulent en ſavoir davantage là deſſus, peuvent recourir aux Ouvrages de *Jonſius*, & de Monſieur *Brucker*. † La quatrieme année de la CLXII Olympiade répond à l'an 625. de Rome, & 127. avant N. S.

* *De Script. Hiſt. Phil.* p. 219. & 599.

† *Hiſt. Phil.* T. I. p. 760.

III. Ainſi Clitomachus fleuriſſoit vers la fin du VI. Siecle, depuis la fondation de Rome, & au commencement du VII. Cet eſpace de tems eſt le plus beau & le plus heureux, dont ait joui la République: & le ſeul mot de Scipion Emilien le prouve aſſez evidemment. Comme il étoit Cenſeur un peu avant l'année 625. & que faiſant un ſacrifice ſolemnel, le Greffier marchant ſuivant la coutume

(*) Ἔκλειψις σελήνης, καὶ ἐν τῇ αὐτῇ ἡμέρᾳ Καρνέαδες ὁ Φιλόσοφος τὸν βίον μετήλλαξε.

me devant lui avec les Régiſtres publics, faiſoit le voeu, par lequel on prioit les Dieux, *d'augmenter la proſperité du Peuple Romain; Notre proſperité*, dit-il, *eſt aſſez grande; je prie ſeulement les Dieux qu'ils nous y maintiennent.* Et il ordonna ſur le champ que les Régiſtres publics fuſſent corrigés ſuivant cette formule. C'eſt dans ce tems-là que Rome a été le plus féconde en grands hommes; on y vit tant de beaux génies, d'Orateurs, de Philoſophes, de Juriſconſultes, de Poëtes, d'Hiſtoriens, qu'il y a lieu de s'etonner avec *Velleius Paterculus* (*) qu'un même Siecle ait raſſemblé tant de génies propres, & aux Sciences ſpeculatives, & aux Arts utiles.

IV. Carthage etoit la Patrie de Clitomachus; nous en avons pour garans *Diogene Laërce*, *Denys Periegetes*, *Plutarque* & *Etienne de Byzance*. C'eſt ce qui a engagé *Maxime de Tyr* à l'appeller Libyen, Λίβυς, dans ſa XXIX. Diſſertation, où il en parle avec éloge, & le met à coté d'*Ariſtote* & de *Chryſippe*. Etant donc Phénicien d'origine & de Nation, il reçut auſſi le nom Phénicien d'*Asdrubal*, ou ſi vous prononcez comme les Grecs, *Asdrubas*. C'eſt ce que nous liſons dans *Plutarque*; „Nous admirons, dit-il, la force perſuaſive de Car„neade, qui fit embraſſer les moeurs & les coutumes des Grecs (**) à „Clitomachus, Carthaginois de naiſſance, & qui avoit porté auparavant le nom d'*Asdrubal*." Lorsqu'il arrivoit aux Anciens de changer de Nation & de moeurs, ils avoient auſſi coutume de changer de nom. Les Ecrivains Sacrés nous en fourniſſent des exemples, que *Grotius*, *Huet*, *Le Clerc*, & d'autres Savans ont raſſemblés. Nous ne nous engagerons pas plus avant dans cette diſcuſſion. Soit donc par attachement pour Carneade, ſoit pour ſe rendre plus agréable aux Grecs, il quitta ſon nom barbare d'Asdrubal, pour prendre celui de Clitomachus. Là deſſus on demande, comment le nom Grec répond au nom Phenicien? Nous ne copierons point ici tout ce que *Bochart*, ce

(*) . . . . *Seculi ingeniorum ſimilitudines congregantis, & in ſtudium par, & in emolumentum.* Lib. I.

(**) Ἑλληνίζειν ἐκοίησε. Orat. I. *de fortuna Alexandri.* Cap. VI.

ce grand appui de la Litterature Phenicienne, a dit dans ſon Canaan pour répandre du jour ſur cette queſtion. Il ſuffira d'indiquer en peu de mots notre propre ſentiment. *Clitomachus*, en Grec Κλειτόμαχος, veut dire *illuſtre à la guerre.* Or *Asdrubal*, chez les Hebreux, ou ſi vous l'aimez mieux, chez les Pheniciens, אזרבעל, eſt un *Soldat armé, & prêt pour le combat.* Car *Baal* ſignifie également un Seigneur legitime, & un poſſeſſeur quelconque, qui eſt pourvû d'une certaine choſe, & qui en fait un uſage, ſoit bon, ſoit mauvais. Ainſi le mot Grec *Clitomachus* rend exactement le ſens du mot Phenicien *Asdrubal.* *Bochart* fait auſſi une Obſervation remarquable * ſur le Pére de Clitomachus, qu' *Etienne de Byzance* nomme *Diognete*, ce que l'on peut fort bien exprimer en Phenicien par *Maburbal*, c'eſt à dire, *fils de Jupiter.*

* *Geogr. S.* P. 744.

V. Rapportons à préſent ce qu' *Etienne* dit de Clitomachus, au mot, Καρχηδών: „ Clitomachus etoit auſſi de Carthage; c'etoit „un Sage diſtingué, fils de Diognete, & qui avoit porté auparavant „ le nom d'Asdrubas. Etant enſuite devenu Philoſophe de la Secte „Academique, il ſucceda dans l'Ecole à Carneade de Cyrene. Etant „déjà âgé de XXVIII. ans, il alla à Athenes, ſans avoir aucune teintu„re des Lettres; & pour s'inſtruire, il devint Auditeur de Carneade.„ (*) *Euſtathius* dit la même choſe dans ſon Commentaire ſur Denys Periegete. Si nous en croyons donc *Etienne*, & aprés lui *Jonſius*, Clitomachus vint à Athenes dans l'ignorance des premiers Elémens ἀμοιρος τῶν πρώτων ϛοιχείων. Ce témoignage heurte de front celui de *Diogene Laërce*, qui dit; „que Clitomachus avoit déjà étudié la „Philoſophie dans ſa Patrie, & dans ſa langue maternelle.„ (**) *Stanley* s'eſt conformé là deſſus à *Diogene Laërce.* Dans cette oppoſition de ré-

(*) Καρχηδόνιος ἦν; σόφος μέγας, Κλειτόμαχος ὁ Διογνήτου, ὃς (καὶ) ἐκαλεῖτο Ἀσδρύβας, Φιλόσοφος Ακαδημικὸς, διάδοχος Καρνεάδου τῆ Κυρηναίᾳ σχολῆς, ὃς ηκ ἔτει ἐλθὼν Ἀθηνάζε, ἄμοιρος ἦν τῶν πρώτων ϛοιχείων· καὶ ταῦτα μανθάνων, ἠρράσατο Καρνεάδου.

(**) Τῇ ἰδίᾳ Φωνῇ κατὰ τὴν πατρίδα ἐΦιλοσόφει.

de récits, il faut voir, s'il n'y a point quelque moyen de conciliation. Mr. *Brucker* en a eſſayé un. „ Etudier la Philoſophie, dit-il, Φιλοσο„Φεῖν, ſignifioit chez les Barbares s'attacher à tous les genres de litte„rature, qui peuvent préparer l'esprit à la Philoſophie; & c'eſt dans „ce ſens que Diogene Laërce peut avoir dit de Clitomachus, qu'a„vant que de venir à Athenes, il s'etoit imbu dans ſa Patrie des „principes de la Philoſophie. Aſſurément on a tout ſujet de croire „qu'il n'etoit pas entiérement ſans lettres, ſi l'on fait attention que „dans ces tems-là l'etudition Greque fleuriſſoit génétalement en Aſie.„ Cela ne leve pourtant pas la difficulté, fondée ſur ce qu' *Etienne* dit poſitivement, qu' *Asdrubal* n'avoit aucune teinture des Lettres. Examinons donc la choſe de plus prés. Un homme dénué de toutes connoiſſances, ne doit pas ſe mettre fort en peine des Academies, des Savans & de leurs diſputes. Le vulgaire de nos Artiſans s'inquiete-t-il de ce qu'ont penſé *Descartes*, ou *Leibnitz*, demande-t-il quelles matietes on agite dans l'Univerſité de Leyde, ou quels ſont les Profeſſeurs les plus renommés de celle de Göttingen ? Sur ce principe nous ſommes perſuadés, que ſi les Letttes avoient été entietement inconnuës a Clitomachus, il n'auroit jamais penſé à faire le Voyage d'Athenes. On ne deſire point ce qu'on ne connoit point. Dans cet état le bruit de l'Academie, ni le renom de Carneade, n'auroient jamais frappé ſes oreilles. Je crois donc que l'expreſſion d'*Etienne* ne ſignifie autre choſe, ſinon que Clitomachus n'avoit pas encore les élémens de la Langue Grecque ; c'eſt ce qu'il entend par πρῶτα στοιχεῖα. Mais d'ailleurs τῇ ἰδίᾳ Φωνῇ ἐΦιλοσόΦει, il s'etoit appliqué dans ſa langue aux Lettres & à la Philoſophie, & il avoit eu des Maitres Pheniciens.

VI. L'eſprit ne manquoit point aux Pheniciens, & l'Afrique pleine de la renommée des Philoſophes Grecs, avoit elle-même produit des Savans, qui lui faiſoient honneur. Ciceron dit, „ que Cli„tomachus, comme Phenicien, avoit beaucoup de pénétration, & „qu'il étoit avec cela fort ſtudieux & appliqué. (*) *Euſtathius* le

 „con-

(*) *Et acutum, ut Poenum, & valde ſtudioſum ac diligentem.* Acad. Quæſt. IV. 31.

„confirme, en aſſurant que, par ſa pénétration naturelle, ὀξύτητι φύ-
„σεως, & par l'aſſiduité de ſon travail, il parvint à une grande con-
„noiſſance de la Philoſophie. „ Mais écoutons le témoignage avan-
* Lib. XVI. tageux que Strabon * rend aux Pheniciens. „ Les Sidoniens, dit-il
p. 577. „paſſent pour les Auteurs de la plupart des Arts, & des plus beaux,
„comme Homere l'a inſinué. Ils ſont de plus fort verſés dans l'Aſtro-
„nomie & dans l'Arithmetique .... qu'ils croyent certainement
„être paſſées d'eux aux Grecs. A' préſent on peut puiſer avec abon-
„dance dans ces Villes, (*Tyr & Sidon*) la connoiſſance de tout le reſte
„de la Philoſophie. Si nous en croyons même Poſidonius, l'ancien
„dogme des Atomes eſt de Moſchus Sidonien, qui a vêcu avant la
„guerre de Troye. Mais laiſſons l'Antiquité. Sidon a eu de nos
„jours des Philoſophes diſtingués. Tels etoient Boëthus, qui s'eſt aſ-
„ſocié au travail de mes Commentaires ſur la Philoſophie d'Ariſtote,
„& Diodote ſon frere. Antipater etoit Tyrien, auſſi bien qu' Apol-
„lonius, qui vivoit un peu avant nous, & duquel nous avons une
„Table des Ecrits de Zenon, & une liſte des Philoſophes qu'il a for-
„més.„ Ainſi s'exprime Strabon. Or perſonne n'ignore que Carthage étoit une Colonie, & pour ainſi dire, une Fille de Tyr.

VII. Au reſte, il n'etoit pas poſſible que la Litterature Greque fût inconnuë dans l'Afrique, ni à Carthage, depuis que Battus avoit fondé Cyrene, qu' Alexandre avoit pouſſé ſes victoires dans ces contrées, & que le Royaume des Ptolemées s'y étoit établi ; d'où avoient réſulté des liaiſons, & un commerce perpetuel, entre les Africains &
† L. XX. 5. les Grecs. On peut rapporter ici ce paſſage de Juſtin : † Du tems de
„Denys l'Ancien, Tyran de Syracuſe, un Phenicien découvrit en tra-
„hiſon aux Siciliens l'arrivée de l'armée Phénicienne, qu'il leur écri-
„vit en Grec ; mais les Lettres ayant été interceptées, le traître fût
„condamné, & le Senat rendit un arrêt, portant défenſe à tout Car-
„thaginois, d'apprendre à l'avenir la Langue, ou l'Ecriture Grecque,
„afin que déſormais perſonne ne pût avoir commerce avec l'ennemi,
„ſoit de bouche, ſoit par écrit, ſans interprête.“ Mais cette Loi paroît avoir été bientot abolie par l'utilité, ou même par la neceſſité. Car,

pendant

pendant la premiere Guerre Punique, Regulus ayant vaincu les Pheniciens en Afrique au pied des murs de Carthage, les Carthaginois envoyerent en Grece, pour y lever des troupes à leur ſolde. Et Annibal, ce foudre de guerre, la terreur des Romains, eut pour Maître dans les Lettres Grecques *Soſile* de Lacedemone ; ce qui fait dire à *Cornelius Nepos.* „Ce grand homme, continuellement occupé du métier de la guerre, ne laiſſoit pas de donner quelque tems aux „Lettres. Car on a quelques Livres de ſa façon, écrits en Grec. „ *Plutarque*, dans la Vie de *Romulus*, fait mention d'un Savant Carthaginois, & rapporte ; „que Sextius Sylla, Carthaginois, favoriſé par „les Muſes & par les Graces, lui avoit dit, qu'à l'enlevement des Sabi„nes le mot que Romulus avoit donné à ſes ſoldats, étoit celui de „*Talaſſius.*„ Je laiſſe à d'autres à examiner, ſi ce *Sextius* eſt le même que *Sextus Empiricus*, qu'on a coutume d'appeller *Libyen*, & *Africain.* Au reſte, tant que l'Afrique fut ſous la domination des Romains, elle abonda en hommes doctes, parmi leſquels on compte d'illuſtres défenſeurs de l'Egliſe, les *Tertulliens*, les *Minutius*, les *Cypriens*, & d'autres.

VIII. Le deſir d'apprendre, dont l'eſprit de Clitomachus étoit tout rempli, ne lui permettant donc pas de ſe borner aux Maîtres Carthaginois, il ſe rendit à Athenes, qui étoit comme une Foire des beaux Arts ; & nous pouvons inferer d'un endroit de Ciceron, * qu'il ne revit plus ſa Patrie. Son principal but étoit de devenir Auditeur de Carneade, qui jouïſſoit dans ce tems-là d'une haute réputation, & d'un grand crédit, dans les Lettres. Il y a une diſpute au ſujet de l'année de ſon départ. *Diogene Laërce* dit, qu'il vint à „Athenes étant déjà âgé de 40. ans, & qu'il y fut auditeur de Car„neade. „ (*) *Etienne*, & *Euſtathius* qui n'a fait que le copier, s'expriment autrement, & ne lui donnent que vint huit ans, lorſqu'il vint fréquenter à Athenes l'Ecole de Carneade. (**) Quel eſt ici le témoin

* *Tuſc. Queſt.* V. 37.

(*) Ἐλθὼν εἰς Ἀθήνας ἤδη τετταράκοντα ἔτη γεγονὼς, ἤκουσε Καρνεάδου

(**) Ὃς ἢ ἔτει ἐλθὼν Ἀθήναζε . . . . ἠρξάσατο Καρνεάδου.

moin le plus digne de foi, & à qui donnerons-nous la préference? *Caſaubon* dit, que le Texte d'*Etienne* eſt fautif; tandis que *Voſſius* ſoutient, qu'il faut corriger *Diogene Laërce* ſur *Etienne* & *Euſtathius*. *Jonſius* ſe range à ce dernier avis. Pour nous, à dire vrai, nous trouvons la choſe tout à fait incertaine, & impoſſible à décider, puiſque nous ne ſavons, ni l'année de la naiſſance de Clitomachus, ni combien de tems il fut Auditeur de Carneade. Je ſerois pourtant plus diſpoſé à m'en fier à *Diogene Laërce*, parce qu'il a écrit tout du long τετταράκοντα ἔτη, au lieu qu'Etienne a mis vint-huit en chiffres κη̃, & que le μ qui marque 40, étant mal écrit, peut fort bien avoir été changé dans ces deux lettres.

IX. Auſſi-tot qu'*Asdrubal* fut arrivé, il alla trouver Carneade. „Celui-ci, dit *Diogene Laërce*, remarquant ſon ardeur pour le travail, „le reçut fort bien, il prit ſoin de le faire inſtruire dans la Langue „Grecque, & enſuite de l'exercer dans toutes les Sciences.„(*) Il répondit ſi bien à ces ſoins, qu'il devint *le plus illuſtre*, ἐλλογιμώτατος, des diſciples de Carneade, comme *Diogene Laërce* le remarque ailleurs. * Ciceron, qui fait ſouvent mention de Clitomachus, nous inſtruit là deſſus avec plus d'etenduë. „Ceux, dit-il, qui fréquente„rent l'Ecole de Carneade, ſe diſtinguerent beaucop, & Clitomachus „fut un de ceux qui montra le plus de génie, qualité par où il excel„loit, comme Carneade par l'Eloquence, & Melanthius de Rhodes „par la douceur.„ (**) Les leçons des meilleurs Maîtres peuvent demeurer ſans effet, ſi l'application & les talens des Diſciples ne les ſecondent. *Euſtathius* remarque que Clitomachus ne manqua point de

* Lib. IV. §. 66.

(*) Κακεῖνος ἀποδεξάμενος αὐτὸ τὸ φιλόπονον, γράμματά τε ἐποίησε μαθεῖν, καὶ συνήσει τὸν ἄνδρα.

(**) *Qui Carneadem audierunt, admodum floruerunt; e quibus induſtriæ plurimum in Clitomacho fuit, ingenii non minus in hoc, quam in Carneade eloquentiæ, in Melanthio Rhodio ſuavitatis.* Quæſt. Acad. IV. 6.

de ce coté là, &„ qu'il atteignait le comble de la Philoſophie par la „pénétration de ſon génie, & par la force de ſon application.„ (*)

X. Quoique perſonne ne conteſtât à Athenes le premier rang à Carneade, qui ſe l'etoit acquis par la beauté de ſon génie, & par la force de ſon éloquence, qui le mettoient en état de ſe faire écouter, quelque matiere qu'il traittât; Clitomachus, en s'attachant principalement à lui, ne mépriſoit pourtant, ni le Portique, ni l'Ecole Peripateticienne, où enſeignoient alors *Diogene*, & *Critolaus*, deux Philoſophes trés célébres. Il ſe propoſoit par là d'etre mieux inſtruit des opinions des autres Sectes, ce qui contribuë beaucoup à la ſolidité du ſavoir. *Diogene Laërce* s'en exprime ainſi: „Il s'attacha princi„palement à trois ſectes, ſavoir des Academiciens, des Peripateticiens, „& des Stoïciens.„ (**) Cependant il ſuivoit ſurtout Carneade, avec lequel il fut *juſqu'à la vieilleſſe*, comme le dit Ciceron. Cette expreſſion étant équivoque, il y en a qui la rapportent à Clitomachus, mais Mr. *Brucker* l'entend avec plus de raiſon de Carneade, qu'on peut mettre au nombre des Vieillards célébres, puiſqu'il n'eſt mort qu'à 90. ans. Comme Carneade ne mettoit rien par écrit, Clitomachus fit pluſieurs Ouvrages, où il donnoit l'expoſition de ſa doctrine, & contribua beaucoup par là, comme le témoigne Diogene Laërce, à la rendre fameuſe. (***)

XI. Sa renommée prenant ainſi tous les jours de nouveaux accroiſſemens, les Atheniens lui donnerent le droit de Bourgeoiſie, comme ils l'avoient donné à ſon Maître Carneade. Nous tenons cette particularité de *Symmachus*, Conſul, & l'un des Orateurs les plus lettrés de ſon Siecle, qui la rapporte dans une de ſes Lettres en ces termes. „*L'aſſemblée* des Atheniens jugea Carneade le Cyrenien, & „Clito-

(*) Ὀξύτητι Φύσεως καὶ ἀκρᾳ μελέτῃ εἰς πολὺ σοφίας ἑλληνικώς.

(**) Ἀνὴρ ἐν ταῖς τρισὶν αἱρέσεσι διατρίψας, ἐν δὲ τῇ Ἀκαδημαικῇ, καὶ Περιπατητικῇ, καὶ Στωικῇ.

(***) Καὶ τὰ Καρνεάδου μάλιϛα διὰ τῶν συγγραμμάτων ἐφωτίσεν.

„Clitomachus le Phenicien, dignes du droit de Bourgeoiſie; honneur „que les Romains ont fait de même à Zaleucus, Legislateur des Lo„criens.„ (*) *Diogene Laërce* remarque expreſſément, qu' aprés la mort de Carneade, Clitomachus lui ſucceda dans l'Ecole, qui fut très floriſſante ſous lui. (**) *Craſſus* dit dans l'*Orateur* de Ciceron; „En revenant de ma Queſture de Macedoine je paſſai à Athenes, où „j'entendis de trés grands hommes, l'Academie étant alors floriſſante, „ce qu'on attribuoit à ce qu'elle étoit ſous Charmides, Clitomachus „& Eſchine.„ (***) *L. Licinius Craſſus*, l'homme le plus éloquent de ſon tems, exerça ſa Queſture l'an de Rome ıocl, longtems aprés la mort de Carneade. C'eſt donc par erreur, qu'on trouve dans quelques Exemplaires *Carneades*, au lieu de *Charmides*. Ce dernier, auſſi bien qu'Eſchine, avoit été diſciple avec Clitomachus. Au reſte, s'il eſt vrai, comme d'habiles gens le penſent, que *Philon* ait ſuccedé à Clitomachus dans l'Academie, l'an de Rome ıocliii, cela prouve que celui-ci a gouverné l'Ecole pendant trente ans. En effet Carneade mourut l'an ıocxxiii, & Clitomachus l'ayant auſſi tot remplacé, il s'eſt écoulé trente ans jusqu'à l'an ıoclıii. *Stobée* va nous apprendre, de quelle maniere il termina ſa vie. „Clitomachus, „dit-il, étant devenu malade, tomba en léthargie; & enſuite ayant „re-

(*) *Nam & Carneadem Cyrenaum, & Panum Clitomachum, Athenienſis* Curia *Societate dignata eſt: itidem ut noſtri Zaleucum, Legum Locrenſium conditorem, civitate donarunt.* Symm. Epiſt. 65. Lib. X. Par *Curia*, Mr. *Fabricius* entend *l'Ecole*, dans ſa *Bibl. Græc.* Lib. III. p. 56. Il a tort, ce me ſemble. Curia, Κυρία, ἡ κυρία Ἐκκλησία, c'eſt l'aſſemblée Républicaine du peuple Athenien, où l'on traittoit de l'election des Magiſtrats, du droit de Bourgoiſie &c. L'expreſſion de Symmachus ne peut ſignifier autre choſe.

(**) *Numenius* dit, dans *Euſeb. Præpoſ.* L. XIV. p. 739. Διάδοχος Καρνεάδε τῆς διατριβῆς καθίσαται Κλειτόμαχος. *Euſebe* avoit dit plus haut p. 716. qu'aprés Arceſilas, avoient paru Carneade & Clitomachus, qui rejettant les opinions de leurs predéceſſeurs, avoient fondé la troiſieme Academie.

(***) *Audivi ſummos homines, cum Quæſtor ex Macedonia veniſſem Athenas, florente Academia, ut temporibus illis ferebatur, quod eam Charmides, & Clitomachus, & Æſchines obtinebant.*

„recouvré l'uſage de ſes ſens, il dit: *Je ne ſerai pas la dupe de l'amour „de la vie.* Et là deſſus il ſe procura une mort volontaire. „ (*) Il avoit puiſé ces principes dans la doctrine des Stoïciens. *Diogene* le Cynique, & les Philoſophes des autres Sectes, ont auſſi donné de grands éloges au meurtre de ſoi-même ; & c'eſt ainſi que *Democrite* & *Iſocrate* ont fini leurs jours. Les Chrêtiens ont penſé tout autrement; témoin ces paroles de Lactance: „Il ne ſauroit y avoir une action „plus criminelle. Car ſi un homicide eſt coupable, parce qu'il fait „périr un homme, celui qui ſe tuë lui même, commet un crime égal, „puiſqu'il détruit un homme. „ (**)

XII. Paſſons préſentement aux Ecrits de Clitomachus, ou plutot aux fragmens, & aux petites piéces détachées de ſa doctrine, qui ont échapé à l'injure des tems. *Diogene Laërce* témoigne qu'il peut être mis à juſte titre au rang des Auteurs *Polygraphes.* „Il étoit ſi „laborieux, dit-il, qu'il a écrit plus de quatre cens Volumes.“ (***) Ciceron appuye ce témoignage du ſien. „Clitomachus avoit beau„coup de talent. C'eſt ce que prouve la multitude de ſes Livres. „ (****) Il parle entr'autres d'un Ouvrage de Conſolation, dont il étoit Auteur. „J'ai lû, ce ſont ſes termes, le livre, qu' écrivit autrefois „Clitomachus aux Carthaginois ſes Concitoyens, pour les conſoler. „tant ſur la ruïne de leur commune patrie, que ſur leur captivité. „On y trouve une Diſſertation entiere de ſon Maitre Carneade, con„tre cette Propoſition : *Que le Sage peut être touché d'affliction aprés la*

(*) Κλειτόμαχος νοσήσας, καὶ λιθάργῳ περιπεσών, ὡς ἀνένηψεν, ἰδέν με, ἔφη, ἐξαπατήσει ἡ Φιλοζωΐα, καὶ ἐξήγαγεν ἑαυτὸν τ῀ βίᾳ. *Stob. Florileg.* Cap VII.

(**) *Nihil hoc ſceleratius fieri poteſt. Nam ſi homicida nefarius eſt, quia hominis exſtimator eſt; eidem ſceleri obſtrictus eſt, qui ſe necat, quia hominem necat.* Inſtit. L III. Cap. 18.

(***) Ὁ δὲ εἰς τοσ῀τον ἤλασεν ἐπιμελείας, ὥσε ὑπὲρ τὰ τετρακόσια βιβλία συνέγραψε.

(****) *Induſtria plurimum fuit in Clitomacho. Declarat multitudo librorum.*

la deſtruction de ſa Patrie.„ (*) Diogene Laërce nous a appris ci-deſſus, que Carneade n'avoit rien laiſſé par ecrit. Clitomachus lui avoit donc rendu le même ſervice, que *Platon* & *Xenophon* ont rendu à Socrate, en réduiſant ſes diſcours en Livres. Il eſt conſtant que Carthage fut détruite par Scipion, l'an de Rome DCVIII. dix-huit ans avant la mort de Carneade. Il faut donc que Clitomachus ait quitté Carthage pour aller à Athenes avant la troiſieme Guerre Punique. On ne ſauroit douter que la ruïne de Carthage, cette Ville ſi floriſſante, ſi ſuperbe, rivale de Rome, n'ait cauſé une douleur incroyable à ceux de ſes Citoyens, qui lui ont ſurvêcu, & en particulier à ceux qui ont eſſuyé la honte, & les rigueurs de la captivité. C'eſt pour relever un peu leurs eſprits accablés par ce terrible choc, que Carneade écrivit le Traitté de Conſolation, dont nous venons de parler. Il y a bien lieu de regretter, que Ciceron, qui l'avoit entre les mains, ne nous en ait donné aucun extrait. Pour ce qui regarde le fonds même de la Queſtion, Ciceron ſoutient au III. Livre des Tuſculanes; *Que le Sage n'eſt pas ſuſceptible de chagrin.* Elle etoit propoſée dans l'Ouvrage de Clitomachus en ces termes: *Que le Sage peut être touché d'affliction, aprés la deſtruction de ſa Patrie.* Carneade avoit avancé le contraire. Clitomachus permet l'affliction, comme une eſpece de remede à de tels malheurs, mais Ciceron la déſaprouve. „Or, continuë-t-il au même endroit, par les belles choſes qu'y dit „ce grand Philoſophe, pour fortifier les affligés contre une calamité „préſente, on juge qu'elles ne ſont pas même néceſſaires contre une „calamité inveterée; & que ſi ce même livre avoit été envoyé aux „Carthaginois quelques années aprés, il auroit trouvé dans leurs coeurs „moins de playes à guérir, que de cicatrices à effacer. Car on ſait „aſſez, que par un décroiſſement inſenſible, & imperceptible, la dou„leur s'affoiblit d'elle-même en vieilliſſant. Non qu'il arrive aucun chan-

(*) *Legimus librum Clitomachi, quem illa everſa Carthagine miſit conſolandi gratia ad captivos cives ſuos. In eo eſt diſputatio ſcripta Carneadis, quam ſe ait in Commentarium retuliſſe. Cum ita poſitum eſſet, videri fore in ægritudine ſapientem, patria capta: quæ Carneades contra dixerit, ſcripta ſunt.* Tuſc. III. 22 Je me ſuis ſervi de la Traduction de l'Abbé d'*Olivet*. Tom. II. p. 60.

„changement à la choſe qui en a fait le ſujet. Mais c'eſt que l'expe-
„rience nous enſeigne ce que la raiſon auroit dû nous apprendre;
„ſavoir, que les malheurs de la vie ſont en effet beaucoup moins
„grands, qu'il ne le paroiſſent d'abord.„ * Le dogme de la ſecte Cyrenaï-
que étoit: *Que l'on pouvoit ſe laiſſer aller au chagrin, lorſqu'il ſurve-
noit quelque accident inopiné.* A cela Ciceron répondoit: *Qu'il ne
faloit pas que rien parut inopiné au Sage.* Et en parlant ainſi, il avoit
devant les yeux l'image de Socrate, dont *Elien* rapporte ces belles
particularités: „Xantippe avoit coutume de dire, que dans ce nom-
„bre presque infini de révolutions, auxquelles la République fut ex-
„poſée, on vit toujours Socrate conſerver le même viſage, ſoit qu'il
„ſortit de la maiſon, ſoit qu'il y rentrât. Car il enviſageoit tout du
„même oeil, & conſervoit même l'enjoüement de ſon humeur, tant
„il étoit au deſſus de tous les ſujets de triſteſſe & de crainte.

* *Tuscul.* de l'Abbé d'*Olivet*, ub. ſup. p. 60. 61.

XIII. Clitomachus écrivit quatre Livres, *ſur la ſuſpenſion du jugement*, περὶ ἐποχῆς. C'eſt Ciceron qui nous en inſtruit en ces termes. „Je n'avancerai rien qu'on puiſſe ſoupçonner être de mon in-
„vention; j'aurai pour garant Clitomachus, qui a vêcu juſqu'à
„la vieilleſſe avec Carneade, & qui avoit beaucoup d'eſprit,
„comme en ont les Phéniciens, & beaucoup d'application à l'e-
„tude. On a quatre Livres de lui, *ſur la ſuſpenſion du jugement.* Ce
„que je vais rapporter, eſt tiré du premier.„ (*). Nous verrons plus bas le paſſage que Ciceron tire de ce Livre premier, & nous l'exami-nerons. Clitomachus a encore traitté la même matiere dans deux autres Ouvrages, adreſſés l'un au Poëte *Lucilius*, & l'autre au Conſul *Cenſorinus*. Recourons encore à Ciceron. „J'ai expliqué, dit-il,
„peu auparavant, en ſuivant Clitomachus, comment Carneades s'ex-
„primoit là deſſus; écoutez ce que Clitomachus lui même en dit,
„dans le Livre qu'il a adreſſé au Poëte Lucile. Il avoit déjà écrit ſur
„le même ſujet dans un Ouvrage adreſſé à L. Cenſorinus, celui qui a

(*) *Nec vero quicquam ita dicam, ut quisquam id fingi ſuſpicetur: a Clitomacho ſumam, qui usque ad ſenectutem cum Carneade fuit, homo & acutus, ut Pœnus, & valde ſtudioſus & diligens. Et quatuor ejus libri ſunt, de ſuſtinendis aſſenſionibus. Hæc autem quæ jam dicam ſunt ſumta de primo.* Acad. IV. 31.

„été Conſul avec M. Manilius. Voici donc à peu prés ſes propres ter-„mes.“ (*) Nous rapporterons ailleurs les paroles mêmes dont il s'agit, & nous les éclaircirons.

L. Marcius Cenſorinus, & *M. Manilius*, furent Conſuls l'an de Rome DCV. aprés qu'on eut réſolu la troiſieme guerre Punique, pour la conduite de laquelle les deux Conſuls furent envoyés en DCVI. Le Poëte Lucile, qui tient le premier rang parmi les Satyriques, avoit ſeize ans en DCXXI. & ſervoit alors comme Cavalier ſous Scipion, dans la guerre de Numance. Mais on ne ſauroit déterminer l'année dans laquelle Clitomachus dédia ſes Livres au Poëte, ou aux Conſuls. La *Chronique de S. Jerome* met la mort de Lucile à l'an DCL. Ces Obſervations répandent ſur l'age de Clitomachus un jour, dont *Jonſius* s'eſt déjà apperçu.

XIV. Peu s'en faut qu'on n'ait mis notre Philoſophe dans le Catalogue des Athées *; mais il faut le laver de cette tache, que *Theophile*, Evêque d'Antioche a voulu lui imprimer. Voici l'endroit où il en parle. „Pythagore affirme que les Dieux ne prennent aucun „ſoin des hommes ; & combien de choſes l'Academicien Clitoma-„chus n'a-t-il pas avancées en faveur de l'Atheiſme?“ (**) Le ſavant *Reineſius* a examiné ce paſſage †, & ſa Critique merite de trouver place ici. „Nous ne nous arrêterons point, dit-il, à diſcuter ſi ce que „Theophile dit de Pythagore eſt vrai. Il y a une infinité de témoins „qui dépoſent que ce Philoſophe avoit de tout autres ſentimens au „ſujet de la Divinité. . . . . Vient enſuite la propoſition interro-„gative concernant Clitomachus, qui eſt équivalente à une propoſi-„tion affirmative : *Combien de choſes l'Academicien Clitomachus, n'a-*

* Voy. *Rei-mann. Hiſt. A-theism.* p. 171.

† *Var. Lect. Lib.* III. Cap. 6.

(*) *Explicavi paulo ante Clitomacho autore, quomodo iſta Carneades diceret ; accipe quo-modo eadem dicantur a Clitomacho in eo libro quem ad Caium Lucilium ſcripſit Poetam, cum ſcripſiſſet iisdem de rebus ad L. Cenſorinum, cum qui Conſul cum M. Manilio fuit. Scripſit igitur his fere verbis.* ubi ſup. 31.

(**) Φησί τε (ὁ Πυθαγόρας) τῶν πάντων θεὸς ἀνθρώπων μηδὲν φροντίζειν· ὁπόσα τε Κλειτόμαχος ὁ Ακαδημικὸς περὶ ἀθεότητος εἰσηγήσατο. *Theop. ad Autolyc.* Lib. III.

„n'a-t-il pas avantées en faveur de l'Atheisme? A Pythagore Athée „il joint Clitomachus, comme ayant pareillement douté de l'exi„ſtence des Dieux, & bientot aprés il aſſocie à Clitomachus Critias, „Protagoras, & Euemerus de Tegée, ou de Meſſene, ſur l'impieté „duquel on peut conſulter Plutarque. Au reſte on ſait aſſez ce que „c'etoit que les ἀποφατικοὶ λόγοι, *negantes ſermones*, au ſujet des „Dieux. Mais, (continuë *Reineſius*, dans le Texte Latin duquel il „y a ici une faute d'impreſſion à corriger,) mais, à l'egard de Clito„machus Carthaginois, diſciple de Carneade, & le plus diſtingué des „Philoſophes de la nouvelle Academie, au jugement d'Athenée, j'ai „été longtems en ſuſpens, s'il faloit lui imputer la même héréſie, jus„qu'à ce qu'à la fin j'ai trouvé dans Sextus Empiricus, l'argument en „forme de Sorites, dont il ſe ſervoit pour nier l'exiſtence des Dieux. „C'eſt celui que Theophile a en vüe dans ce paſſage, & j'ai admiré le „laborieux aſſortiment d'impieté & de folie, que ce raiſonnement „raſſemble." J'admire la précipitation de Reineſius à condamner Clitomachus, lui qui a été ſi facile à excuſer Pythagore. Le *Sorites* de Clitomachus ne m'a point épouvanté; & bien loin d'y voir l'Atheïsme, il m'a paru uniquement propre à détruire de fond en comble le Polytheïsme, & à renverſer la gloire des fauſſes Divinités. Mais rapportons l'endroit même de *Sextus Empiricus*.* „Carneade, dit-il, „avoit auſſi propoſé quelques Argumens en forme de Sorites. Son „Ami Clitomachus les a mis par écrit, comme étant d'une trés grande „force; & voici comment ils ſont conſtruits. Si Jupiter eſt Dieu, „Neptune, entant que ſon frere, eſt auſſi Dieu. Si Neptune eſt „Dieu, Achelous l'eſt auſſi. Si Achelous l'eſt, le Nil l'eſt auſſi. Si le „Nil l'eſt, chaque fleuve le ſera. Si les fleuves le ſont, il en ſera de „même des ruiſſeaux; ſi les ruiſſeaux, cela nous mene aux torrens. Or „les torrens ne ſont par des Divinités, donc Jupiter n'eſt pas Dieu." Tout va bien jusqu'ici; & perſonne d'entre nous ne penſe autrement. Mais ce qu'il ajoute, cloche furieuſement. *Si ces choſes étoient des Divinités, Jupiter ſeroit auſſi Dieu. Ce ne ſont donc pas des Divinités.* Raiſonnement indigne d'un Philoſophe! Mais allons plus loin, afin de mieux approfondir ſon ſentiment. L'Academicien *Cotta* preſſe

* Liv. IX. Ch. 182.

le même Argument contre le Stoïcien *Balbus*, dans le Traitté de Ciceron *de la Nature des Dieux*. „Si la Lune eſt une Divinité, il faut „que l'Etoile du matin, que les autres Planetes, que toutes les Etoiles „fixes ſoient de la même condition. Et pourquoi n'en ſera pas l'Arc-„en-Ciel. . . . . les Nuées. . . . les Tempêtes. . . . . Vous en „ferez part (de cet honneur) aux Pluyes, aux Ondées, aux Orages, „aux Tourbillons." * Mais toute cette longue & fatiguante diſpute eſt terminée d'un ſeul coup par cette ſentence de Ciceron. „Ainſi „taiſonnoit Carneade, non dans la vuë de ſapper l'exiſtence des Dieux, „(car qu'y auroit-il de moins convenable à un Philoſophe?) mais „pour montrer avec évidence que ſur cette matiere les Stoïciens ne „diſent rien de plauſible." † C'eſt ce qui engage *Cotta* à terminer ſon diſcours par cette exclamation. „Pour apprendre donc l'exiſten-„ce des Dieux, & quels ils ſont, je dois m'adreſſer à d'autres qu'à „vous, Stoïciens." * Au reſte ce n'eſt point ici le lieu d'examiner les erreurs des Stoïciens ſur la Divinité. Il y a un Traitté de Jacobus *Thomaſius*, qui peut ſuffire à ceux qui voudront en ſavoir davantage là deſſus. (*)

* *Entr. de Cicer. ſur la nat. des Dieux.* Trad. de l'Abbé *d'Olivet* Tom. II. p. 185. 186.

† *ibid.* p. 178.

* *ibid.* p. 196.

XV. *Sextus Empiricus* nous apprend que Clitomachus étoit ennemi de la Rhetorique, comme les autres Academiciens. „Critolaus, „dit cet Auteur, & les Academiciens, entr'autres Clitomachus & „Charmidas, font ordinairement beaucoup d'objections contre la „Rhetorique. Ils ne banniſſent pas les Arts des Villes, reconnoiſſant „qu'ils ſont fort utiles à la vie ; tout comme nous ne chaſſons pas les „Fermiers de nos métairies, ni les Bergers de nos troupeaux. Mais „pour l'Art de parler (Ρητορικὴν) ils en ſont les ennemis declarés, ils „le pourſuivent en tous lieux ; & le chaſſent de par tout, comme le „Legiſlateur de Crete, qui a defendu l'entrée de ſon Ile à tous ceux „qui ſe vantent d'eloquence, & ſont arrogamment enflés de ce talent. „Lycurgue Legiſlateur de Sparte, & émule de Thales Legiſlateur de „Crete, a donné aux Lacédémoniens la même Loi." On peut lire le reſte dans *Sextus*. Le paſſage ſuivant de *Stobée* doit peut-être ſe rappor-

(*) C'eſt celui *de Exuſtione Mundi Stoica*.

rapporter à ceci. „Clitomachus, dit-il, comparoit la Dialecti„que à la Lune, parce que, comme cet Aſtre, elle a des accroiſ„ſemens & des décroiſſemens perpetuels.“ (*) Mr. *Brucker*, aprés avoir examiné le ſens de ces mots, décide ainſi. * „Il ſemble avoir „voulu déſigner par cette comparaiſon la fortune de l'Academie, qui „aprés avoir été fort brillante ſous Arceſilas, dont les diſciples furent „en grand nombre, décrut, & reprit enſuite un nouvel éclat ſous „Carneade. Comme donc la Dialectique eſt ornée par les ſecours du „génie & l'eloquence, de même l'Academie reçut ſes accroiſſemens & „ſes décroiſſemens.“ Mais avec la permiſſion de cet Auteur ſi verſé dans l'Hiſtoire Philoſophique, nous ſommes d'un tout autre avis. Il ne s'agit là, ni de l'état floriſſant de l'Academie, ni de ſa décadence ; il eſt uniquement queſtion de la Dialectique, cet Art de diſputer, & de juger du vrai & du faux ; Art, dont les Philoſophes de ce tems-là faiſoient un trés fréquent abus par le moyen de la Rhétorique. Cela l'expoſoit presque à un mépris univerſel ; & *Stobée*, dans l'endroit que nous avons cité, allégue les temoignages de pluſieurs Auteurs, qui jugeoient fort déſavantageuſement de la Dialectique. „Arceſilas avoit „dit, que les Dialecticiens étoient ſemblables à ceux, qui joüent aux „jeux de hazard, en ce que les tromperies ſont fruit de leur goût ; & „qu'ainſi on doit fuïr la Dialectique, comme n'etant propre qu'à mettre „tout en confuſion. Carneade diſoit que la Dialectique reſſemble à „un Polype, qui dévore ſes pieds, lorſqu'ils ſe ſont accrus ; les Dia„lecticiens, quand ils ſe ſont fortifiés dans leur Art, réfutant de même „leurs propres opinions.“ Clitomachus ne s'ecarta pas de la doctrine de ſon Maître, en comparant la Dialectique à la Lune. En effet comme la ſplendeur de cet-Aſtre, tantôt en augmentant, tantôt en diminuant, de même il y a des tems où la Dialectique eſt conſiderée, d'autres où elle eſt plongée dans l'obſcurité ; des tems où on l'admire, d'autres où on la mépriſe ; des tems d'elévation & d'abaiſſement ; des tems

* *Hiſt. Phil.* Tom. I. p. 773.

(*) Κλειτόμαχος ἐικαζε τὴν Διαλεκτικὴν τῇ Σελήνῃ καὶ γὰρ ταύτην ϑ παύεϑαι φθίνουσαν καὶ αὐξομένην. *Stob.* Serm. LXXX. p. 473.

tems enfin où elle produit des fruits, & d'autres où elle les dévore. Carneade lui même en fournit un exemple, lorsqu'etant à Rome, il y déclama avec une force égale pour & contre la juſtice. C'eſt de Lactance que nous tenons cette Hiſtoire. „Carneade, dit-il, ayant été „envoyé à Rome par les Atheniéns, fit un diſcours fort étendu ſur „la juſtice, en préſence de Galba, & de Caton le Cenſeur, le plus „grands Orateurs de ce tems là. Mais le lendemain il détruiſit tout ce „qu'il avoit dit par un diſcours contraire, & fit main baſſe ſur cette „juſtice à la quelle il avoit donné de grands éloges; en quoi il ne „montra pas la gravité d'un Philoſophe, qui doit être d'un jugement „raſſis, & ferme dans ſes opinions. Mais c'étoit plutot un ſimple „exercice Oratoire, qui lui laiſſoit la liberté de ſoutenir le pour & le „contre.“ Caton, au rapport de Pline, * fut d'avis qu'il faloit con- * VII. 30.
gedier ſur le champ un pareil homme, avec les raiſonnemens duquel *il étoit ſi difficile de parvenir à la connoiſſance de la Verité.*

XVI. *Diogene Laërce*, dans ſa Vie d'*Ariſtippe*, cite les Livres de Clitomachus *ſur les Sectes*, en ces termes. „*Meleagre* „dans ſon „ſecond Livre *des Opinions*, & Clitomachus dans le premier qu'il a „écrit des *Sectes*, leur attribüent (aux Philoſophes Cyrenaïques) d'a- „voir également mépriſé la Phyſique & la Dialectique.“ (*) Sur quoi *Menage* remarque fort bien; „qu'on ne ſait qui étoit ce Meleagre, ni „quand il a vêcu, & que les Livres de Clitomachus ſur les Sectes ne „ſe trouvent cités en aucun autre endroit.“ *Athenée* introduit auſſi notre Philoſophe ſur la Scéne, en lui donnant de pompeux éloges. „C'eſt pourquoi, dit-il, Clitomachus Carthaginois, l'un des plus „profonds dans la ſpéculation que la nouvelle Academie ait produit, „a dit d'un Athlete Thebain de ſon tems, qui ſurpaſſoit tous les au- „tres hommes en force, que c'etoit parce qu'il ſe nourriſſoit de vian- „de

(*) Μελέαγρος δὲ ἐν τῷ δευτέρῳ περὶ δόξων, καὶ Κλειτόμαχος ἐν τῷ πρώτῳ περὶ τῶν αἱρέσεων, φάσιν, αὐτὰς (τὰς Κυρηναικὰς) ἄχρηστα ἡγεῖσθαι τόδε Φυσικὸν μέρος καὶ τὸ διαλεκτικόν. Lib. II. § 92.

„de de chevre.“ C'eſt encore de Clitomachus que Stobée a tiré les vers ſuivans :

Dans le ſein des plaiſirs la fortune perfide
Détruit notre bonheur par un ſouffle rapide ;
Et les rafinemens de notre volupté
Sont, helas ! le joüet de ſa legereté. (*)

XVII. Tout ce qui nous reſte à préſent de la Philoſophie de Clitomachus, eſt dû aux ſoins de Ciceron, qui rapporte ce paſſage remarquable, tiré des Livres adreſſés au Poëte Lucile, & au Conſulaire Cenſorin, *ſur la Suſpenſion du jugement.* „Voici à peu prés, dit „Ciceron, ce qu'a écrit Clitomachus. Car ſes paroles me ſont bien „connuës, parce que ce Livre renferme les premiers Elémens, & com„me toute la doctrine des mêmes matieres dont oous traittons à pré„ſent. Mais revenons à ce qu'il a écrit, &c.“ (**) Mettons ici ſous les yeux du Lecteur l'état de la Queſtion, dont il s'agiſſoit. Le quatrieme Livre des Queſtions Academiques contient une diſpute de Ciceron avec Lucullus. Celui-ci avoit affirmé, qu'il y a des choſes d'une verité inconteſtable. Il en appelle d'abord à l'experience des ſens. Il dit que les idées, ou les choſes apperçuës par les ſens, ſont

(*) Τοῖς ἓυ παθέσιν ἀντιπνεύσασ' ἡ τύχη,
Τὰ πάντα συγχεῖ, πάντα ναυαγεῖν ποιεῖ,
Τά τῇ Φρονήσει καὶ λογισμοῖς ὄρθια
Ἐκπεπονῆσθαι δοκοῦντα πρὸς τὸ ζῆν καλῶς.

Ce que Grotius a rendu par ces Vers *Latins :*

Fortuna reſſans proſpere viventibus
Conturbat, afflictatque naufragio omnia,
Quæcunque vitæ condienda ſuaviter
Prudens repererat ingeni ſolertia.

(**) *Scripſit Clitomachus his fere verbis. Sunt enim mihi nota, propterea quod ipſarum earum rerum, de quibus agimus, prima inſtitutio, & quaſi diſciplina illo libro continetur. Sed ſcriptum eſt ita.* On trouvera plus bas la ſuite du paſſage, qui renferme la doctrine de Clitomachus, § XX.

ſont clairs & certaines; Qu'il n'eſt pas poſſible, que celui qui reſſent de la douleur, n'ait point de douleur; & qu'il n'y ait aucune difference entre un homme qui ſouffre, & un autre qui eſt dans la Volupté; Que des perceptions des ſens naiſſent & ſe forment les notions, ἐννοίαι, & de là les Arts, les Sciences, la Sageſſe, la Vertu, qui par conſequent ne ſont pas des choſes fauſſes, mais doivent au contraire être regardées comme fixes & immuables. Ciceron prend le parti oppoſé, & ſoutenant le ſentiment des Academiciens, il s'efforce de répondre à Lucullus. Il prétend que celui qui donne ſon aſſentiment aux choſes, qui lui paroiſſent veritables, tombe ſouvent dans l'erreur; qu'il ne faut point ſe fier aux ſens; que la plupart des choſes ſont probables, mais qu'il n'y en a aucune de certaine: Que la probabilité ſuffit pour la vie humaine. Ciceron, qui étoit un grand partiſan du doute, ſe ſert donc ici de tout ce qui lui paroit propre à établir la doctrine des Academiciens, & il en appelle principalement au témoignage de Clitomachus. C'eſt ce qui nous oblige à y répandre encore quelque jour.

XVIII. C'eſt de Socrate que la plûpart des Sectes Philoſophiques, mais ſurtout l'Academie, tirent leur origine. Avant ce pére de la Philoſophie Morale, les études des Sages avoient principalement pour objet la Phyſique. Ciceron exprime avec beaucoup d'élégance les ſervices que Socrate rendit à la Philoſophie. „C'eſt lui, dit-il, comme „tout le monde le reconnoit, qui a retiré la Philoſophie de l'étude „des profondeurs & des myſteres de la Nature, à laquelle tous les „Philoſophes s'occupoient avant lui, & qui l'a appliquée à la vie „commune, en s'attachant à l'examen des vertus & des vices, & de „tout ce qui concerne le bien & le mal. Il croyoit que la recherche „des choſes, qui ſe paſſent au Ciel, étoit trop élevée au deſſus de nos con„noiſſances, & que, quand même nous y atteindrions, elle ſeroit inu„tile pour bien vivre. Dans tous les diſcours de Socrate, ajoute Ci„ceron, il n'affirmoit rien lui-même, mais il ſe bornoit à réfuter les „autres." (*) *Turnebus* remarque fort bien à l'occaſion de ce paſſage; qu'il

(*) *Socrates mihi videtur, id quod conſtat inter omnes, primus a rebus occultis, & ab ipſa*

qu'il y avoit dans ce tems-là une prodigieuſe quantité de Sophiſtes, qui ſe vantoient de tout ſavoir, & qui gâtoient l'esprit de la jeuneſſe par la perſuaſion d'une fauſſe ſcience. C'eſt ce qui jetta Socrate dans la route oppoſée, & lui fit faire profeſſion de ne rien ſavoir, afin de délivrer les hommes de leurs erreurs. Les Academiciens qui vinrent aprés Socrate, ſous la conduite de Platon, réduiſirent la Philoſophie en art, ce que Socrate n'avoit point approuvé. Ciceron continuë donc au Chapitre ſuivant en ces termes. „On tient de Platon trois „manieres differentes de philoſopher; la premiere a pour objet la vie „& les moeurs; la ſeconde traitte des ſecrets de la nature; la troi„ſieme s'occupe à la diſpute, & ſert à juger du vrai & de faux, de ce „qui eſt bon, ou mauvais dans le diſcours, de ce qui s'accorde avec „nos idées, & de ce qui y répugne." (*) Cela nous apprend que la Philoſophie de Platon étoit diviſée en trois parties, la Morale, la Phyſique & la Dialectique.

XIX. Or le but de la Dialectique chez les premiers & les principaux Philoſophes, tant de l'Academie, que de l'Ecole Peripateticienne, n'etoit pas de remplir l'esprit de doutes, & de le faire flotter dans l'incertitude; au contraire ils la regardoient comme un moyen de déterminer avec plus de certitude le vrai & le faux. Cicéron nous le dit en termes exprés. „La troiſieme partie de la Philoſophie (la „Dialectique) étoit traittée par les uns & les autres ſuivant ce princi„pe; c'eſt que le diſcernement de la verité, bien qu'il tire ſon origi„ne des ſens, n'appartient pourtant pas aux ſens. Ils vouloient que „l'Ame (*Mens*) ſoit le juge des choſes, & croyoient qu'on ne pou-

„voit

ipſa natura involutis, in quibus omnes ante eum Philoſophi occupati fuerunt, avocaviſſe Philoſophiam, & ad vitam communem adduxiſſe, ut de virtutibus & vitiis, omninoque de rebus bonis & malis quæreret: cœleſtia autem vel procul eſſe a noſtra cognitione cenſeret, vel ſi maxime cognita eſſent, nihil tamen ad recte vivendum. Hic in omnibus fere ſermonibus ita diſputat, ut nihil affirmet ipſe, refellat alios. Acad. Quæſt. l. 4.

(*) *Fuit ergo jam acceptus a Platone philoſophandi ratio triplex: una de vita & moribus; altera, de natura & rebus occultis; tertia de differendo, & quid verum, quid falſum, quid rectum in oratione pravumque, quid conſentiens, quid repugnet judicando.* lb. 5.

„voit s'en rapporter qu'à elle, parce qu'il n'y a qu'elle qui apperçoi-„ve les choſes d'une maniere ſimple, unique, & telles qu'elles ſont „. . . . . Ils ne plaçoient la *Science* nulle part que dans les *notions* de „l'Ame, & dans les raiſonnemens." (*) Qui eſt-ce qui ne s'apperçoit pas que cette Dialectique eſt la même choſe que la Logique de notre Philoſophie moderne. Dans toutes les idées que nous formons par le ſecours des ſens, il demeure quelque choſe de confus, qui nous empêche de les bien diſtinguer, ou définir. C'eſt ce qui fait que les Corps eux-mêmes avec toutes leurs qualités & proprietés, ſont ſi profondément cachés, qu'il faût ſe borner aux ſeules conjectures & aux opinions. Il en eſt tout autrement des notions, que nous acquerons par la voye de l'Entendement: il n'y reſte aucun doute, tout y eſt clair & diſtinct. Mais revenons à notre ſujet. De ſavans hommes ont remarqué que Platon a marché à cet égard ſur les traces de Socrate; que, pour confondre l'arrogance des Sophiſtes, il a ſouvent envelopé ſes Dogmes, qu'il n'eſt pas aiſé de demêler dans les diſputes, où il les place, & qu'il n'a jamais rien decidé avec autorité en public, ſurtout à l'egard des choſes, dont les ſens nous procurent ſeuls la connoiſſance; en ſorte qu'il ne levoit le voile que dans ſes entretiens particuliers, & en faveur des Diſciples, auxquels il vouloit bien révéler les myſteres de ſa doctrine. Depuis, lorsque le crédit des Stoïciens ſe fut accrû, & que les Dialecticiens abuſant de plus en plus de leur art, eurent commencé à tenir une conduite tout à fait inſolente, *Arceſilaüs*, pour confondre les uns & les autres, changea le plan de la Philoſophie Academique, & enſeigna à douter de tout. Mr. *Brucker* ayant recherché & dévelopé avec beaucoup d'exactitude les cauſes de cette eſpece de révolution, c'eſt à lui que nous renvoyons.* Aprés la mort d'*Arceſilaus*, qui joignoit beaucoup d'esprit à beaucoup de ſavoir, l'Academie devint décriée, ſous prétexte qu'el-

* *Hiſt. Phil.* T. I. p. 752.

(*) *Tertia Philoſophiæ pars* (Dialectica) *ſic tractabatur ab utrisque: quanquam oriretur a ſenſibus, tamen non eſſe judicium veritatis in ſenſibus. Mentem volebant rerum eſſe judicem: ſolam cenſebant idoneam, cui crederetur, quia ſola cerneret id, quod ſemper eſſet ſimplex & unius modi, & tale quale eſſet. . . . . Scientiam autem nusquam eſſe credebant, niſi in animi* notionibus *ac* rationibus. Ac. Qu. IV. 8.

qu'elle détruiſoit toute Science, & qu'elle étoit ennemie de la Religion & du culte des Dieux. C'eſt ce qui engagea Carneade, ſucceſſeur d'Arceſilaus, à adoucir ce que ſon prédeceſſeur avoit avancé de trop dur, pour ne pas encourir l'indignation du peuple & des Magiſtrats. Ciceron nous apprend comment il s'y prit; ce fut, en avoüant qu'il y avoit des choſes certaines dans la Nature, mais en ajoutant que la foibleſſe de l'entendement humain ne permettoit pas d'appercevoir & de comprendre les eſſences des choſes; qu'ainſi il n'y avoit point à la verité de *Science*; mais qu'il reſtoit *l'opinion*, dont les *probabilités* étoient l'objet. D'où il conclüoit, *qu'il ne faloit rien affirmer, ou nier à la legére; que le Sage ſuivoit les reſſemblances, & les probabilités, en ſe réglant ſur leurs degrés, & que c'eſt là deſſus qu'il ſe gouvernoit dans tout les cours de ſa vie* *. * *Acad. Qu.* IV. 31.

XX. Aprés ces éclairciſſemens, il ſera facile de parvenir à l'intelligence du fragment de Clitomachus, que Ciceron nous a conſervé, & dont voici les termes: „Que le ſentiment des Academiciens „conſiſte à dire, que les choſes different entr'elles de maniere qu'il y „en a qui paroiſſent plus probables, & d'autres moins: mais que cela „ne ſuffit pas, pour qu'on puiſſe dire des unes qu'elles peuvent être „apperçües, & des autres qu'elles ne peuvent l'etre, ou qu'il y a plu„ſieurs choſes probables qui ſe trouvent fauſſes; & que rien de ce „qui a été une fois apperçu & connu, ne peut être faux. *Il dit* donc, „que ceux-là ſe trompent beaucoup, qui prétendent, que *l'Aca„demie détruit le temoignage des ſens*, puisqu'elle n'a jamais avancé „qu'il n'y ait, ni couleur, ni ſaveur, ni ſon: Que tout s'eſt réduit „à ſoûtenir, que les ſens ne renfermoient point un caractere propre „de verité & de certitude, qui ne ſe trouvât nulle part ailleurs. *A quoi „Clitomachus ajoute*; qu'il y a deux ſens dans leſquels on affirme que „le Sage *ſuſpend ſon jugement*; l'un, par où l'on entend qu'il ne don„ne en effet ſon aſſentiment à rien; l'autre, qui lui attribüe ſeule„ment de s'abſtenir de répondre, & de prononcer ſur quoi que ce ſoit, „pour approuver ou pour condamner, pour nier ou pour affirmer. „Que cela étant ainſi, le premier jugeoit à propos de n'acquieſcer „jamais à rien; au lieu que l'autre ſe déclaroit pour la probabilité, la

„ſuivant partout où elle ſe trouvoit, & diſant, *Oui*, ou *Non*, ſui„vant qu'elle exiſtoit, ou qu'elle manquoit. Mais, comme il faut „que celui-là même, qui refuſe ſon acquieſcement à tout, agiſſe pour„tant, & ſe mette en mouvement, il laiſſe ſubſiſter les répreſentations „des choſes, qui nous excitent à l'action; qu'il admet pareillement „les cas, où étant interrogés, nous pouvons répondre pour & con„tre, en ſuivant uniquement pour régle que les choſes nous paroiſ„ſent ainſi, pourvu que nous nous gardions bien *d'acquieſcer* en effet; „& il pouſſe les précautions juſqu'à ne pas permettre qu'on ſe confor„me en général aux idées ſous leſquelles les choſes ſe préſentent à „nous, mais ſeulement à celles qui ne ſouffrent aucune difficulté." (*) C'eſt là le précis de le doctrine de Clitomachus; aprés quoi Ciceron rapporte une hiſtoire de Carneade *, qui a moins de rapport à notre ſujet. Il faut ſe rappeller encore ici un paſſage de *Sextus Empiricus*, où il s'efforce de faire ſentir la difference qu'il y a entre la Philoſophie Sceptique, & celle de l'Academie. Il y attribüe à Carneade, & à Clitomachus d'enſeigner: *que la probabilité nous entraine à l'acquieſcement par une* pente extrémement forte. (**)

* *Academic. Queſt.* IV. 45.

XXI.

(*) *ACADEMICIS placere; eſſe rerum ejuſmodi diſſimilitudines, ut alia probabiles videantur, alia contra. Id autem non eſſe ſatis, cur alia percipi poſſe dicas, alia non poſſe; propterea quod multa falſa probabilia ſint, nihil autem falſi perceptum & cognitum poſſit eſſe. Itaque AIT, vehementer errare eos, qui dicant* ab Academia ſenſus eripi, *a quibus nunquam dictum ſit, aut colorem, aut ſaporem aut ſonum nullum eſſe. Illud ſit diſputatum, non ineſſe in his propriam, quæ nusquam alibi eſſet, veri ac certi notam: ADJUNGIT CLITOMACHUS: dupliciter dici ASSENSUS SUSTINERE Sapientem: uno modo, cum hoc intelligatur, omnino eum rei nulli aſſentiri: altero, cum ſe a reſpondendo, ut aut approbet quidpiam, aut improbet, ſuſtineat, neque negat aliquid, neque ajat. Id cum ita ſit: alterum placere, ut nunquam aſſentiatur; alterum tenere, ut ſequens probabilitatem, ubicunque hæc occurrat, aut deficiat, aut ETIAM, aut NON, reſpondere poſſit; nec ut placeat, eum qui de omnibus rebus contineat ſe ab aſſentiendo, moveri tamen, & agere aliquid, reliquit ejuſmodi viſa approbari, quibus ad actionem excitamur; item ea quæ interrogati in utramque partem reſpondere poſſumus, ſequentes tantum modo quod ita viſum ſit, dum SINE ASSENSU: neque tamen omnia ejuſmodi viſa approbari, ſed ea quæ nulla re impedirentur.* Acad. Qu. IV. 32.

(**) Πειθεσθαι καὶ πιθανὸν εἶναι μετὰ προσκλίσεως σφοδρᾶς, *Hypotyp.* Lib. I. c. 33.

XXI. Je ne ſçai ſi en examinant bien tout ce raiſonnement de Clitomachus, & même toutes les *Queſtions Academiques* de Ciceron, on ne ſe convaincra pas que ce ſont de pures Logomachies. Les Academiciens ne détruiſent pas le témoignage des ſens. Ils ne nient point qu'en regardant la craye, nous ne voyons la couleur blanche. Mais ils ne veulent pas qu'on donne à cela le nom de certain & de vrai, ils aiment mieux celui de probable. Pourquoi ? C'eſt parce qu'il pourroit être, que la blancheur, quoiqu'elle paroiſſe, n'exiſtât pas. Mais on peut éviter le même écueil par la ſimple circonſpection dans nos jugemens ; & ce moyen ſeul ſuffit pour nous guider dans la connoiſſance des choſes à un degré d'evidence, qui faſſe ſucceder la certitude à la probabilité. Il y a plus ; les choſes que nous comprenons, non par les ſens, mais par l'entendement, en les déduiſant des principes inébranlables de l'Ontologie & de la Métaphyſique, du principe de Contradiction, & de celui de la Raiſon ſuffiſante, des définitions exactes, & des propoſitions identiques ; ces choſes, dis-je, peuvent atteindre à un ſi haut degré de verité, qu'il ne reſte plus aucun lieu à l'equivoque & au doute. C'eſt ce que paroit avoir reconnu S. Auguſtin, qui ſe déclare redevable de pluſieurs connoiſſances à la Dialectique. „Par elle, *dit-il*, je connois nombre d'autres veri„tés. Mais qu'il eſt grand ce nombre ; comptez-les, ſi vous le pou„vez. S'il n'y a que quatre Elémens dans le monde, il n'y en a pas „cinq. S'il n'y a qu'un Soleil, il n'y en a pas deux. La même Ame „ne ſauroit être mortelle, & immortelle. L'homme ne ſauroit être „tout à la fois heureux & miſérable. Le Soleil n'eclaire pas le même „endroit, où la Nuit régne. Ou nous ſommes éveillés préſentement, „ou nous dormons. Ce que je crois voir eſt un corps, ou n'en eſt „pas un. C'eſt la Dialectique qui m'a appris que toutes ces choſes, „& bien d'autres qu'il ſeroit trop long de rapporter ici, ſont des Ve„rités, de quelque maniere que nos ſens ſoient diſpoſés. C'eſt d'elle „que je tiens, qu'en poſant l'antecedent de l'une des choſes, dont je „viens de montrer la liaiſon, le conſéquent en découle d'une manie„re

„re néceſſaire.“ (*) Ainſi raiſonne avec verité ce ſaint Docteur, en qui ſe trouvoient au même degré la pénétration de l'eſprit, & l'etenduë du ſavoir.

XXII. Mais, pour mieux nous aſſurer qu'il n'y avoit que Logomachie dans tout cela, écoutons encore Ciceron, qui porte ſon jugement en ces termes. „Pour moi, quoique je regarde comme un „trés grand effort, de ne pas tomber d'accord des choſes qui s'offrent „à nos ſens, de reſiſter aux opinions, & de ſuſpendre un acquieſcement auquel nous ſommes ſi portés; quoique je convienne avec „Clitomachus, que les travaux de Carneade peuvent être comparés à „ceux d'Hercule, en ce qu'il a delivré nos eſprits de l'acquieſcement, „c'eſt à dire, de celui qui eſt téméraire, & fonde ſur la ſimple opinion, „comme d'une bête feroce & cruelle: cependant, pour dire quelque „choſe en faveur du ſentiment oppoſé, qu'eſt-ce qui pourroit empêcher la détermination de celui qui ſuit les probabilités, lorsqu' aucune „difficulté ne les combat? Donc, de l'aveu de Clitomachus, Carneade condamnoit, non l'acquieſcement même, mais la temérité de „cet acquieſcement: il permettoit de ſuivre la probabilité, quand „rien n'y mettoit obſtacle. Et qui empêche encore que de telles „probabilités ne portent le nom de certitude & de verité? “ (**) On

(*) *Per iſtam novi alia multa vera. Sed quam multa ſint, numerare ſi poteſtis. Si quatuor in mundo elementa ſunt, non ſunt quinque. Si Sol unus eſt, non ſunt duo. Non poteſt una anima & mori, & eſſe immortalis. Non poteſt homo ſimul & beatus & miſer eſſe. Non hic & Sol lucet, & nox eſt. Aut vigilamus nunc, aut dormimus. Aut corpus eſt quod videre videor, aut non eſt corpus. Hæc & alia multa, quæ commemorare longiſſimum eſt, per Dialecticam didici vera eſſe, quomodo ſeſe habeant ſenſus noſtri. Ipſa porro docuit me, ſi cujus eorum quæ per connexionem modo propoſui pars antecedens aſſumta fuerit, trahere neceſſario id quod connexum eſt.* Auguſt. L. III. contr. Acad. §. 29.

(**) *Ego enim, etſi maximam actionem puto, repugnare viſis, obſiſtere opinionibus, aſſenſus lubricos ſuſtinere, credoque Clitomacho ita ſcribenti, Herculis quendam laborem exantlatum a Carneade, quod ut feram & immanem beluam, ſic ex animis noſtris aſſenſionem, id eſt, opinationem & temeritatem extraxiſſet: tamen ut ea pars defenſionis relinquatur, quid impedit actionem ejus qui probabilia ſequitur, nulla re impediente? Ergo, Clitomacho faciente, temeritatem aſſenſus ſuſtulerat Carneades, non aſſenſionem ipſam: aſſen-*

On trouve les mêmes idées dans ce paſſage des *Offices*. „Il y a des „gens doctes & éclairés; qui nous arrêtent ici pour nous demander, „ſi nous ſommes aſſez conſéquens, lors qu'en avançant d'un coté, que „rien ne peut être connu, nous ne laiſſons pas de l'autre de traitter „diverſes matieres, & de donner même des préceptes ſur nos devoirs. „Je voudrois que ces gens-là fuſſent bien au fait de notre ſentiment. „Nous ne ſommes aſſurément pas de ceux dont l'eſprit ſe repaît vo„lontairement d'erreur, & n'a jamais aucun principe qu'il daigne ſui„vre. Quel étrange caractere n'eſt-ce pas que celui-là, & quelle vie „qu'une vie paſſée ſans raiſonnement, & même ſans principes de con„duite? Pour nous, au lieu de dire avec les autres, qu'il y a des cho„ſes certaines, & qu'il y en a d'incertaines, nous nous en éloignons, „en nous bornant à reconnoitre des choſes qui ſont probables, & „d'autres qui ne le ſont pas. Qu'eſt-ce donc qui pourroit m'empêcher „de ſuivre les choſes, qui me paroiſſent probables, & de déſaprouver „celles qui leur ſont contraires. Par ce moyen j'evite également l'or„gueil des déciſions, & cette temerité legere, qui eſt fort differente „de la ſageſſe. " (*)

XXIII, Au reſte Clitomachus, bien qu' Auditeur aſſidu de Carneade, ne paroit pas avoir ſuivi ſon Maitre en tout; & cela paroit évidem-

aſſentiendum erat probabili, nulla re impediente. Quid autem obſtat quominus ejuſmodi probabile nomine certi ac veri appellatur. Acad. Quæſt. IV. 34.

(*) *Occurritur autem nobis, & quidem a doctis & eruditis quærentibus, ſatisne conſtanter facere videamur, qui cum percipi nihil poſſe dicamus, tamen & aliis de rebus differere ſoleamus, & hoc ipſo tempore præcepta officii perſequamur. Quibus nullem ſatis cognita eſſet noſtra ſententia. Non enim ſumus ii, quorum vagetur animus errore, nec habeat unquam quid ſequatur. Quæ enim eſſet iſta mens, vel quæ vita potius, non modo diſputandi, ſed vivendi ratione ſublata? Nos autem ut cæteri alia certa, alia incerta eſſe dicunt, ſic ab his diſſentientes, alia probabilia, contra alia non probabilia eſſe dicimus. Quid eſt igitur quod me impediat, ea quæ mihi probabilia videantur ſequi, quæ contra improbare, atque affirmandi arrogantiam vitantem, fugere temeritatem, quæ a ſapiente diſſidet plurimum.* De Offic. II. 2.

démment par ce paſſage de Ciceron : „Il étoit permis de former des „opinions, ſans les fonder ſur aucune connoiſſance ; & l'on dit que „Carneade l'a prouvé. Pour moi, je m'en rapporte plus à Clitoma„chus, qu'à Philon & à Métrodore, & je crois que Carneade à plutot „diſcouru ſur ce ſujet, qu'il ne l'a prouvé." (*) Et ailleurs ; „Du„quel (il s'agit de *Callipbon*, qui regardoit * l'agreable & l'honnête „comme la derniere fin). Carneade apportoit tant de ſoin à „défendre le ſentiment, qu'il ſembloit le prouver. Malgré cela „Clitomachus aſſuroit, qu'il n'avoit jamais bien pu découvrir, quelles „étoient les veritables idées de Carneade." (**) Mais, pour mettre des bornes à ce Memoire, nous croyons avoir ſuffiſament montré, qu'il y avoit pluſieurs raiſons de cette *incertitude*, dans laquelle les Academiciens ſembloient ſe plaire à flotter. Car, ou bien ils ſoutenoient le pour & le contre, pour cacher leur ſentiment ; ou ils ſe propoſoient de confondre la vanité des Sophiſtes & des Stoïciens ; ou ils vouloient faire parade de leur érudition & de leur eſprit ; ou enfin ils étoient tombés dans cette incertitude, pour avoir négligé les veritables régles de la Dialectique & de la Logique, pour n'avoir pas aſſez obſervé la difference qu'il y a entre les divers objets de nos connoiſſances, & pour avoir ſurtout ignoré ces grands Principes de Metaphyſique, qui donnent une force irréſiſtible à la verité. A moins qu'on n'aime mieux faire de toute cette diſpute Philoſophique une ſimple Logomachie, ou auſſi la prendre dans un ſens favorable, & lui donner la meilleure interprétation, dont elle ſoit ſuſceptible. Quoiqu'il en ſoit, c'eſt en vain que la cohorte des Sceptiques, ou amis du doute, provoque à l'Academie ; & les efforts de ſavant Evêque d'Avranches, dans ſon Traitté *de la foibleſſe de l'eſprit humain*, ſont

* *Acad. Qu.* IV. 42.

(*) *Licebat nihil percipere, & tamen opinari : quod a Carneade dicitur probatum. Equidem Clitomacho, plusquam Philoni, aut Metrodoro credens, hoc magis ab eo diſputatum quam probatum puto.* Acad. Qu. IV. 24.

(**) *Cujus* (Calliphontis) *ſententiam Carneades ita ſtudioſe defenſitabat, ut eam probare etiam videretur. Quanquam Clitomachus affirmabat, nunquam intelligere ſe potuiſſe, quid Carneadi probaretur.* Ibid. 45.

ſont inutiles, pour établir, comme il le prétend, que la ſeule Raiſon ne ſauroit donner une connoiſſance certaine de la verité, s'appuyant ſur le témoignage de notre *Clitomachus*, & regrettant la perte de ſon Ouvrage ſur la ſuſpenſion du jugement. Nous la regrettons auſſi, bien perſuadés qu'il ſerviroit de preuve à notre doctrine, & non à celle de Mr. *Huet*. Le ſavant Profeſſeur de Zurich, Mr. *Zimmermann*, a d'ailleurs pleinement ſatisfait à toutes les difficultés de Mr. *Huet*, dans ſa troiſieme Diſſertation contre les Incredules, publiée en 1741.

REFLEXIONS
SUR L'ESPACE ET LE TEMS,
PAR M. EULER.

I.

Les principes de la Mecanique ſont déjà ſi ſolidement établis, qu'on auroit grand tort, ſi l'on vouloit encore douter de leur verité. Quand même on ne ſeroit pas en état de les démontrer par les principes généraux de la Metaphyſique, le merveilleux accord de toutes les concluſions, qu'on en tire par le moyen du calcul, avec tous les mouvemens des corps tant ſolides que fluides ſur la terre, & même avec les mouvemens des corps celeſtes, ſeroit ſuffiſant pour mettre leur verité hors de doute. C'eſt donc une verité inconteſtable, qu'un corps étant une fois en repos reſtera perpetuellement en repos, à moins qu'il ne ſoit troublé dans cet état par quelques forces étrangéres. Il ſera de même certain, qu'un corps étant une fois mis en mouvement, le continuera perpetuellement avec la même viteſſe & ſelon la même direction, pourvuqu'il ne rencontre des obſtacles contraires à la conſervation de cet état.

II. Ces deux verités étant ſi indubitablement conſtatées, il faut abſolument qu'elles ſoient fondées dans la nature des corps : & comme c'eſt la Metaphyſique, qui s'occupe à rechercher la nature & les proprietés des corps, la connoiſſance de ces verités pourra ſervir de guide dans ces recherches épineuſes. Car on ſera en droit de rejet-

ter

ter dans cette ſcience tous les raiſonnemens & toutes les idées, quelques fondées qu'elles puiſſent paroitre d'ailleurs, qui conduiſent à des concluſions contraires à ces verités ; & on ſera autoriſé de n'y admettre, que de tels principes, qui pourront ſubſiſter avec ces mêmes verités. Les premieres idées, que nous nous formons des choſes, qui ſe trouvent hors de nous, ſont ordinairement ſi obſcures & ſi peu déterminées, qu'il eſt extrémement dangereux d'en tirer des conſéquences, dont on puiſſe être aſſeuré. C'eſt donc toujours une grande avance, quand on connoit déjà d'ailleurs quelques concluſions, auxquelles les premiers principes de la Metaphyſique doivent aboutir : & ce ſera ſur ces concluſions, qu'il faudra régler & déterminer les premieres idées de la Metaphyſique.

III. Auſſi les Metaphyſiciens, bien loin de nier ces principes de la verité desquels la Mecanique nous aſſure, ils tâchent plutot de les déduire & de les démontrer par leurs idées. Mais ils reprochent aux Mathematiciens, qu'ils attachent ces principes mal à propos à des idées de l'espace & du tems, qui n'etoient qu' imaginaires & deſtituées de toute realité. Il eſt bien poſſible, qu'un vrai principe, ſans qu'il perde rien de ſa verité, peut-être enoncé d'une maniere incommode, & qui ne répond pas aux idées préciſes qu'on doit avoir des choſes ; mais alors le Metaphyſicien ſera obligé de remedier à ce défaut, & de ſubſtituer dans l'énonciation de ces principes des idées réélles au lieu des imaginaires.

IV. Ce ſera donc le cas de ces principes de la Mecanique, qui ſe trouvent enveloppés dans les idées de l'eſpace & du tems, qui ſuivant les Metaphyſiciens n'ont aucune realité : donc il faudra voir, s'il eſt poſſible d'en retrancher ces idées imaginaires, & de ſubſtituer à leurs places les idées réélles, dont nous nous ſommes formés par voie d'abſtraction ces idées imaginaires : de ſorte pourtant que le ſens & la force de ces principes n'en ſoit point alterée. Car il n'y a aucun doute, que les corps, en ſe réglant ſur ces principes, ne ſe réglent point ſur des choſes, qui ne ſubſiſtent que dans notre imagination : il eſt plutôt certain, que ce ſont des choſes bien réélles,

auxquelles ſe rapportent les loix, que les corps ſuivent dans la conſervation de leur état.

V. Il eſt donc certain, que s'il n'etoit pas poſſible de concevoir les deux principes allegués de la Mecanique, ſans y mêler les idées de l'eſpace & du tems, ce ſeroit une marque ſure, que ces idées n'étoient pas purement imaginaires, comme les Metaphyſiciens le prétendent. On en devroit plutot conclure, que tant l'eſpace abſolu, que le tems, tels que les Mathematiciens ſe les figurent, étoient des choſes réélles, qui ſubſiſtent même hors de notre imagination: puisqu'il ſeroit abſurde de ſoutenir, que des pures imaginations pouvoient ſervir de fondement à des principes réels de la Mecanique.

VI. Pour entrer dans cette recherche, je commencerai par le premier principe qui régarde l'etat de repos des corps. Dans la Mecanique on regarde l'eſpace & le lieu comme des choſes réélles, & par ce principe on ſoutient, qu'un corps, qui ſe trouve en quelque lieu ſans mouvement, y demeurera perpetuellement, à moins qu'il n'en ſoit chaſſé par quelque force étrangère: dans ce cas donc ce corps demeurera toujours dans le même lieu par rapport à l'eſpace abſolu. Je veux bien que les idées de l'espace & du lieu ne ſoient que des notions imaginaires; mais qu'on m'indique les realités, ſur lesquelles les corps ſe réglent en obéiſſant à cette loi; & au lieu desquelles les Mathematiciens ſe contentent de ſe ſervir des idées imaginaires de l'eſpace & du lieu.

VII. On me dira d'abord, que le lieu n'eſt autre choſe que la rélation d'un corps par rapport aux autres qui l'environnent. Subſtituons donc cette idée à la place de celle du lieu, & on ſera obligé de dire, qu'en vertu de ce principe un corps ſe trouvant une fois dans une certaine rélation avec les autres corps, qui l'environnent, il s'obſtinera de demeurer toujours dans cette même rélation. C'eſt à dire, on doit ſoutenir qu'un corps Aétant environné des corps B, C, D, E &c. tâchera de ſe conſerver perpetuellement dans ce même voiſinage. Et partant quand le Mathematicien dit, qu'un corps en repos reſte dans le même lieu, par rapport à l'eſpace abſolu: le Metaphyſicien dira, que ce

corps

corps ſe conſerve dans la même relation par rapport aux autres corps qui l'environnent.

VIII. Voyons ſi ces deux manieres de s'exprimer ſont équivalentes, & ſi l'on peut toujours, ſans tomber en erreur, ſubſtituer l'expreſſion metaphyſique au lieu de la mathematique, de la verité de laquelle nous ſommes déjà convaincus. Suppoſons donc, pour mettre d'accord ces deux expreſſions, que tant le corps A, que ſes voiſins B, C, D, E &c. ſoient en repos ; & dans ce cas le corps A en ſe conſervant dans le même voiſinage des corps B, C, D, E &c. ſelon la régle metaphyſique, demeurera auſſi dans le même lieu ſelon la régle mathematique ; & dans ce cas on ne ſe trompera pas en ſubſtituant celle-là au lieu de celle-cy.

IX. Suppoſons, pour mieux fixer nos idées, que le corps A eſt dans une eau dormante, & pendant qu'il demeure au même lieu, il demeurera auſſi dans le même voiſinage des particules d'eau, qui l'environnent, & ce corps ſe réglera également ſur la régle de mathematique que ſur celle de metaphyſique. Mais ſuppoſons à préſent, que l'eau commence à couler, & ſelon la régle de mathematique le corps reſtera neantmoins dans le même lieu, à moins qu'il ne ſoit entrainé peu à peu par la force de l'eau. Or ſelon la régle metaphyſique ce corps devroit d'abord ſuivre parfaitement le mouvement de l'eau, pour ſe conſerver dans le voiſinage des mêmes particules de l'eau, qui l'avoient environné auparavant. Dans ce cas donc la régle tirée de la Methaphyſique ne ſera plus conforme à la verité.

X. Conſultons là-deſſus l'experience, laquelle nous apprendra, qu'un corps ayant été en repos dans une eau dormante, ſera mis en mouvement, dés que l'eau commence à couler, ce qui ſemble favoriſer la régle conçue metaphyſiquement. Mais la Mecanique nous fait voir trés clairement, que le corps ne ſuit pas le courant d'eau, qu'entant qu'il eſt frappé par les particules de l'eau ; & que c'eſt par conſequent une force étrangere qui met ce corps en mouvement. Donc ſans cette force le corps reſteroit auſſi bien en repos, dans l'eau courante, que dans la dormante, & partant le corps dans la conſervation de ſon état de repos ne ſe régle point ſur les corps, qui l'environ-

vironnent immediatement. De là il s'enſuit, que ce qui eſt nommé *lieu* dans la Mecanique ne ſouffre pas l'explication de la Metaphyſique, par laquelle on veut, que le lieu ne ſoit autre choſe, que la rélation du corps par rapport aux autres corps, qui l'environnent.

XI. A cette qualité des corps, en vertu de laquelle ils tâchent de ſe conſerver dans leur état, tant de repos que de mouvement, on donne le nom *d'Inertie*. Donc cette *Inertie*, comme nous venons de voir, ne ſe régle point ſur les corps voiſins; mais il eſt bien ſur, qu'elle ſe régle ſur l'idée du lieu, que les Mathematiciens regardent comme réelle; & les Metaphyſiciens comme imaginaire. N'étant donc pas permis de ſubſtituer à la place de cette idée du *lieu*, la rélation du corps aux corps circonvoiſins, il ne reſte que les corps éloignés, par rapport auxquels on puiſſe juger de ce principe général de l'inertie. Mais je doute fort, que les Metaphyſiciens voudront hazarder de ſoutenir, que les corps en vertu de leur inertie ſoient diſpoſés de conſerver la même rélation par rapport aux corps, qui en ſont éloignés à quelque diſtance: car il ſeroit aiſé de faire voir la fauſſeté de cette explication par de ſemblables réflexions, que je viens de faire ſur les corps immediatement voiſins.

XII. S'ils diſoient que c'etoit par rapport aux étoiles fixes, qu'il faloit expliquer le principe de l'inertie: il ſeroit bien difficile de les réfuter, vuque les étoiles fixes, étant elles mêmes en repos, ſont ſi éloignées de nous, que les corps qui ſe trouvent en répos par rapport à l'eſpace abſolu, comm'on le regarde dans la Mathematique, le ſeroient auſſi par rapport aux étoiles fixes. Mais outre cela que ce ſeroit une propoſition bien étrange & contraire à quantité d'autres dogmes de la Metaphyſique, de dire, que les étoiles fixes dirigent les corps dans leur inertie; cette régle ſe trouveroit également fauſſe, s'il nous étoit permis d'en faire l'application aux corps qui ſont proches de quelque étoile fixe. Ces choſes remarquées, il ne reſte plus des idées réélles, qu'on pourroit ſubſtituer à la place de ces idées prétendues imaginaires de l'eſpace & du lieu, dans l'explication de l'*Inertie*.

XIII. Nous voyons donc que l'idée du lieu, telle que les Mathematiciens la conçoivent, ne peut être expliquée par aucune rélation

aux

aux autres corps ni voiſins, ni eloignés, & partant les notions metaphyſiques, qu'on croit répondre à l'idée mathematique du lieu, ne ſont pas propres pour être introduites dans l'explication du principe mecanique dont il s'agit. C. à d. la conſervation de l'état des corps ſe régle ſur le lieu, tel qu'on le conçoit dans la Mathematique, & point du tout ſur le rapport aux autres corps. Or on ne ſauroit dire, que ce principe de Mecanique ſoit fondé ſur une choſe, qui ne ſubſiſte que dans notre imagination: & de là il faut conclure abſolument, que l'idée mathematique du lieu n'eſt pas imaginaire, mais qu'il y a quelque choſe de réel au monde, qui répond à cette idée. Il y a donc au monde, outre les corps qui le conſtituent, quelque réalité, que nous nous repreſentons par l'idée du lieu.

XIV. Les Metaphyſiciens ont donc tort, quand ils veulent bannir entierement du monde l'eſpace & le lieu, en ſoutenant que ce ne ſont que des idées abſtraites & imaginaires. Par conſequent les preuves qu'ils apportent pour maintenir leur ſentiment, quelques fortes qu'elles puiſſent paroitre, feront en effet mal fondées, & il faut qu'il y ſoit caché quelque paralogiſme. Il eſt vrai que les ſens ne ſont pas capables de nous fournir les idées de l'eſpace & du lieu, & que ce n'eſt que par réflexion, que nous nous formons ces idées. De là ils concluënt que ce ne ſont que des idées abſtraites, ſemblables aux idées des genres & des eſpeces, qui n'exiſtent que dans notre entendement, & auxquelles il ne répond aucun objet réel. Mais il me ſemble que cette concluſion eſt précipitée: car pour peu qu'on réfléchiſſe à ſoi même, on s'appercevra aiſement, que la maniere, dont on parvient à l'idée de l'eſpace & du lieu, eſt bien differente de celle, dont nous nous formons les idées des genres & des eſpeces. Et on ſe tromperoit fort, ſi l'on vouloit ſoutenir, qu'il n'exiſte pas des choſes, dont nous n'avons d'autres idées que par réflexion.

XV. Je ſuis d'accord que toutes les choſes qui exiſtent, ſont parfaitement determinées; &, ſi nous retranchons de l'idée d'un tel objet, une ou quelques déterminations, qu'il en nait une idee générique, à laquelle il ne répond plus d'objet exiſtant. C'eſt ainſi que nous nous formons l'idée de l'étenduë en général, en retranchant des

idées de ſ corps toutes les déterminations, hormis l'etenduë. Mais l'idée du lieu qu'un corps occupe, ne ſe forme pas en retranchant quelques déterminations du corps ; elle réſulte en ôtant le corps tout entier ; de ſorte que le lieu n'ait pas été une détermination du corps, puiſqu'il reſte encore, aprés avoir enlevé le corps tout entier avec toutes ſes quantités. Car il faut remarquer, que le lieu qu'un corps occupe eſt bien different de ſon étenduë, parce que l'étenduë apartient au corps, & paſſe avec lui par le mouvement d'un lieu à l'autre ; au lieu que le lieu & l'eſpace ne ſont ſuſceptibles d'aucun mouvement.

XVI. Je ne veux pas entrer dans la diſcuſſion des objections, qu'on fait contre la réalité de l'eſpace & du lieu ; car ayant démontré, que cette réalité ne peut plus être revoquée en doute, il s'enſuit néceſſairement, que toutes ces objections doivent être peu ſolides ; quand même nous ne ſerions pas en état d'y répondre. Si l'on croit abſurde, que tous les differents lieux, ou parties de l'eſpace, ſoient ſemblables entr'eux, ce qui ſeroit contraire au principe des indiſcernibles ; je ne ſai pas ſi ce principe eſt ſi général, qu'on penſe ; peut-être qu'il n'eſt applicable qu' aux corps & aux eſprits ; généralité, dont on pourroit bien être content : mais comme l'eſpace & le lieu ſont des choſes ſi eſſentiellement differentes des eſprits & des corps, on n'en ſauroit juger par les mêmes principes.

XVII. La réalité de l'eſpace ſe trouvera encore établie par l'autre principe de la Mecanique, qui renferme la conſervation du mouvement uniforme ſelon la même direction. Car ſi l'eſpace & le lieu n'étoient que le rapport des corps coëxiſtans, qu'eſt-ce que ſeroit la même direction ? On ſera bien embarraſſé d'en donner une idée, par la ſeule rélation mutuelle des corps coëxiſtans, ſans y faire entrer celle de l'eſpace immobile. Car de quelque maniere, que les corps ſe meuvent & changent de ſituation entr'eux, cela n'empeche pas, qu'on ne conſerve une idée aſſés claire d'une direction fixe que les corps tâchent de ſuivre dans leur mouvement, malgré tous les changemens, que les autres corps ſubiſſent. D'où il eſt evident, que l'identité de direction, qui eſt une circonſtance fort eſſentielle dans les principes généraux du mouvement, ne ſauroit abſolument être expliquée

pliquée par la rélation, ou l'ordre des corps coëxiſtants. Donc il faut qu'il y ait encore quelque autre choſe de réél, outre les corps, à laquelle ſe rapporte l'idée d'une même direction; & il n'y a aucun doute, que ce ne ſoit l'eſpace, dont nous venons d'etablir la réalité.

XVIII. Les idées de l'eſpace & du tems ont presque toujours eu le même ſort, de ſorte que ceux qui ont nié la réalité de l'un, ont auſſi nié celle de l'autre, & réciproquement. On ne ſera pas donc ſurpris, qu'en établiſſant la réalité de l'eſpace, nous reconnoiſſons auſſi le tems, comme quelque choſe de réel, qui ne ſubſiſte pas ſeulement dans notre eſprit, mais qui coule réellement en ſervant de meſure à la durée des choſes. Nous avons une idée trés claire du tems, & je conviens, que nous nous la formons des ſucceſſions des changemens, que nous remarquons: dans cette vuë je tombe d'accord, que l'idée du tems n'exiſte que dans notre imagination. Mais on a lieu de demander, ſi l'idée du tems, & le tems même, ne ſont pas des choſes differentes entr'elles? & il me ſemble, que les Metaphyſiciens, en détruiſant la réalité du tems, ont confondu le tems même avec l'idée que nous en avons.

XIX. Le Principe du mouvement des corps, en vertu duquel un corps mis en mouvement le doit continuër avec la même viteſſe ſelon la même direction, ce principe, dis-je, nous fournit de nouvelles preuves, non ſeulement pour la réalité de l'eſpace, mais auſſi pour celle du tems. Car, puisque le mouvement uniforme décrit des eſpaces égaux en tems égaux, je demande premierement, qu'eſt-ce que c'eſt des eſpaces egaux, ſuivant le ſentiment de ceux qui nient la réalité de l'eſpace? Je doute fort, que les Metaphyſiciens ſe hazarderont de dire, que l'egalité des eſpaces ſe doit juger par l'egalité du nombre des monades, qui les rempliſſent: car ils devroient ſoutenir, que les monades fuſſent également diſperſées par tous les corps. Mais quand même ils voudroient ſe tenir à cette explication; elle ſeroit renverſée dés le moment, qu'on

conſidéreroit en mouvement les corps, par rapport auxquels on voudroit déterminer l'egalité des eſpaces. Car nous concevons, & le principe du mouvement nous apprend, que lorqu'un corps parcourt des eſpaces égaux, l'egalité des eſpaces ne dépend nullement des autres corps, qui l'environnent, & qu'elle demeure la même, à quelques changemens que ſoient expoſés les autres corps.

XX. Il en eſt de même de l'égalité des tems; car ſi le tems n'eſt autre choſe, comme on veut dans la Metaphyſique, que l'ordre des ſucceſſions; de quelle maniere rendra-t-on intelligible l'égalité des tems? On prétend que chaque être du monde eſt aſſujetti à des changemens continuels, & que c'eſt la ſucceſſion de ces changemens, qui cauſe le tems. Suivant cette explication deux tems devroient être égaux, pendant leſquels arriveroit le même nombre de ſucceſſions. Mais ſi l'on conſidére un corps, qui parcourt des eſpaces égaux en tems égaux, de quels changemens, ou de quel corps, faut-il juger de l'egalité de ces deux tems là? Ou veut on, que tous les corps ſoient aſſujettis à des changemens également fréquents, de ſorte qu'il reviendroit au même quel corps qu'on voudroit choiſir, pour meſurer l'égalité des tems ſur le nombre des changemens, qui y arrivent. Mais je ſuis ſûr, que pour peu qu'on peſera cette explication, on y trouvera tant d'autres inconvenients, qu'on s'aviſera aiſément de l'abandonner.

XXI. Il ne s'agit pas ici de notre eſtime de l'egalité des tems, qui dépend ſans doute de l'etat de notre ame: il s'agit de l'égalité des tems, pendant leſquels un corps qui ſe meut d'un mouvement uniforme parcourt des eſpaces égaux. Comme cette égalité ne ſauroit être expliquée par l'ordre des ſucceſſions, auſſi peu que l'égalité des eſpaces par l'ordre des coëxiſtants, & qu'elle entre eſſentiellement dans le principe du mouvement; on ne pourra pas dire, que les corps, en pourſuivant leur mouvement ſe réglent ſur une choſe,

qui

qui ne ſubſiſte que dans notre imagination. On ſera donc obligé d'avouër, comme on l'a été par rapport à l'eſpace, que le tems eſt quelque choſe, qui ſubſiſte hors de notre eſprit, ou que le tems eſt quelque choſe de réel, auſſi bien que l'eſpace. Je m'adreſſe ici à ces Metaphyſiciens qui reconnoiſſent encore quelque réalité dans les corps & dans le mouvement; car pour ceux qui nient abſolument cette réalité, & qui n'accordent que des phenomenes, puisqu' ils regardent, tant le mouvement même, que les loix du mouvement, comme des chimeres; je ne me flatte pas que ces réflexions faſſent la moindre impreſſion ſur leur eſprit.

REFLEXIONS
SUR LA LIBERTE,
PAR M. FORMEY.

Les matieres les plus rebattuës ne ſont pas toujours celles qui ont été dévelopées avec le plus de préciſion. Les mêmes preuves paſſent ſouvent de bouche en bouche, ſe répetent & s'écrivent une infinité de fois, ſans aquerir plus de diſtinction & de force. Et lors qu'il s'agit de queſtions ſur leſquelles on eſt partagé, chaque parti ſe ſert des raiſonnemens qui ſont une fois en uſage, ſans penſer à les examiner, à les rectifier, s'ils en ont beſoin, ou du moins à en augmenter la force, en pouſſant plus loin l'analyſe des idées qu'ils renferment, & des principes ſur leſquels ils ſe fondent. De là l'impoſſibilité de terminer les Diſputes: l'erreur s'enveloppant toujours dans ſes obſcurités, & la bonne cauſe n'etant pas accompagnée d'un éclat aſſez vif pour les diſſiper.

Les remarques que je viens de faire me ſont venuës dans l'eſprit en méditant ſur la liberté, & en paſſant en revüe le nombre infini de diſcuſſions, qui ont eu pour objet cette fameuſe Queſtion. Je n'ai pas deſſein de la traitter dans toute ſon etenduë; un de nos dignes Confréres s'etoit propoſé cette tâche, * & ſi les circonſtances lui avoient permis de la remplir, il auroit été ſuperflu de vous entretenir de mes Réfléxions. Leur principal but, pour vous le faire connoitre

* Voy. *Hiſt.* de l'Année 1745. pag. 91.

noitre d'avance, ſera de juſtifier la neceſſité indiſpenſable de l'exiſtence des motifs dans toutes les déterminations de notre Liberté, & d'expliquer, avec toute la netteté dont je ſuis capable, leur influence & leur efficace.

Que l'Homme ait le pouvoir de faire, ou de ne pas faire, certaines actions dans certaines occaſions, c'eſt ce qui eſt généralement avoüé. Cette notion commune ſert de fondement au plan de la Societé. Les Legislateurs de toutes les Nations n'ont rien ſtatué que conſéquemment à ce Principe. Il n'eſt aucune Loi ancienne ou moderne, qui inflige des peines à un homme qui commet un meurtre dans un accés de délire, dans un tranſport de fievre chaude, tandis qu'il n'eſt point de Loi, qui ne condamne ſévérement tout meurtrier, qui a eu l'uſage des ſens & de la Raiſon.

Il n'en faut pas davantage pour faire abjurer le ſentiment de *Collins*, & de tous ceux qui croyent avec lui que la détermination de nos actions eſt d'une néceſſité abſoluë; que, quand nous prenons un parti, il étoit impoſſible, dans toute la force de ce terme, que nous en priſſions un autre, & que notre apparence de liberté conſiſte en ce que nous portons quelquefois de bon gré les fers dont la Fatalité nous charge. Dans cette Hypotheſe, il faut renoncer aux notions les plus évidentes de notre eſprit. Il faut trouver auſſi valables les raiſons d'un déteſtable parricide, qui aura volontairement trempé ſes mains dans le ſang de ſon Pére, que celle d'un phrénetique, qui aura commis le même crime dans l'état d'alienation. Il faut, comme nous le ferons voir dans la ſuite, ſapper tous les Axiomes, ſur leſquels les Philoſophes & les Geometres ont établi leurs Démonſtrations. Il faut regarder comme illuſoires ces idées que tous ceux qui penſent, les ſavans auſſi bien que les ignorans, ont conſtamment adoptées; c'eſt que telle perſonne qui s'eſt attiré le blâme univerſel, qui s'eſt même couvert d'opprobre & d'infamie, auroit pu ſuivre une autre route, faire uſage de ſes talens, & aquerir les ſuffrages de ceux qui la déteſtent. Oüi: ſi la neceſſité abſolüe régne ſur nos actions, le tiſſu de celles qui forment la vie de *Cartouche* étoit auſſi eſſentiel à ce fameux Voleur, que l'egalité des trois angles à deux droits l'eſt à un triangle.

angle. En un mot, il faut nous desavouër nous mêmes, pour acquieſcer à cette ſuppoſition.

Voulez-vous que laiſſant les Philoſophes, qui ont peut être l'eſprit imbu de préjugés, & qui ſeront ſuſpects pour s'être paſſionnés dans cette quérelle, nous interrogions quelque témoin impartial, qui n'ait ſurement jamais ouï parler de *Collins*, ou de *Spinoſa*, ni de leurs Réfutateurs. Qu'on interroge un enfant de ſept à huit ans, qui vaincu par quelque petite tentation proportionnée à ſon age, ait fait une action qu'il ſait lui avoir été défendüe, & dont il craint le châtiment? Lui viendra-t-il jamais dans l'eſprit d'alleguer pour ſa défenſe qu'il n'a pas pu faire autrement, qu'il lui étoit impoſſible d'eviter cette action. Il ſe gardera bien d'employer une défaite, dont il ſent que la foibleſſe & la fauſſeté redoubleroient la colere de ſes parens, & aggraveroient ſa peine. Mais, eſſayez de menacer cet enfant qu'il ſera puni pour n'avoir pas lu & appris ſa leçon, pendant que vous l'aviez renfermé dans l'obſcurité, ou pour n'avoir pas pris une leçon de Danſe, dans l'extrême accablement d'une maladie qui le prive de toutes ſes forces; vos menaces lui paroitront ſouverainement injuſtes, & ſi elles étoient ſuivies de l'effet, il vous regarderoit comme un vrai Tyran.

C'eſt en faiſant ces Obſervations, fondées ſur une Experience journaliere, que les anciens Philoſophes eux-mêmes ſe ſont fait les idées ſuivantes ſur la Liberté. L'Homme, en qualité d'animal raiſonnable, agit avec connoiſſance de cauſe, il a des vües, des deſſeins. Quoique les objets qui frappent ſes ſens, occaſionnent ſouvent les déterminations de ſa volonté, elles partent pourtant d'un principe qui eſt en lui-même. Il n'eſt aucune force majeure qui puiſſe obliger l'homme à envisager comme bonne, une choſe que le *dictamen* de ſon Entendement déclare mauvaiſe. L'Entendement préſente donc les motifs à la Volonté, mais ces motifs ne lui font aucune violence, ils ne l'aſſujettiſſent à aucune contrainte. Preuve de cela, c'eſt qu'on peut reſiſter aux motifs les plus puiſſants, & qu'on y réſiſte effectivement, qu'on change de vües & de deſſeins, qu'on ſe détermine en diverſes manieres, & qu'en un mot, de tous les êtres bornés, l'homme

eſt

eſt le plus ſujet aux variations & aux changemens. Donc les motifs ne font pas ſur l'ame l'effet que produit ſur le corps l'impulſion, cauſe étrangere qui agit aveuglément, & à laquelle le corps n'a pas le choix de ceder ou de réſiſter.

On parvient par le moyen de ces raiſonnemens à ſaiſir la difference réelle qui ſe trouve entre les diverſes ſortes de neceſſités. La *Neceſſité abſolüe*, Metaphyſique, Geometrique, c'eſt celle qui découle de l'idée, de l'eſſence, de la poſſibilité intrinſeque du ſujet auquel elle convient. La *Néceſſité hypothetique*, eſt celle qui ſuppoſe d'autres déterminations, que celle de l'eſſence, des déterminations, qui pourroient être, ou ne pas être, ſans que le ſujet ceſſât de conſerver ſon eſſence. On peut la conſiderer ſous deux faces. La premiere ſe nomme *Neceſſité Phyſique*, & conſiſte dans l'invariabilité des effets que produiſent les Corps par leurs actions, & par leurs réactions, conformément au plan du Monde actuel. L'autre, qui eſt dite *Neceſſité Morale*, convient aux Etres intelligens, & procede de l'impreſſion que font ſur eux les motifs, par leſquels ils ſont déterminés.

Tous les hommes du Monde peuvent être pris à témoin de ce que nous avançons : ils ont tous les ſemences, pour ainſi dire, de ces notions & de ces diſtinctions. Mais comme l'Ontologie naturelle ne va jamais fort loin, ils retombent aiſement dans la confuſion entre ces diverſes ſortes de Neceſſite, & ſur tout entre les deux principales, la Neceſſité abſoluë, & la Neceſſité relative, ou conditionelle, quoiqu'elles different autant entr'elles que le jour & la nuit.

Comme il importe infiniment de bien connoitre cette difference, pour juger des queſtions qui ont été mües ſur la matiere que je traitte, je vais m'arrêter un moment à la développer. Il n'y a que deux manieres de conſiderer les choſes, *abſolument*, & *hypothetiquement*. La premiere a lieu, lorſque nous nous bornons à enviſager leur eſſence, ou leur définition, qui en tient la place : & qu'ainſi n'affirmant que ce qui eſt contenu dans cette eſſence, ou dans cette définition, nous n'y ſuppoſons rien au delà. La

ſeconde maniere exiſte, dés que nous ajoutons à l'eſſence d'autres déterminations, qui n'en ſont pas partie, & qui n'en ſont pas même une ſuite néceſſaire, mais dans leſquelles ſeulement il n'y a aucune répugnance avec l'eſſence du ſujet. Ces déterminations n'exiſtent qu' hypothetiquement, & ſous une condition donnée. De là vient la difference qu'on fait en Logique entre *prædicata abſoluta, & conditionata.*

Or c'eſt dans cette diſtinction que ſe trouve la ſource des deux ſortes de Néceſſités. Ce qui, conſideré abſolument & en ſoi, eſt tel que le contraire eſt impoſſible, & implique contradiction, s'appelle *abſolument néceſſaire :* au lieu que ce dont le contraire n'eſt impoſſible & contradictoire qu'à cauſe d'une condition donnée, a ſimplement une *neceſſité hypothetique.* Cela poſé, il eſt evident que la néceſſité abſoluë n'appartient qu'aux eſſences des choſes, & aux attributs qui ont leur raiſon ſuffiſante dans cette eſſence. De là vient l'immutabilité & l'eternité qu'on leur attribuë avec raiſon. Ceux qui ont cru cette doctrine dangereuſe, étoient encore imbus de l'ancienne doctrine Scolaſtique, ſuivant laquelle l'exiſtence appartient à l'eſſence, & entre dans ſa notion. Ces deux choſes ſont néanmoins tout à fait differentes, & il faut ſoigneuſement les diſtinguer. L'eſſence ne va pas au delà de la poſſibilité, ou plutot, c'eſt la poſſibilité même. Or cette poſſibilité ſéparée de l'exiſtence eſt abſolument néceſſaire : ce qui eſt une fois poſſible, l'a été, & le ſera toujours, dans ſa notion abſtraite. Mais, pour faire paſſer ce poſſible à l'exiſtence, il faut quelque choſe de plus que la poſſibilité, il faut ſuppoſer un principe, une cauſe, une raiſon ſuffiſante ; & par conſéquent cette exiſtence eſt purement hypothetique, ou contingente.

Les exemples les plus familiers peuvent répandre du jour ſur la doctrine de la double Neceſſité. Dans l'idée que je me fais d'un animal quelconque, il entre celle de quelques organes, par leſquels cet Animal eſt tellement caracteriſé, qu'il ne peut être confondu, ni avec les êtres inanimés, ni avec les plantes, ni même avec les Animaux, dont l'eſpece differe de la ſienne. Ces organes appartiennent tellement à l'idée que vous vous en faites, qu'en les ôtant, l'i-

dée

dée même s'evanouït. C'eſt donc en cela que conſiſte ſon eſſence, & c'eſt de là que découle la néceſſité abſolüe de cette eſſence. Par la même raiſon tout ce qu'on démontre des nombres en Arithmetique, & des figures en Geometrie, leur convient abſolument, & dans la plus rigoureuſe néceſſité ; parce que n'y ayant rien dans ces notions abſtraites qui ſoit hypothetique & modal, tout y eſt eſſence & attribut, tout ce qui y a été une fois apperçu & connu, demeurera immuablement & éternellement tel.

Je ne ſais aprés cela, s'il faut un grand degré de pénétration, ou un effort conſiderable d'attention, pour ſaiſir la difference qui ſe trouve entre les deux ſortes de Neceſſité, Les confondre c'eſt pécher contre les premieres régles de la Logique, attribuer au genre ce qui ne convient qu'à une eſpece, ou paſſer d'une eſpece à l'autre ; à peu prés comme feroit celui qui attribueroit au Ciron toutes les proprietés de l'Elephant, ſous prétexte que l'un & l'autre ſont des animaux doüés des organes néceſſaires à la vie A la verité, on ne ſeroit peut-être pas tombé dans cette équivoque, ſi Ariſtote & ſes Sectateurs n'avoit pas employé le mot de *neceſſité* dans les cas hypothetiques, & qu'ils y euſſent ſubſtitué celui de *certitude*, de *convenance*, ou tel autre. Mais pouvoient-ils prévoir, qu'en dépit de toute Dialectique, on s'obſtineroit à confondre dans cette matiere le genre & l'eſpece ?

J'avoüe que c'eſt à la preuve de ſentiment qu'il faut recourir, pour ſe convaincre de la difference que nous venons d'établir. Comme on voudroit rendre cette preuve ſuſpecte, & faire ſoupçonner qu'elle pourroit bien n'être qu'une pure illuſion, donnons quelques Refléxions à en établir la force. Quand vous diſtinguez, dit on, les genres & les eſpeces des Animaux, l'Oiſeau du Quadrupede, la Fourmi du Lion, vous avez un garant inconteſtable de ces diſtinctions, vous voyez de vos propres yeux ce qui differencie ces Animaux. Mais quand vous faites diverſes Claſſes de néceſſités, & que vous avancez qu'il y en a une dont le contraire eſt impoſſible, & une autre qui n'emporte pas l'impoſſibilité de ſon contraire, où ſont vos preuves, & vos témoins? Où voyez-vous le principe de ces differen-

ces, & qui vous assure que vous ne les forgez pas gratoitement ? Vous vous repaissez donc de la flateuse idée d'une Liberté, qui n'est fondée que sur la supposition de la possibilité des déterminations contraires à celles que vous suivez ; mais encore une fois cette possibilité n'est qu'une fiction. Voilà la difficulté ; travaillons à la lever.

Que la vüe, ou même l'accord complet de tous les sens, soit plus propre à nous conduire à la conviction que le sentiment interieur, c'est ce qu'il n'est pas aussi aisé de prouver que d'avancer. Tout au contraire nous affirmons qu'il n'y a point de comparaison à faire entre la force du sentiment & le témoignage des sens, la premiere se soutenant en tout tems & en tout lieu, au lieu que les sens sont sujets à mille variations & à mille erreurs, dont on trouve l'enumeration par tout. Aussi l'existence des objets externes, qui ne nous sont connus que par leurs images, a-t-elle été contestée ; au-lieu que personne n'a jamais osé former de doute contre l'argument de Des Cartes ; *Je pense : Donc je suis.* Or en examinant attentivement les notions evidentes renfermées dans l'argument de Descartes, on s'appercevra bientot qu'elles sont aussi concluantes pour la liberté que pour l'existence.

La Pensée dans l'homme n'est autre chose que le témoignage intime, ou le sentiment qu'il a de ses idées par la réflexion. Ce témoignage le persuade qu'il existe, parce qu'il lui est impossible de concevoir qu'une même chose soit, & ne soit pas en même tems. C'est le néant tout pur qu'une pareille supposition, & il ne sauroit s'en former aucune idée. Au contraire il conçoit trés bien toutes les choses qui ne sont point en contradiction, ni avec l'experience, ni avec les premieres notions de son esprit. Les Philosophes & le vulgaire entendent également par le mot de *possible*, ce qui ne répugne point à la pensée humaine ; ils reconnoissent également que l'existence est incompatible avec tout ce qui implique manifestement, & qu'elle ne convient qu'à ce qui n'est point contradictoire. Cette notion du possible & de l'impossible établit l'ancien Axiome ; *Rien ne se fait des rien ;* & conduit à l'argument de Des-Cartes, dont la force consiste à dire ; Je pense ; c'est un fait & un sentiment inconteſtable.

Donc

Donc il eſt impoſſible, qu'en penſant je ne penſe pas. Donc j'exiſte. Appliquons ces idées à la Liberté.

Les mêmes raiſons qui viennent de me prouver que je penſe, m'engagent à affirmer, que je puis m'aſſeoir ou être debout, parler ou me taire, me tourner à droite ou à gauche, en un mot faire telle ou telle autre action, qui dépend de l'exercice des facultés de mon corps ou de mon ame. L'experience & le ſentiment ſe réüniſſent pour me faire connoître, & mes facultés, & leurs differens uſages. L'idée du poſſible inſéparable de ma penſée me dicte, qu'au lieu d'écrire actuellement, je pourrois m'occuper à autre choſe. Cette même idée eſt la ſource des reproches que je me fais, quand je m'impute les mauvaiſes ſuites d'une action, qu'aucune neceſſité, ou force majeure, ne m'a engagé à faire. Le témoignage de ma penſée, bien loin de me diſculper, m'accuſe ; il me convainc avec toute l'evidence poſſible, que je pouvois ne pas agir, ou agir d'une maniere diamétralement oppoſée. C'eſt par cette raiſon que les Philoſophes ont donné le nom de *conſcience* au ſentiment de la penſée. Sans lui en effet l'homme n'auroit pas la faculté de juger de la moralité de ſes actions, de s'appercevoir, ſi elles ſont bonnes ou mauvaiſes, & de s'aſſurer, s'il lui convient de les commettre ou de s'en abſtenir. Ainſi ce qu'on appelle communément *conſcience* eſt inſéparable de la liberté, & n'eſt pas moins réel que la penſée même. L'une & l'autre ont pour baſe notre ſentiment, & les notions evidentes qui en ſont une ſuite. Ce qui fait dire à l'homme qu'il penſe, lui fait dire également que c'eſt lui qui ſe détermine à agir, ou à ne pas agir. Lui conteſter ſa ſpontanéité, c'eſt détruire la penſée. Quand une pierre tombe du toit par un accident qu'il ne pouvoit prévoir, & qu'elle lui meurtrit le bras, il ne s'impute point cette action ; mais il s'attribüe toutes celles qu'il a faites de deſſein prémedité, & avec choix ; il s'en applaudit, ou s'en repent, ſuivant qu'elles lui ſont avantageuſes ou nuiſibles.

Mais nos adverſaires prétendent que cela ne ſuffit point encore, & qu'il y a des exemples d'illuſions auſſi fortes que celles là, & qui rempliſſent ceux qui y ſont livrés d'une perſuaſion auſſi intime. Telle

eſt, par exemple, l'illuſion d'un Païſan, qui s'imagine que ſa volonté eſt la cauſe efficiente des mouvemens de ſon corps, qu'elle remüe immédiatement ſes bras & ſes pieds, toutes les fois qu'il le juge à propos. Cet homme a par devers lui le fait & l'experience, qui déposent d'une maniere inconteſtable. Il n'y a point d'inſtant où il ne puiſſe donner des preuves authentiques de la faculté qu'il a de ſe mouvoir dans un ſens plutot que dans un autre. Tout cela eſt vrai; mais voyons quels ſont les fondemens de l'opinion de ce Païſan, & s'ils ſont à comparer avec ceux ſur leſquels s'appuye la Liberté.

Je demande donc, où eſt la preuve de ſentiment, à laquelle tout homme, Païſan, ou Philoſophe, qui voudra admettre l'influence réelle & phyſique de l'Ame ſur le Corps puiſſe en appeller? Que ſent-il? Qu'il veut, & que ſes organes agiſſent, aprés qu'il a voulu. Mais oſeroit-on dire que qui que ce ſoit voye & ſente ce paſſage, ce noeud entre la détermination de l'Ame & le mouvement du Corps. Je fais un mouvement, que j'avois conçu comme poſſible, avant que de le commencer. Je comprens, & je puis aſſurer, qu'il eſt une infinité de mouvemens, dont l'un n'eſt pas moins faiſable que l'autre. Je fais de maniere à n'en pouvoir douter, que quand je veux marcher je marche, & que pluſieurs mouvemens de mon corps répondent parfaitement aux déterminations de ma volonté. Mais je ne ſaurois aller plus loin, ſans paſſer les bornes de l'experience. Elle garde un profond ſilence ſur la maniere dont la choſe ſe paſſe, elle ne me fait appercevoir en aucune maniere que ma volonté pouſſe mon bras. Quand je m'imagine donc qu'elle produit cet effet, de la même maniere que mes doits dirigent ma plume, je ne fais que m'embarraſſer d'une opinion trés confuſe, qui a plutot l'air d'un inſtinct groſſier que d'un raiſonnement.

Qu'on juge aprés cela, de quel droit les Philoſophes auxquels nous avons à faire, décident que comme le Païſan croit mouvoir ſon bras, quoiqu'il ne le meuve pas, il croit de même agir librement, quoiqu'il n'ait effectivement aucune liberté? La choſe n'eſt point égale. En croyant mouvoir ſes membres par l'action de ſa volonté, il croit ce qu'il ne ſent point, il met une conjecture à la place d'un

fait.

fait. Mais quand il ſe juge libre, il en a la preuve de fait en main ; car en faiſant un pas à droite, il a une certitude égale qu'il fait ce pas, & qu'il pourroit le faire à gauche. Ainſi, qu'on admette ou qu'on rejette l'influence de l'ame ſur le corps, les verités de ſentiment, telles que la Liberté, n'en ſauroient ſouffrir aucune atteinte.

Faiſons une Remarque à cette occaſion. C'eſt qu'en général toute Theorie, toute Hypotheſe, doit expliquer ce que nous connoiſſons par l'experience, & que ſi elle eſt démentie par un ſeule verité, cela ſuffit pour demontrer ſa fauſſeté. C'eſt ainſi qu'on a rejetté les Syſtemes de *Ptolomée*, & de *Tycho-Brahé*, parce qu'il n'eſt pas poſſible de les concilier avec les Obſervations Aſtronomiques. Il en eſt de même dans la Metaphyſique. Le Philoſophe qui entreprend quelque édifice ſur la nature & ſur les opérations de l'Ame, doit commencer ſa marche, comme le Phyſicien, par s'appuyer ſur des Obſervations, & ſur des Experiences faites avec toute la préciſion imaginable. Or le ſentiment, la reflexion, l'experience interieure, ſont les moyens que nous avons de découvrir la nature de l'Ame, comme nous nous ſervons des ſens pour examiner celle des Corps. Ceux qui croyent que les ſecours que nous avons dans la recherche des facultés de l'Ame, ſont plus foibles & plus incertains que ceux qui nous guident dans les Obſervations ſenſibles, ſe trompent beaucoup. La difference eſt toute à l'avantage des premiers. Mille cauſes peuvent déranger l'action des ſens, & des inſtrumens materiels, au lieu que le ſentiment interne eſt fixe & invariable. C'eſt ce qui a fait ſoutenir à Des Cartes, & à d'autres grands Philoſophes, qu'il eſt plus aiſé de connoître l'eſprit humain que le corps.

Ajoutons que le Metaphyſicien trouve dans la Science même dont il fait ſon objet, un preſervatif contre toute Hypotheſe fondée ſur de fauſſes notions. Ce n'eſt que la confuſion de nos idées, qui engendre cette foule de Sophismes dont toutes les Sciences fourmillent. Or l'Ontologie, comme premiere partie de la Metaphyſique, & ſource unique des connoiſſances dont nous ſommes capables, développe & met dans tout leur jour les notions qui ſont communes à tous les hommes. On les a fort bien nommé *directrices* ; leur fonction

ction eſt en effet de guider le Philoſophe par l'application perpetuelle qu'il en peut faire à quelque ſujet qu'il traitte. En ramenant ainſi toutes les connoiſſances de l'eſprit humain à des notions claires & diſtinctes, il eſt impoſſible de former jamais aucun Syſteme combattu par l'Experience. La verité ne ſauroit être en contradiction avec elle-même, ou avec des faits inconteſtables.

Pour revenir donc au ſujet de nos Réflexions, c'eſt ſans aucun fondement qu'on a objecté, que le ſentiment n'eſt pas une preuve ſuffiſante de la liberté, parceque nous ne connoiſſons pas intimément la nature & l'eſſence du Corps & de l'Ame. On pourroit ſe ſervir des mêmes armes pour combattre les démonſtrations de *Newton* à l'egard des Loix du mouvement ; les mêmes raiſonnemens prouvent qu'on ne ſauroit y faire aucun fonds. En effet toutes ces preuves, comme nous l'avons fait voir ailleurs, * ſont établies ſur une Propoſition tirée de l'experience ; & cette experience eſt moins inconteſtable que celle qui conſtituë le ſentiment de la Liberté. Mais une pareille route mene au Pyrrhonisme le plus outré. Il n'en coûtera guieres plus d'avancer, que ne connoiſſant pas la cauſe qui produit notre penſée, cette cauſe ſe plaît à nous repaitre de vaines chimeres, & qu'ainſi notre exiſtence n'eſt pas plus réelle que notre penſee. Il n'y a pas plus d'abſurdité à affirmer qu'en croyant penſer, on ne penſe pas, qu'à ſoutenir qu'en croyant être libre, on ne l'eſt pas. Impugner la contingence des déterminations de la volonté, c'eſt donc combattre le principe même de contradiction, & détruire par là même la certitude de toutes nos connoiſſances. Les Elémens d'Euclide peuvent alors aller de pair avec les Contes des Fées, puiſque les fictions extravagantes de ceux-ci ne répugnent pas plus à la poſſibilité, que les principes evidens & les conſequences demontrées des premiers. N'eſt-il pas bien ſurprenant apres cela d'entendre *Spinoſa*, qui bannit de ſon Syſteme toute contingence, & par conſequent toute liberté, avertir presque à chaque page ſes Lecteurs d'être en garde contre les idées groſſieres que nous preſentent les ſens & l'imagination, & d'obſerver religieuſement le precepte de Des Cartes, qui veut qu'on n'admette que des idees claires & diſtinctes, caracteres eſſentiels

* Voy. *Memoir* de 1747. p. 370.

ſentiels de la Verité ? Eſt-il donc dans notre eſprit des notions plus evidentes que celles du principe de contradiction, du poſſible & de l'impoſſible ? Pourquoi Spinoſa n'y a-t-il aucun égard ? C'eſt, comme l'a dit quelque part * Mr. de *Voltaire*, en parlant d'Epicure & de „Des-Cartes, c'eſt que les hommes dans leurs ſentimens, comme dans „leur conduite, ſuivent rarement leurs principes, & que leurs Sy„ſtemes, ainſi que leurs vies, ſont des contradictions." Dés que le Philoſophe, au lieu de commencer ſa marche, en s'appuyant ſur les notions du ſens commun, prend un vol hardi pour aller brusquement à la ſource du vrai, il ſe trouve bientot placé à celle des ſubtilités & des Sophiſmes.

* Parallele de la Metaph. Ch. II.

Le combat n'eſt pas encore fini ; mais il faut changer les batteries, & faire face à d'autres combattans. Il n'y a gueres d'excés qui n'ait ſon excés contraire. Celui auquel nous nous ſommes oppoſés jusqu'à preſent, pouſſe la neceſſité des actions morales jusqu'à la transformer en une vraye Fatalité. Effrayés des conſéquences qui réſultent de ce Dogme, d'autres Philoſophes ont crû ne pouvoir s'en débaraſſer, à moins qu'ils n'abjuraſſent toute ſorte de Néceſſité, & qu'ils ne laiſſaſſent notre Ame flottante, indéterminée, & ne recevant aucune impreſſion de la part des motifs. Selon eux, Dieu a donné à l'Homme la faculté de choiſir entre deux ou pluſieurs objets, à l'egard desquels il a le pouvoir phyſique néceſſaire, de ſorte qu'il peut déterminer ſa volonté, en mettant à part toutes les raiſons & toutes les cauſes externes, qui pourroient le porter à préferer un de ces objets aux autres.

Ce Dogme de la Liberté d'Indifference eſt inſoutenable. *Collins* & ſes partiſans n'ont pas eu de peine à en triompher, & les défenſeurs de la Neceſſité morale ſe ſont joints à eux dans cette occaſion. „Vouloir, dit Mr. *de Leibnitz*, qu'une détermination vienne d'une „pleine indifference, abſolument indéterminée ; c'eſt vouloir qu'elle „vienne abſolument de rien. L'on ſuppoſe que Dieu ne donne pas cette „détermination. Elle n'a point de ſource dans l'Ame, ni dans le Corps, „ni dans les circonſtances, puisque tout eſt ſuppoſé indéterminé, & la „voilà pourtant qui paroit, & qui exiſte ſans préparation, ſans que rien

„s'y dispose, sans qu'un Ange, sans que Dieu même puisse voir,
* *Theod.* § 320. „ou faire voir, comment elle existe." *

Nous ne prétendons pas néanmoins que les Philosophes, qui établissent la Necessité morale, ayant fait cause commune avec *Collins*. S'il leur est arrivé de proposer les mêmes argumens, ils les ont appliqués fort différemment. Le plus fameux de tous est celui de deux bassins en équilibre, dont l'un ne peut faire remuer l'autre, de sorte que pour changer leur état, il faut qu'il survienne quelque poids dans l'un de ces bassins. Ceux qui poussent trop loin la force de ce raisonnement, en perdent tout le fruit & l'honneur. Faute de faire attention à l'ancienne régle, qui défend aux Philosophes de presser trop les comparaisons, ils s'egarent dans un Labyrinthe sans issüe. Tâchons de dire quelque chose de plus précis, & d'entrer dans une route où nous soyons à l'abri de tous les écueils.

S'il y a quelque chose de palpable pour un esprit attentif, c'est la liaison indissoluble entre le Principe de la Raison suffisante, & la Contingence. Outre ces qualités essentielles des choses, dont nous avons parlé ci-dessus, & qui constituënt l'immutabilité des Essences, j'apperçois dans les Etres des changemens, des rélations, des manieres d'être en un mot, qui ne sont point constantes, mais variables. A quoi faut-il que j'en rapporte l'origine ? A l'aveugle hazard. Mais la Raison & l'Experience s'y oppolent avec une égale force. La Raison me dit que le hazard est un néant, & que le Néant ne sauroit produire aucun effet. L'Experience m'apprend invariablement que toutes les fois qu'il arrive quelque changement dans un être, il est intelligible & explicable par l'action de quelque autre être, qui est intervenu pour la production de cet effet. Voilà la Raison suffisante. Si je la rejette, ce Monde devient un païs de chimeres, une région où tout est fabuleux, & plus fabuleux encore que dans les Fables, où la volonté de quelque Enchanteur, la baguette de quelque Fée, tiennent au moins la place de la Raison suffisante, & présentent aux Enfans & aux idiots l'idée de je ne sai quelle puissance, à laquelle la Nature obeït. Le hazard au contraire étant un rien décidé, tout ce qu'on

qu'on lui rapporte eſt un effet du rien ; c'eſt un nombre, dont les unités ſont des zéros.

Eſt-il poſſible qu'on aime mieux donner dans de pareilles extravagances que d'admettre un Principe auſſi ſimple & auſſi évident que celui de la Raiſon ſuffiſante? Et quel eſt le prétexte qu'on allegue? C'eſt que ce Principe conduit à la néceſſité. J'en conviens ; mais à quelle néceſſité ? A la néceſſité hypothetique, qui bien loin d'etre deſtructive de la contingence, & de la Liberté, eſt au contraire la ſource de leurs notions, & ne peut abſolument s'en paſſer. Pour prétendre que la Raiſon ſuffiſante eſt le principe d'une néceſſité abſolüe, il faut la confondre avec l'eſſence des choſes ; mais on peut dire que ceux qui le font, s'obſtinent à le faire de gayeté de coeur, aprés la netteté & la préciſion que d'habiles Philoſophes ont employées à l'expoſition de cette Doctrine. Ce vain épouvantail de Fatalisme qu'ils ne ceſſent d'etaler, a été réduit à ſa juſte valeur, & ne peut plus en impoſer qu'à ceux qui ſe plaiſent dans l'erreur volontaire.

Je ferai même à cette occaſion une Remarque que je crois neuve, & importante, pour montrer comment les idées des grands Hommes s'accordent ſouvent dans le fonds, quoiqu'elles different par rapport à l'expreſſion. *Des-Cartes*, l'immortel *Des-Cartes*, n'a point ignoré, ni négligé, la difference qu'il y a entre les déterminations caſuelles, ou arbitraires, & celles qui naiſſent du Principe de la Raiſon ſuffiſante. C'eſt ce qui l'a engagé à rejetter les qualités occultes des Scolaſtiques; il proſcrivit, par exemple, la force attractive de l'Aiman, parce qu'elle détermine les phénomenes de l'aiman d'une maniere qui n'a rien d'intelligible, & qui n'en eſt point une vraye explication ; & il propoſa l'hypotheſe des corpuſcules Magnetiques, qui forment une eſpece d'Atmoſphere, afin d'alleguer une cauſe manifeſte, par laquelle on put rendre une raiſon ſuffiſante de ce qui ſe paſſe dans l'approche de l'Aiman & du Fer. Sa grande régle même, ſi on y prend bien garde, ſon précepte fondamental, *de n'admettre que ce dont nous avons des idées claires & diſtinctes*, n'eſt autre choſe que la raiſon ſuffiſante, qu'il vouloit introduire dans la Philoſophie. La notion claire & diſtincte qu'il exigeoit, c'eſt celle qui fait comprendre

la choſe & qui la rend explicable, en dévelopant la notion du ſujet d'une maniere qui faſſe voir, que l'attribut lui convient, & pourquoi. Je ſuis même perſuadé que *Leibnitz* n'eſt parvenu à la Raiſon ſuffiſance, & n'a conçu le deſſein d'en faire un principe de nos connoiſſances, qu'en réfléchiſſant ſur la difference qu'il y avoit entre les explications des Phenomenes, qu'on trouvoit dans les Scolaſtiques, & celles que *Des-Cartes* avoit fournies ; il y vit quelque choſe de plus que ce qu'on appelloit vulgairement *Cauſe*, & il lui donna le nom de *Raiſon*. Et l'on a tout lieu de croire que *Des-Cartes* lui-même auroit donné le dernier degré de perfection à ſa découverte, ſans l'extreme dégout qu'il avoit pour l'Ontologie de ſon ſiecle, toute heriſſée effectivement des épines de la barbarie. Ce dégout l'empêcha de pouſſer plus loin l'analyſe des notions, & d'en abſtraire d'Univerſelles, c'eſt à dire, des Principes, des notions ſpeciales que la force de ſon Génie lui avoit préſentées. Mais il ne s'agit aprés tout, ni de l'Epoque de ce Principe, ni de ſes Auteurs ; je dois ſeulement juſtifier ſon uſage, & propoſer la preuve de la Liberté, qui en réſulte d'une maniere qui, en détruiſant les prétentions des Indifferentiſtes, ne donne aucun droit aux concluſions des Fataliſtes.

L'exemple de deux choſes en équilibre prouve par le principe de la raiſon ſuffiſante qu'il renferme, & qu'Archimede y a déjà découvert, que comme il faut quelque cauſe qui trouble cet équilibre ; & faſſe pencher l'un des cotés ; de même l'homme ne ſauroit être déterminé à choiſir un parti plutôt que l'autre, ſans que quelque motif y intervienne. A cet égard la reſſemblance eſt ſenſible, la comparaiſon eſt juſte. Mais elle cloche, dés qu'on va plus loin. Pour faire pencher la balance qui eſt en équilibre, il faut qu'une cauſe étrangére mette un poids dans l'un des baſſins. Il n'en eſt pas de même des motifs qui nous déterminent. Quoique les objets externes occaſionnent ſouvent nos penſées, nous n'en ſommes pas moins aſſurés que c'eſt nous qui penſons. C'eſt ce ſentiment qui établit notre exiſtence, comme nous l'avons vu ci-deſſus. Quand donc les cauſes externes agiſſent ſur nous, nous en dépendons, il eſt vrai, par rapport à l'action, mais l'effet de cette action dépend à ſon tour de la déterini-

nation

nation de notre volonté. Un verre de vin excite mon déſir, mais il ne le force pas; c'eſt moi qui me détermine. Quand je conſidère les objets que mes ſens me préſentent, je ſais par le ſentiment de ma penſée que je puis les comparer enſemble, delibérer intérieurement, faire uſage de ma raiſon & de mes réfléxions, & me déterminer à choiſir un de ces objets préférablement à l'autre. C'eſt là l'indifference de l'exercice, qu'il faut bien ſe garder de confondre avec l'indifference des motifs, & qui jointe à l'exemtion de contrainte, conſtitüe la liberté. Or je ne puis attribuër cette faculté, ni aux corps qui inclinent & ſe meuvent, ſans favoir ce qu'ils font, ni aux bêtes, qui ont bien comme nous les ſens, l'imagination & les deſirs charnels, mais qui ne ſont pas doüées d'entendement, de raiſon & de volonté.

Il n'eſt donc pas beſoin de recourir à l'indifference, pour eviter la néceſſité. Tous les cas dans lesquels on prétend ſe fortifier du témoignage de l'Experience, & où les partiſans de l'Indifference croyent être dans leur fort, ne conclüent point en faveur de leur Theſe, puisque le Principe même eſt faux, c'eſt qu'il y ait des cas de cette nature. En effet, ſi l'on veut bien approfondir les choſes, il ſe trouvera que dans les occaſions même qui paroiſſent les plus indifférentes, il y a toujours eu quelque raiſon prévalente en faveur du parti qu'on a pris. Quand il s'agit de choiſir une choſe entre pluſieurs autres où l'on ne remarque point de difference, il y a toujours une de ces choſes qui eſt dans une ſituation plus commode par rapport à la main qui doit la ſaiſir ; & alors l'Ame n'ayant point d'autre raiſon, aura égard, même ſans y faire attention, à cette commodité, ou peut être que par une opinion confuſe, & dont on ne ſauroit rendre raiſon, on croira un objet meilleur que les autres. On en peut dire autant de quelque cas que ce ſoit. Une infinité de petites perceptions, qui nous rendent quelque fois joyeux, chagrins; & différemment diſpoſés, nous font quelquefois plus goûter une choſe que l'autre, ſans que nous puiſſions dire pourquoi. L'on ne doit donc pas trouver étrange que nous fuppoſions en nous des motifs qui nous déterminent, ſans que nous ſoyons capables d'en rendre raiſon.

Mais il y a plus, & l'on peut démontrer directement que le cas du parfait équilibre eſt impoſſible. Car les objets n'etant jamais parfaitement ſemblables, & differant au moins, de l'aveu de tout le monde, par leur ſituation à notre égard, ils ne peuvent point être repreſentés par des perceptions entierement ſemblables ; & dés là les appetits qui naiſſent des perceptions, ne ſauroient être ſemblables ; car les effets ſont égaux à leurs cauſes. Donc les appetits n'etant point ſemblables, il ne peut y avoir de parfait équilibre. Il n'y a qu'a jetter les yeux ſur la maniere dont Mr. *de Leibnitz* réfute la Fable de l'Ane de Buti-
* § 49. dan dans ſa *Theodicée* *. C'eſt ainſi qu'on détruit le Principe de l'Indifference ; mais en le laiſſant même ſubſiſter, on ſeroit également en droit de nier la conſequence. Quand le cas du parfait équilibre ſeroit poſſible, il ſeroit alors contradictoire que la volonté ſe determine; & les Principes de la Raiſon ſuffiſante & de la diſpoſition de la Cauſe à produire l'effet, ne ſont pas moins vrais & indiſpenſables dans les cas les moins importans que dans les plus intéreſſans. S'il étoit poſſible que l'Ame ſe déterminât une ſeule fois ſans raiſon, pourquoi ne le feroit elle pas en toute rencontre ? L'erreur où l'on tombe ſur les choſes de petite importance, vient de ce que nous n'appercevons pas toujours les raiſons qui concourent à y déterminer. Cela n'artiveroit pas, ſi nous n'avions que des idées diſtinctes. Mais nous avons encore des idées confuſes, des ſenſations, des appetits, des paſſions & une infinité de perceptions obſcures, que nous ne diſtinguons point, & qui cependant contribuënt à nos déterminations. Comme il y a dans notre Corps pluſieurs mouvemens inſenſibles, dont nous ne nous appercevons pas, il eſt de même dans notre eſprit pluſieurs idées qui ne ſont pas accompagnées du témoignage. Combien de fois n'arrive-t-il pas aux Philoſophes eux-mêmes de dire qu'ils ne penſent à rien, quand l'eſprit dans des momens d'inaction ne réfléchit pas ſur ſes idées, ou quand ſe promenant dans les eſpaces imaginaires, les objets qu'il y rencontre, n'ont pas la force de faire ſentir leurs impreſſions? Cet état reſſemble parfaitement à celui d'un homme, qui en dormant parle & rêve ſans s'en appercevoir. Ainſi, quand on me propoſe de me tourner à droite ou à gauche, ou de faire quelque autre action, qui paroit

roit abſolument indifferente, je ne puis jamais aſſurer qu'il n'y ait aucune diſpoſition préſente, ou antécedente, dans mon eſprit ou dans mon corps, qui me faſſe pancher d'un coté plutot que de l'autre.

Pour porter un dernier coup à la liberté d'indifference, réfléchiſſons encore ſur ceci. Une experience indubitable m'apprend que je puis réſiſter à des motifs preſſans, dont j'ai le ſentiment & la réfléxion, & malgré leur poids faire pencher la balance du coté oppoſé. A plus forte raiſon pourrai-je exercer cette puiſſance, quand il n'y a dans l'un des baſſins de la balance que quelques menües pouſſieres, qui l'empêchent d'être parfaitement en équilibre. Voilà à quoi ſe réduit la réalité de la liberté d'indifference; elle ne nous paroit abſolüe que faute de connoître ce qui la détermine. *Des-Cartes* l'a fort bien compris & expliqué. „L'indifference, dit-il, que „je ſens, lorsque je ne ſuis point emporté vers un coté plutot que „vers un autre par le poids d'aucune raiſon, eſt le plus bas degré de la „liberté, & fait plutot paroître un défaut dans la connoiſſance qu'une „perfection dans la volonté. Car ſi je connoiſſois toujours clairement ce qui eſt vrai & ce qui eſt bon, je ne ſerois jamais en peine „de déliberer quel jugement & quel choix je devrois faire, & ainſi je „ſerois entierement libre, ſans jamais être indifferent."

Concluons donc que l'indifference n'a lieu qu'à l'égard de l'Ame, qui dans mille cas qui ſe préſentent n'eſt pas plus déterminée par ſa nature d'un coté que de l'autre, de même que le corps n'eſt point déterminé par ſoi-même à occuper la place où il ſe trouve. S'il y a une raiſon ſuffiſante qui ait mis le corps dans la ſituation où il eſt, & qu'ainſi ſa détermination ſoit trés certaine, il n'eſt pas moins evident que ſa détermination eſt contingente, ou, ce qui revient au même, qu'elle n'eſt pas immuable, qu'elle pouvoit être autrement. Il en eſt de même de nos actions libres, auxquelles les motifs tiennent lieu de raiſon ſuffiſante. Sans ce principe il n'y auroit rien de certain dans le monde, tous les évenemens ſeroient produits par le pur hazard, c'eſt à dire, par le néant. Ce n'eſt qu'à la faveur de ce principe que nous pouvons remonter des effets à la cauſe, & unir les connoiſſances que nous puiſons dans l'experience à celles du raiſonne-

ſonnement. Ce qui fait juger à un habile Politique, pourquoi tel évenement eſt arrivé, & pourquoi il ſera ſuivi d'autres qu'il prévoit vraiſemblablement, lui fait connoître que ces mêmes choſes pourroient être autrement. Plus le Phyſicien connoît le monde matériel, plus il s'apperçoit que les changemens & les révolutions qui y arrivent continuellement, ne ſont que les ſuites conditionelles de l'arrangement & de la liaiſon admirable, dans laquelle ſe trouvent les parties qui compoſent ce monde. Ainſi, & les motifs qui produiſent les actions libres, & les reſſorts qui font agir la nature des Corps, loin de nous conduire à la néceſſité abſolüe des choſes que nous voyons, nous manifeſte leur contingence, qui excluant toute idée de hazard, n'eſt fondée que ſur une néceſſité conditionelle.

Nos connoiſſances ne ſont vrayes qu'autant qu'elles ſont conformes à la nature de leurs objets. Mais que ces connoiſſances ayent prévenu les effets qui en ſont l'objet, ou qu'elles ne ſoient venües qu'après coup, cela change-t-il quelque choſe à la nature même de ces effets? Cette rélation qu'ils ont avec nous, & par laquelle ils nous ſont connus, ou inconnus, avant leur accompliſſement, a t elle la moindre influence ſur leur certitude, ſur les déterminations, en vertu desquelles elles doivent être ainſi, & non autrement. Il y a plus; l'Intelligence Divine elle-même, quoiqu'elle n'ait aucune analogie avec notre maniere de connoitre, l'Intelligence qui, entant qu'infinie, embraſſe tout à la fois par la conception la plus *adéquate* tout ce qui eſt, a été, ſera, & peut être; tandis que notre eſprit borné n'aquiert que ſucceſſivement ſes connoiſſances, dont pluſieurs ſont obſcures, d'autres confuſes, quelques unes diſtinctes & lumineuſes; cette Intelligence, dis-je, aux yeux de laquelle toutes choſes ſont nües & à découvert, change-t elle par ſa connoiſſance les choſes contingentes en des choſes abſolument néceſſaires? Il eſt bien ſurprenant que les Theologiens & les Philoſophes ayent été pendant ſi long tems accrochés à la difficulté de concilier la contingence de nos actions avec la Preſcience éternelle de Dieu, & que la pluspart l'ayent jugée inſoluble. La ſouveraine intelligence de Dieu nous eſt incomprehenſible, entant que nous n'en avons pas une pleine & entie-

re

re conception, qui puiſſe nous faire comprendre & embraſſer parfaitement tout ce qui eſt en elle ; mais l'imparfaite & mediocre connoiſſance que nous en avons, ſuffit pour nous autoriſer à conclurre qu'il a tout prévû, parce que connoiſſant intimément & en lui-même l'infini, à plus forte raiſon ſon Entendement a-t-il appetçu de toute éternité la nature de toutes choſes, & les differentes liaiſons où elles peuvent ſe trouver. Ainſi la liberté étant une fois établie ſur les preuves les plus convainquantes, il eſt certain que nous pouvons déterminer nos actions librement, non pas par la raiſon que Dieu les a prévües, mais parce que la Liberté eſt conforme à notre nature. Il n'y a qu'une entiere & abſolüe indifference, dont la Preſcience ſoit impoſſible à Dieu. Et il faudroit refondre toutes les idées de la Logique & de la Metaphyſique, pour admettre ce Dogme avec les Conſéquences qui en découlent.

L'obſcurité qui régne dans nos idées, l'incertitude de nos connoiſſances au ſujet des motifs qui nous déterminent, ou qui devroient nous déterminer, ſont donc les cauſes de cet embatras, de cette ſuſpenſion, de ce choix fait en apparence au hazard, qu'il plaît à certains Philoſophes d'eriget en une eſpece particuliere de Liberté, ſous le nom d'Indifference. Bien plus ; d'un défaut ils ſont une perfection, & voudroient nous perſuader que la Divinité elle-même poſſede l'admirable prérogative de ſe déterminer ſans motifs, ou même contre les motifs. Etrange bouleverſement de toutes les notions ! Peu s'en faut qu'on ne faſſe tenir pat ce moyen au premier Etre le langage de cette femme furieuſe : *Video meliora, proboque ; deteriora ſequor.* Non, la liberté ne s'accroît & ne ſe fortifie au contraire, qu'à meſure que l'indétermination & l'indifférence diminüent. Plus je ſaiſis les differences des choſes, moins j'héſite dans leur choix, & l'Etre qui embraſſe d'un coup d'oeil toutes les differences infiniment petites de toutes les choſes exiſtentes & poſſibles, ne ſauroit trouver deux choſes égales qui tiennent ſa volonté dans l'equilibre. Il eſt donc bien ſurprenant de voir les hommes défendre avec chaleur la poſſeſſion d'un avantage, qui bien conſideré eſt ce qu'il y a de plus humiliant pour eux. On rit de la ſimplicité d'un enfant qui ne ſait

que prendre d'un Louïs dor, ou d'un Jetton qu'on lui offre, & qui aprés avoir bien tâtonné prend le Jetton. C'eſt le cas de tous les hommes, proportionellement à l'etenduë de leurs connoiſſances.

La Liberté proprement dite eſt donc à l'Ame ce que la Santé eſt au corps. Elle conſtitüe la vie de l'eſprit, comme la vie animale réſulte des fonctions & des mouvemens du Corps. Le Corps ne peut ſubſiſter ſans le ſecours d'alimens convenables aux ſolides & aux fluïdes qui le compoſent. L'eſprit s'etrécit & s'eteint presque, dés qu'on le prive de la nourriture qui lui eſt propre. Il lui faut des idees, de l'attention, de la réfléxion, pour exercer le jugement & cultiver la Raiſon. La fauſſeté, l'erreur, le menſonge ſont un vrai poiſon pour lui. Ce paralléle peut être pouſſé plus loin. La ſanté dans les tempéramens les plus robuſtes, n'eſt pas ferme & durable, ſi l'on n'uſe d'aucun régime. Les excés de l'intempérance aſſujettiſſent les corps les plus robuſtes aux maladies les plus violentes. Il en eſt de même de l'eſprit, s'il ne régle pas l'uſage de ſes facultés par la ſageſſe. Ses débauches, ſi je puis ainſi parler, enveniment ſes paſſions, & les rendent inſupportables dans les grands Génies, qui ſont ordinairement ceux qui ſont les plus grands écarts. En effet, pour continuer la comparaiſon, comme les corps delicats & foibles ſe ſoutiennent ſouvent mieux & plus longtems que les corps robuſtes, les eſprits médiocres par une application bien reglée l'emportent quelquefois ſur ceux qui ont le plus de force & de pénétration naturelle. En un mot, ſi la plupart des maladies du corps ſont des ſuites de l'intempérance, celles de l'eſprit le ſont d'ordinaire d'un mauvais uſage de ſes facultés. C'eſt malheureuſement la ſituation de la plupart des hommes. Mais comme ils s'y mettent volontairement, ſont-ils moins coupables, que ces mendians qui s'eſtropient de gayeté de coeur pour ſe diſpenſer du travail ? Si donc les facultés de l'ame ſont ſujettes à tant d'inegalités, & ſi l'on n'obſerve pas dans la conduite & dans les moeurs de l'homme cet ordre & cette régularité qu'on admire dans le monde materiel, c'eſt que l'homme ne peut pas être dirige comme une machine, & que ſon bonheur eſt inſéparable du bon uſage de ſa liberté.

Il

Il faut donc pour perfectionner ſa liberté, perfectionner ſes connoiſſances par la culture de l'eſprit & de la raiſon. La Verité & la Vertu ſont unies par les liens les plus étroits. Ce n'eſt qu'en s'appropriant la premiere qu'on parvient à l'autre, & qu'on peut goûter les doux fruits de leur union, en s'affranchiſſant de cette inconſtance & de cette vanité perpetuelle, qui eſt la ſource de tant de déſordres. Si la plupart des hommes ſont privés de la véritable liberté, & ſi leurs deſirs triomphent presque toujours de leur volonté, ce n'eſt pas que leur entendement ſoit trop foible, ou que leurs organes ſoient dérangés. C'eſt plutot parce qu'ils ſe rebutent aux premieres difficultés, & qu'ils voudroient ſe procurer les avantages de la Verité & de la Vertu, ſans qu'il leur en coutât rien, ou bien même allier l'une & l'autre avec l'erreur, l'ignorance & les paſſions. Cette prétention eſt auſſi vaine & auſſi chimérique que le ſeroit celle d'un homme ſec & décharné, qui pour aquerir promtement de l'embompoint, voudroit prendre un quintal de nourriture par jour, ou de celui qui formeroit le projet d'etre tantôt gras, tantôt maigre, d'un jour à l'autre.

L'Homme eſt eſſentiellement un être fini & borné; par conſequent il ne peut arriver à la perfection que ſucceſſivement & par degrés. Les facultés de l'eſprit & du corps ne s'accroiſſent & ne ſe fortifient que par l'application, par l'exercice & les actes reïterés qui forment les habitudes, Ainſi ſi nôtre liberté eſt trés peu de choſe, c'eſt parce que nous faiſons trés peu d'uſage des qualités qui nous diſtinguent des bêtes. L'aſſerviſſement volontaire aux ſens, à l'imagination, & aux appetits charnels, bien loin de nous laiſſer quelque préeminence ſur les animaux, nous rend pires qu'eux, entant que notre Entendement invente de nouveaux moyens pour étendre & pour aſſouvir ſes paſſions. C'eſt ainſi que plus une choſe eſt excellente, plus l'abus en eſt pernicieux. Mais encore une fois, l'homme ne ſauroit s'en prendre qu'à lui même, s'il faut un mauvais uſage de ſa liberté. Il n'y a qu'un enfant expoſé dés ſa naiſſance parmi les Loups & les Ours, dont l'ignorance ſoit invincible & excuſable.

REMARQUES
SUR LE PRINCIPE DE LA CONSERVATION DES FORCES VIVES PRIS DANS UN SENS GENERAL.

PAR M. D. BERNOULLI.

I.

Le principe ordinaire des forces vives ſuppoſe la gravitation uniforme & toujours parallele à elle même: mais lorsque par la diverſite des poſitions des corps la gravitation eſt changée, ſoit par raport à ſon intenſité, ſoit par raport à ſa direction, on ne peut plus ſans doute eſtimer la force vive, comme on fait ordinairement, par la deſcente du centre de gravité multipliée par la maſſe; cependant il ſe fait toujours une conſervation des forces vives, pourvu qu'on la prenne dans le juſte ſens. C'eſt ainſi que j'ai démontré autrefois dans un Memoire que j'ai envoyé à l'Academie des Sciences de S. Petersbourg, comment on pouvoit calculer par le ſimple principe de la conſervation des forces vives quelques inegalités du mouvement de la Lune: il ne ſera donc pas inutile d'examiner, de quelle maniere on puiſſe employer ce principe pour d'autres hypotheſes que celle de la gravitation uniforme & dont la direction eſt toujours parallele.

II. S'il y a pluſieurs corps aſſujettis à la loi d'un certain ſiſteme, de ſorte qu'aucun ne puiſſe ſe mouvoir indépendemment des autres; Si chaque corps eſt anime par une gravitation variable quelconque,

je

je dis que la conſervation des forces vives ſe fera de la maniere, qui ſuit.

Indiquons les maſſes des corps, qui compoſent le ſiſteme, par m, m', m'', m''', &c. leurs viteſſes par v, v', v'', v''', &c. qu'on conſidere enſuite chaque corps comme détaché du ſiſteme, & qu'animé par la gravitation il parte du même point & parvienne au même point, décrivant un chemin quelconque ; il ſera facile de déterminer la viteſſe, que ce corps détaché du ſiſteme doit prendre ; nous exprimerons ces autres viteſſes par u, u', u'', u''' &c. Là deſſus le principe de la conſervation des forces vives ſera généralement exprimé par cette equation

$$mvv+m'v'v'+m''v''v''+m'''v'''v'''+\&c. = mu\,u+m'u'u'+m''u''u''+m'''u'''u'''+\&c.$$

III. Je ne m'arrêterai pas pour cette fois à expliquer & à confirmer ce principe général par des exemples, mon but n'etant pour le préſent que d'examiner toute l'etenduë du principe des forces vives, & cela non ſeulement par raport aux ſiſtemes de pluſieurs corps, mais encore par raport aux corps ſimples, lorsqu'il eſt queſtion de comparer pour ceux-ci leur force vive avec un certain eſpace qu'ils auront parcouru ; & ce dernier examen facilitera extrémement la maniere de déterminer les quantités $u\,u$, $u'\,u'$, $u''\,u''$, $u'''\,u'''$ &c. que nous avons employées dans notre équation du § 2.

IV. Commençons par l'hypotheſe commune de la gravitation uniforme & parallele ; on ſçait que le quarré de la viteſſe acquiſe eſt toujours proportionel à la hauteur verticale que le corps a parcouru ; & comme cela eſt vrai, quelle que ſoit la route du corps, il ſe fait à cet égard une conſervation de force vive rélativement à la hauteur verticale que le corps parcourt.

S'il y a pour cette hypotheſe un ſiſteme de pluſieurs corps, ſi l'on marque encore les maſſes de ces corps par m, m', m'', m''' &c. enfin ſi on exprime la gravitation acceleratrice par 1, & que l'on nomme les hauteurs verticales parcourües par les corps du ſiſteme x, x', x'', x''' &c. on aura $u\,u = 2x$; $u'\,u' = 2x'$; $u''\,u'' = 2x''$; $u'''\,u''' = 2x'''$ &c. & l'equation générale du § 2. donne

$$mvv+m'v'v'+m''v''v''+m'''v'''v'''+\&c. = 2mx+2m'x'+2m''x''+2m'''x'''.$$

c'eſt à dire, que la force vive entiere ſera exptimée par la maſſe de tout le ſiſteme multipliée par la double deſcente verticale du centre de gravité du ſiſteme.

V. Si nous ſuppoſons à preſent la gravitation encore uniforme, mais dont la direction tende vers un centre fixe, il n'y a qu'à ſubſtituer dans le précedent article aux deſcentes verticales des corps leurs approchemens du centre de la gravitation & la conſervation des forces vives, ſoit par raport aux corps ſimples, ſoit par raport aux ſiſtemes de corps, ſe fera de la même maniere rélativement aux dits approchemens, qu'elle ſe fait dans l'hypotheſe commune rélativement aux deſcentes verticales. Ainſi la force vive d'un corps ſimple ſera la même, quelque chemin qu'il faſſe pour parvenir d'un point donné à un point donné, & dans un ſiſteme de corps, nous aurons comme auparavant

$mvv + m'v'v' + m''v''v'' + m'''v'''v''' + \&c. = 2mx + 2m'x' + 2m''x'' + 2m'''x''' \&c.$

en entendant par x, x', x'', x''' &c. la quantité de laquelle les corps m, m', m'', m''' &c. ſe ſont approchés du centre de gravitation. Mais ce que nous avons ajouté dans le précedent article du centre de gravité, ne peut ſubſiſtet que dans l'hypotheſe commune ; c'eſt un point imaginaire dans toute autre hypotheſe.

VI. Voici maintenant comment il faudra enviſager la choſe, ſi la gravitarion eſt outre cela variable, ſuivant une loi quelconque, par raport aux diſtances depuis le centre de gravitation. Un corps ſimple aura toujours la même force vive, toures les fois que parrant du même point il parvient à une même diſtance depuis le centre de gravitation, quelque chemin qu'il faſſe pour parvenir d'un point à l'autre. Si donc le centre de graviration eſt en E (fig. 1). ſi le corps commence à ſe mouvoir au point A, & qu'il parvienne au point C ſur une courbe quelconque A B C, pour trouver la viteſſe du corps en C, il n'y a qu'à tirer la ligne droite A E, & puis du centre E décrire l'arc de cercle C D, aprés quoi la viteſſe en C ſera la même, qu'au point D, ſi le corps tomboit en ligne droire vers le centre E. Il eſt donc trés facile de trouver la viteſſe du corps & ſa force vive, dans

un

un point quelconque, quelle que ſoit la loi de la gravitation. Soit le corps dans une diſtance X depuis le point E &, que la force acceleratrice ſoit exprimée par ξ, on aura $uu = -2\int \xi\, dx$. Conſidérons à preſent dans cette même hypotheſe un ſiſteme de tant de corps qu'on voudra, dont les diſtances au point E ſoyent exprimées par x, x', x'', x''' &c. & les forces acceleratrices correſpondantes par ξ, ξ', ξ'', ξ''' &c. Je dis que le principe général de la conſervation des forces vives pour cette hypotheſe ſera exprimé par cette équation

$$mvv + m'v'v' + m''v''v'' + m'''v'''v''' + \&c. = -2m\int \xi\, dx - 2m'\int \xi'\, dx' - 2m''\int \xi''\, dx'' - 2m'''\int \xi'''\, dx''' - \&c.$$

Dans l'integration des termes on ſatisfera par l'addition des conſtantes aux poſitions initielles des corps & à la force vive que le ſiſteme eſt ſuppoſé y avoir, ſi ſon mouvement ne commence pas depuis le repos.

Ainſi, par exemple, ſi la graviration acceleratrice eſt ſuppoſée reciproquement proportionelle aux quarrés des diſtances depuis le point E; ſi les diſtances initielles des corps, qui compoſent le ſiſteme, ſont exprimées par a, a', a'', a''' &c. ſi le mouvement commence depuis le repos; ſi on ſuppoſe enfin que la gravitation acceleratrice ſous la diſtance b devienne égale à la peſanteur naturelle exprimée par l'unité, nous aurons $\xi = \frac{bb}{xx}$, $\xi' = \frac{bb}{x'x'}$, $\xi'' = \frac{bb}{x''x''}$, $\xi''' = \frac{bb}{x'''x'''}$ &c. & le principe de la conſervation des forces vives donnera cette équation

$$mvv + m'v'v' + m''v''v'' + m'''v'''v''' + \&c. = 2m\left(\frac{bb}{x} - \frac{bb}{a}\right) + 2m'\left(\frac{bb}{x'} - \frac{bb}{a'}\right)$$
$$+ 2m''\left(\frac{bb}{x''} - \frac{bb}{a''}\right) + 2m'''\left(\frac{bb}{x'''} - \frac{bb}{a'''}\right) + \&c.$$

VII. Suppoſons maintenant deux centres de forces, & que la loi de la gravitation vers chaque centre ſoit encore quelconque; il faudra tenir ici la même route pour parvenir à la connoiſſance du principe de la conſervation des forces vives. Commencons donc encore par les corps ſimples.

Soyent

Soyent les points A & B les deux centres de forces; (fig. 2.) que le corps parte du point G, & ſe meuve ſur une courbe quelconque juſqu'au point H, tirez la droite indéfinie A B F; du centre B décrivez les deux arcs de cercle G F & H D, de même que de l'autre centre A les deux arcs de cercle G E & H C.

Pour déterminer à preſent la force vive qu'aura le corps au point H, je dis qu'il n'y a qu'à ajouter enſemble les deux forces vives, qu'auroit le corps, ſi chaque gravitation agiſſoit ſeule, de ſorte que le tout pourra être déterminé par le § 6. Si l'on cherche donc la force vive que le corps prend, étant uniquement tiré vers le centre B, en parcourant la droite F D, & puis celle que le corps acquiert étant uniquement tiré vers le centre A, en parcourant la droite E C, la ſomme de ces deux forces vives donnera la force vive entiere du corps au point H.

Soit donc la diſtance B H $=x$, & la gravitation acceleratrice vers B $=\xi$; la diſtance A H $=y$ & la gravitation acceleratrice vers A $=Y$; la viteſſe au point H $=u$, on aura $uu = -2\int\xi\,dx - 2\int Y\,dy$. Il eſt vrai que la démonſtration de ce principe eſt fort facile, mais je n'en admire pas moins la fecondité de notre principe.

Voyons à préſent ce qui doit arriver à un ſiſteme de corps; appliquons pour cet effet toutes les dénominations employées dans le précedent article au centre de forces B, & ſuppoſons par raport à l'autre centre de forces en A les diſtances A H y, y', y'' y''' &c. & les forces acceleratrices correſpondantes Y, Y', Y'', Y''' &c. Là deſſus le principe de la conſervation des forces vives ſera exprimé par cette équation

$$mvv+m'v'v'+m''v''v''+m'''v'''v'''+\&c. = -2m(\int\xi dx+\int Y dy)-2m'(\int\xi' dx'+\int Y' dy') -2m''(\int\xi'' dx''+\int Y'' dy'')-2m'''(\int\xi''' dx'''+\int Y''' dy''')-\&c.$$

L'exemple de la gravitation vers chaque centre de forces réciproquement proportionelle aux quarrés des diſtances, (ſi nous indiquons par raport au centre A par β & par α, α', α'', α''' &c. ce que nous indiquons par raport au centre B par b & par a, a', a'', a''' &c.) nous fournit cette équation

$$mvv + m'v'v' + m''v''v'' + m'''v'''v''' + \&c = 2m\left(\frac{bb}{x} - \frac{bb}{a} + \frac{\beta\beta}{y} - \frac{\beta\beta}{\alpha}\right) + 2m'\left(\frac{bb}{x'} - \frac{bb}{a'} + \frac{\beta\beta}{y'} - \frac{\beta\beta}{\alpha'}\right)$$
$$+ 2m''\left(\frac{bb}{x''} - \frac{bb}{a''} + \frac{\beta\beta}{y''} - \frac{\beta\beta}{\alpha''}\right) + 2m'''\left(\frac{bb}{x'''} - \frac{bb}{a'''} + \frac{\beta\beta}{y'''} - \frac{\beta\beta}{\alpha'''}\right) + \&c.$$

VIII. On voit assez par ce que je viens d'exposer, que notre theorie s'etend à tant de centres de forces qu'on voudra supposer, & qu'il sera toujours vrai de dire, que la force vive entiere d'un corps simple est celle qui resulte en prenant la force vive pour chaque centre de gravitation à part, suivant le § 6, & en ajoutant ensemble toutes ces forces vives partielles. De là on connoitra toujours les quantités $mvv + m'v'v' + m''v''v'' + m'''v'''v'''$ &c. que nous avons considerées au § 2. & que nous avons dit exprimer généralement la force vive totale d'un sisteme.

IX. Toutes ces remarques sur les forces vives & leur admirable conservation m'ont engagé à examiner encore ce qui doit arrivet, lorsque les centres des gravitations changent eux-mêmes de place. Cela se peut faire d'une infinité de façons extrémement differentes; je n'en examinerai qu'une seule pour n'etre pas trop prolixe dans des recherches, qui sont assez faciles d'elles mêmes. Je considérerai les corps doués d'une vertu attractive reciproquement proportionelle aux quarrés des distances: j'entreprends cet examen d'autant plus volontiers, qu'il pourra peut-être repandre quelque nouvelle lumiere sur le sisteme de Mr. *Newton*.

X. Supposons d'abord deux corps; ces deux corps s'attireront mutuellement avec une force égale, quoiqu'eux-mêmes inegaux: d'ailleurs chaque élément de l'un attire chaque élément de l'autre: d'où il suit que la force attractrice mutuelle absoluë doit toujours être estimée par le produit des masses des deux corps, tout le reste étant égal: ainsi si la masse de l'un devenoit dix fois plus grande & la masse de l'autre vingt fois plus grande, la force absoluë de l'attraction mutuelle en deviendroit 200 fois plus grande. Ceci supposé cependant, qu'une même quantité de matiere est douée d'une égale vertu attractive, principe que je ne prends pas encore pour tout à fait sûr par raport à toute la matiere qui compose l'univers; il n'y a sans doute aucune

contradiction à ſuppoſer que la vertu attractive, de même que l'inertie de la matiere qui compoſe le Soleil, puiſſent être differentes de la vertu attractive & de l'inertie de la matiere, qui compoſe les Planetes: & ſi on ſuppoſoit la vertu attractive incomparablement plus petite, ou l'inertie incomparablement plus grande dans la matiere du Soleil que dans celle des Planetes, le Soleil ne pourroit être déplacé par les differentes configurations des Planetes; & peut être que cette ſuppoſition eſt plus conforme aux Obſervations aſtronomiques rapportées à un même ſiſteme, que n'eſt celle de Mr. *Newton*. Si l'on vouloit donc conſiderer les corps comme doues d'une vertu attractive differente, il faudroit multiplier encore chaque maſſe par ſa vertu attractive; nous nous tiendrons ici à la premiere hypotheſe, comme plus ſimple, & pour déterminer tout par des quantités abſolues, nous ſuppoſerons qu'une maſſe μ ſous une diſtance ϱ cauſe dans un élément de corps une force acceleratrice, qui ſoit égale à la peſanteur naturelle exprimée par l'unité. Ainſi la quantité μ pourra exprimer toute la matiere de la terre, & la quantité ϱ le rayon de la terre. Sil y a donc deux corps, dont les maſſes ſoyent exprimées par M & m, & leur diſtance par x, ces deux corps s'attireront l'un l'autre avec une force $\frac{\varrho\varrho}{xx} \cdot \frac{Mm}{\mu}$, & la force acceleratrice du corps M ſera $\frac{\varrho\varrho}{xx} \cdot \frac{m}{\mu}$ & celle de l'autre corps $\frac{\varrho\varrho}{xx} \cdot \frac{M}{\mu}$.

XI. Si les deux corps dont nous venons de parler ſont en liberté de s'approcher l'un de l'autre en ligne droite; ſi leur diſtance initielle eſt $= a$; la force vive du corps M ſera $= \frac{2Mm}{\mu} \cdot \frac{m}{M+m} \cdot (\frac{\varrho\varrho}{x} - \frac{\varrho\varrho}{a})$ & la force vive du corps $m = \frac{2Mm}{\mu} \cdot \frac{M}{M+m} \cdot (\frac{\varrho\varrho}{x} - \frac{\varrho\varrho}{a})$ & la ſomme des forces vives $= \frac{2Mm}{\mu} \cdot (\frac{\varrho\varrho}{x} - \frac{\varrho\varrho}{a})$.

Voilà

Voilà quelle ſera la force vive, lorsque les deux corps ſe meuvent avec une liberté entiere ; je dis maintenant que cette force vive ſera conſervée, de quelle maniere que les deux corps changent leur diſtance initielle a en x.

Qu'on s'imagine une courbe quelconque A B C (*fig. 3.*) ſur laquelle gliſſe librement le corps M & une autre courbe D E F que décrive l'autre corps m : qu'on ſuppoſe les corps avoir été au commencement en A & D, & qu'ils ſoyent parvenus dans une ſituation quelconque B & E ; Soit la droite A D $=a$; la droite B E $=x$; je dis que la force vive des corps en B & E ſera toujours $= \frac{2\,M\,m}{\mu} \cdot \left(\frac{\varrho\varrho}{x} - \frac{\varrho\varrho}{a}\right)$, & par conſéquent la même que ſi le corps en A étoit entierement arreté, & que l'autre corps en D s'approchât librement & en ligne droite vers le point A de la quantité $a - x$, de ſorte que la ſomme des forces vives acquiſes dépend encore uniquement de la diſtance initielle & de la diſtance finale des corps, ou des centres de gravitation mobiles, tout comme pour les centres de gravitation immobiles.

XII. S'il y a trois corps, qui s'attirent tous mutuellement, dont les maſſes ſoyent exprimées par m, m' & m'' ; ſi la diſtance initielle entre les corps m & m' eſt ſuppoſée $= a$, entre les corps m & m'' $= b$, & celle d'entre les corps m' & m'' $= c$; ſi ces diſtances ſont changées en x, y & z, je dis que la force vive des trois corps ſera toujours $= \frac{2\,m\,m'}{\mu} \cdot \left(\frac{\varrho\varrho}{x} - \frac{\varrho\varrho}{a}\right) + \frac{2\,m\,m''}{\mu} \cdot \left(\frac{\varrho\varrho}{y} - \frac{\varrho\varrho}{b}\right) + \frac{2\,m'\,m''}{\mu} \cdot \left(\frac{\varrho\varrho}{z} - \frac{\varrho\varrho}{c}\right)$.

XIII. Voici à preſent la régle générale pour tant de corps qu'on voudra ſuppoſer : Je dis donc, qu'il faut conſiderer tous les corps deux à deux par toutes les combinaiſons poſſibles, & puis chercher par le § 11. la force vive pour chaque approchement, qui s'eſt fait entre

deux corps & que la ſomme des ces forces vives partielles ſera la force vive entiere de tous les corps. Si le nombre des corps eſt n, le nombre des combinaiſons ſera $\frac{n(n-1)}{2}$ & il y aura autant de forces vives partielles qui compoſeront la force vive entiere. Et cette règle eſt vraie, de quelque façon que les corps ſoyent aſſujettis à un ſiſteme, tout comme ſi chaque corps étoit entierement libre ; donc la route des corps ne ſauroit en aucune façon alterer cette loy générale.

XIV. La règle générale que nous venons de donner eſt vraie ſans exception pour telle autre loi de gravitations mutuelles, qu'on voudra ſuppoſer : ce n'etoit que pour rendre les formules plus préciſes & plus intelligibles, en évitant les ſignes ſommatoires, que je ſuis deſcendu à l'hypotheſe particuliere de l'attraction réciproquement proportionelle aux quarrés des diſtances. On voit donc que la nature ne s'ecarte jamais du grand principe de la conſervation des forces vives ; ce que je m'etois principalement propoſé d'etablir dans ces recherches & dans ces remarques.

XV. Si le ſiſteme des corps ne commence pas ſon mouvement depuis le repos, il faudra entendre de l'augmentation de forces vives, ce que nous avons allegué ſur la force vive acquiſe. Je comtois d'appliquer la theorie que nous venons d'etablir à quelques problémes ; mais d'autres occupations m'en ont empêché ; ce ſera peut-etre le ſujet du premier memoire, que j'aurai l'honneur de préſenter à l'Academie Royale des Sciences.

ME-

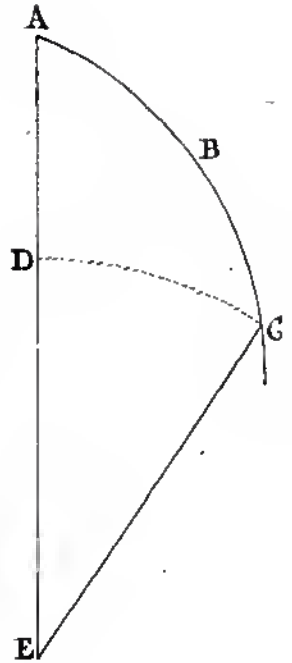


Fig. 1.

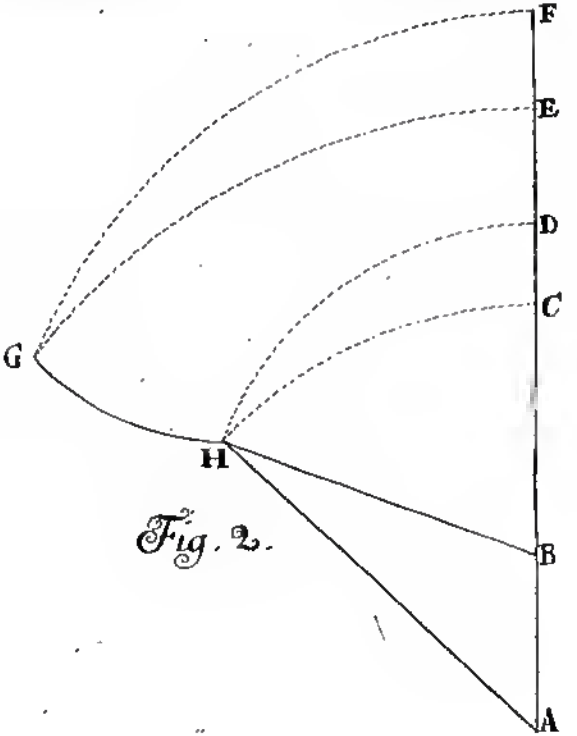


Fig. 2.

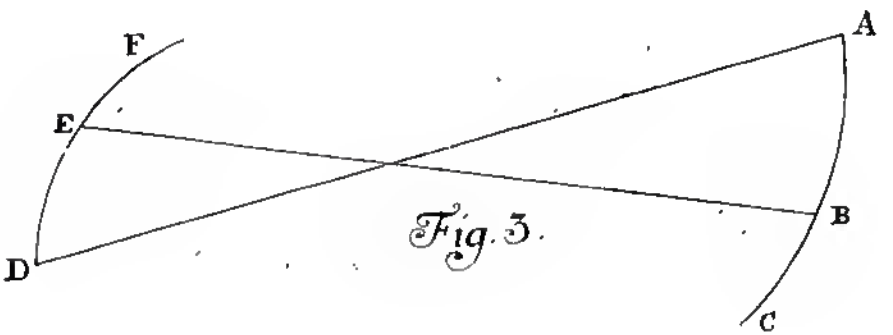


Fig. 3.

MEMOIRES

DE

L'ACADEMIE ROYALE

DES

SCIENCES

ET

BELLES LETTRES.

CLASSE DE BELLES LETTRES.

* *
*

FREDERIC III.

PREMIER ROY DE PRUSSE.

Frèderic III. naquit à Königsberg en Pruſſe le 22. de Juillet 1657. de Louïſe Henriette d'Orange, premiere femme du Grand Electeur. Sa Mére mourut, & l'Electrice Dorothée ſa Belle Mère lui donna dans ſa jeuneſſe des chagrins violens. Elle trouva le moyen d'aigrir l'eſprit de Frèderic Guillaume contre ce fils du premier lit, qui étoit infirme, contrefait, & dont l'education avoit été aſſés négligée. L'aigreur du Pere alla jusqu'au point, qu'il auroit vû ſans regret paſſer ſa Succeſſion au Prince Philippe ſon ſecond fils.

On oſa ſoupçonner dans ces tems l'Electrice d'avoir tenté de ſe défaire par le poiſon de ſon Beau-fils, mais outre qu'on n'en apporte aucune preuve certaine, & que ce fait eſt avancé aſſés legèrement, il ne doit point trouver place dans l'Hiſtoire; qui, étant l'Archive de la verité, ne doit point ſouïller la mémoire des Grands, par des forfaits atroces, ſans avoir en main la conviction de ces crimes.

Les faits juſtifient l'Electrice ; Car ce qu'il y a de ſûr, c'eſt que Frèderic III. vécut, qu'il épouſa en 1679. en prémieres Nôces Elizabeth Henriette, fille de Guillaume VI. Landgrawe de Heſſe ; qu'il ſe remaria * aprés ſa mort avec Sophie Charlotte, fille du Duc d'Ha-

* 1684.

novre

novre Erneſt Auguſte, & Soeur de George, qui depuis devint Roy d'Angleterre.

L'Electrice Dorothée en vouloit plutôt aux biens, qu'à la vie de ce Prince. On aſſure que le Grand Electeur ſe détermina ſur ſes ſollicitations à faire un Teſtament, par lequel il partagea toutes les acquiſitions qu'il avoit faites pendant ſon Regne entre ſes enfans du ſecond lit. Le parti Autrichien ſe ſervit habilement de ce Teſtament pour indiſpoſer l'Electeur contre la France. L'Empereur s'engagea d'annuler cette diſpoſition paternelle, à condition que Frederic III. lui rendit le Cercle de Swibus; nous verrons dans la ſuite de cette Hiſtoire comment cette Convention s'exécuta.

1683. L'Avenement à la Régence de Frederic III. devint l'Epoque d'une nouvelle Guerre. Louïs XIV. en fut l'Auteur; Il demandoit quelques Baillages du Palatinat, comme devant revenir à Madame d'Orléans. Il ſe plaignoit de l'injure que les Princes Allemans lui avoient faite de ſe liguer à Augsbourg contre la France; Il déclaroit que ſon honneur étoit engagé à ſoutenir l'Election que les Chanoines de Cologne avoient faite du Prince de Furſtemberg, à laquelle l'Empereur s'oppoſoit.

Cette Déclaration de Guerre fut ſoutenüe par des Armées. Les Maréchaux de Duras & de Montglas prirent Worms, Philipsbourg, & Mayence. Le Dauphin fit en perſonne les Siéges de Manheim & de Franckendahl. Presque tout le cours du Rhin paſſa en moins d'une Campagne ſous la domination Françoiſe.

1689. L'Electeur qui chargeoit la France de tous les chagrins que ſa Belle-Mére lui avoit donnés, à cauſe qu'elle eut ſes raiſons pour engager Frederic Guillaume dans le parti de Louïs XIV. étoit rempli d'une haine aveugle pour tout ce qui étoit François. Les Partiſans de l'Empereur nourriſſoient ſoigneuſement cette haine, dont il ne pouvoit réſulter pour eux que des avantages; ils la fomentoient encore en créant le fantôme de la Monarchie Univerſelle de Louïs XIV. avec lequel ils enforceloient la moitié de l'Europe. L'Allemagne fut ſouvent

vent émûë par cette machine puérile, & plongée dans des guerres qui lui étoient tout à fait étrangéres; mais comme la trempe des meilleures armes vient enfin à s'émouſſer, ces argumens perdirent inſenſiblement la force de l'illuſion, & les Princes Allemands comprirent que s'il y avoit pour eux un Deſpotisme à craindre, ce n'etoit pas celui de Louïs XIV.

Dans ces tems là le charme étoit encore dans ſa premiere force, & il opéra avec efficace ſur un eſprit préparé par ſes préjugés à en recevoir l'impreſſion favorablement. Frèderic III. ſe crut donc obligé de ſecourir l'Empereur. Il envoya le General Schöning avec un Corps conſidérable ſur le Haut Rhin. Les Brandebourgeois s'emparerent de Rhinbergue; l'Electeur prit en perſonne le commandement de l'Armée, & il mit le Siége devant Bonn. Mayence ſe rendit aux Alliés; Les troupes qui avoient pris cette Ville ſe joignirent à celles de l'Electeur, & empêcherent Boufflers de ſecourir Bonn; d'Asfeldt qui en étoit Gouverneur, rendit cette Ville par Capitulation le 12. d'Octobre.

L'Electeur fit encore la Campagne ſuivante, & continua de fournir des ſecours conſidérables aux Alliés contre la France. 1690.

Guillaume d'Orange avoit entrepris la Conquête de l'Angleterre, peu de tems aprés la mort du grand Electeur. Un Juif d'Amſterdam, nommé Schwartzau, lui prêta 2. Millions pour cette expedition, en lui diſant: Si vous êtes heureux, je ſais que vous me les rendrez; Si vous êtes malheureux, je conſens de les perdre. Guillaume paſſa avec cette ſomme en Angleterre, détrona le Roy Jaques ſon Beau-Pére, battit le parti des Oppoſans, & devint en quelque façon Souverain légitime de ces trois Royaumes, par l'approbation du Peuple qui ſembla autoriſer ſon Uſurpation. Jaques, qui n'avoit pû ſe faire conſiderer ſur le Trône, ni régner ſur une Nation dont il devoit reſpecter les Privileges, laiſſa échapper le Sceptre de ſes mains, & pourſuivi par ſes propres enfans qui lui avoient arraché la Couronne, il ſe réfugia en France. où ſa Dignité & ſes Malheurs ne purent le faire eſtimer.

1691. Le nouveau Roy d'Angleterre prit le Commandement de l'Armée des Alliés. Il gouvernoit l'Europe par ſes intrigues, en excitant la jalouſie de tous les Princes contre la Puiſſance de Louïs XIV. qu'il haïſſoit. Le Monde étoit armé & en guerre, pour lui conſerver le Deſpotisme avec lequel il gouvernoit les Provinces Unies, qu'il auroit perdu en tems de paix. On l'appelloit le Roy d'Hollande, & le Stadthouder d'Angleterre. Malheureux à la guerre où il fut presque toujours battu ; fécond & vigilant à réparer ſes pertes ; c'étoit l'Hidre de la fable qui ſe reproduiſoit ſans ceſſe, & qui étoit auſſi reſpecté de ſes Ennemis aprés ſes défaites, que Louïs XIV. l'étoit aprés ſes Victoires. Il eut une entrevüe avec l'Electeur au ſujet des Intérêts politiques du tems.

Les Caractéres de ces Princes étoient trop différens pour qu'il pût réſulter quelque choſe d'important de leurs délibérations. Guillaume étoit froid, ſimple dans ſes moeurs, & rempli de choſes ſolides ; Frèderic III. étoit inquiet, impatient, préoccupé de ſa Grandeur & de ſa Magnificence, réglant ſes moindres actions ſur l'exact compas du Cérémonial, & ſur les nuances des Dignités. Un fauteüil & une chaiſe à dos penſérent brouiller ces Princes pour jamais. Cependant 15, 000. Brandebourgeois joignirent l'Armée de Flandres que le Roy Guillaume commandoit, & l'Electeur envoya un autre ſecours conſidérable à l'Empereur contre les Infideles. Ces troupes ſe diſtinguerent à la Bataille de Salanquemen, que le Prince Eugene gagna ſur les Turcs.

1692. Le Roy Guillaume, ou moins heureux, ou moins habile, perdit en Flandres les Batailles de Leuſen & de Landen.

1693. Le Duc Erneſt Auguſte de Hanovre, Beau-Pére de Frèderic III. fournit également à l'Empereur un Corps de 6000. hommes pour la Guerre d'Hongrie, & en récompenſe de ce ſecours il obtint la Dignité Electorale. La Création de ce neuviéme Electorat rencontra beaucoup d'oppoſitions dans l'Empire. Il ne ſe trouva que les Electeurs de Brandebourg & de Saxe qui l'appuyerent, mais l'Empereur qui avoit beſoin de ſecours réels, ne crût pas les acheter trop cher en les payant par des titres frivoles.

Il

Il ſembloit que c'étoit la ſaiſon où l'ambition des Princes devoit germer & éclorre. Le tems pour leur accroiſſement étoit ſi favorable, que Guillaume d'Orange étoit devenu Roy d'Angleterre, & Erneſt d'Hanovre, Electeur. Auguſte de Saxe étoit ſur le point de devenir Roi de Pologne, & Frèderic III. rouloit déjà dans ſa tête le deſſein de ſa Royauté.

Comme c'eſt un des articles principaux de la vie de ce Prince, un événement important à la Maiſon de Brandebourg, & que le projet de la Royauté eſt un noeud auquel tiennent toutes les actions de Frèderic III. il eſt néceſſaire que j'expoſe ici ce qui y donna lieu, par quels moyens on l'éxécuta, & quelques détails qui influerent dans la Politique de ces tems.

L'Ambition de Frèderic III. ſe trouvoit reſſerrée, tant par ſon Etat que par ſes poſſeſſions ; ſa foibleſſe ne lui permettoit pas de s'agrandir ſur des Voiſins auſſi forts & auſſi puiſſans que lui; il ne reſtoit de reſſources à ce Prince que l'enflure des Titres, pour ſuppléer à l'intrinſéque de la Puiſſance. Auſſi tous ſes Voeux ſe tournerent du coté de la Royauté.

On trouve dans les Archives un Mémoire raiſonné qu'on attribüe au Pére Vota, Jeſuite: il roule ſur le choix des titres de Roi des Vandales, ou de Roy de Pruſſe, & ſur les avantages qui reviendront de la Royauté. Il paroit que c'eſt abuſivement qu'on attribüe cet Ouvrage à ce Jeſuite, d'autant plus que ſa Societé ne pouvoit prendre aucun interêt à l'agrandiſſement d'un Prince Proteſtant ; il eſt plus naturel de ſuppoſer que l'elévation du Prince d' Orange, & les eſpérances d'Auguſte de Saxe, donnerent de la jalouſie a Frèderic III. & excitcrent en lui l'émulation de ſe placer ſur un Trône comme eux. On ſe trompe toujours, ſi l'on cherche hors des paſſions & du coeur humain, les principes des actions des hommes.

Ce projet étoit ſi difficile dans ſon éxecution qu'il parut chimérique au Conſeil de l'Electeur. Ses Miniſtres, Danckelmann & Fuchs, ſe récrioient ſur ſa frivolité, ſur les obſtacles inſurmontables qu'ils prévoyoient à le faire réüſſir, ſur le peu d'utilité qu'on devoit s'en promettre, & ſur la péſanteur du fardeau dont on ſe chargeoit par

une Dignité onereuſe à ſoutenir, qui, dans le fonds ne rapporteroit que de vains honneurs. Mais toutes ces raiſons ne purent rien ſur l'eſprit d'un Prince imbu de ſes idées, jaloux de ſes Voiſins, & avide de Grandeurs & de Magnificence.

Danekelmann data ſa disgrace de ce jour. Il fut envoyé à Spandow dans la ſuite pour avoir dit ſes ſentimens avec hardieſſe, & pour avoir montré la verité avec trop peu d'adoucieſſement à une Cour corrompüe par la flatterie, & contredit un Prince vain dans les projets de ſa Grandeur.

Il y a un milieu entre le poiſon de la flatterie & la rigidité ſalutaire de la vérité, qui ſe peut concilier avec le caractére d'un homme d'honneur. Les leçons d'un Miſantrope revoltent, mais les conſeils dont on modifie la rudeſſe, ſont comme ce miel dont on a frotté les bords d'un vaſe rempli d'abſynthe. C'eſt un véhicule qui en dérobe l'amertume. Heureux ſont les Princes dont les oreilles moins délicates aiment la vérité, lors même qu'elle eſt prodiguée par des bouches indiſcretes; mais c'eſt un effort de vertu, dont peu d'hommes ſont capables.

A' la faveur de Danckelmann ſuceeda un jeune Courtiſan peu connu par ſon génie & par ſes talens; c'étoit le Baron de Colbe, depuis Comte de Wartemberg. Sans avoir ces qualités brillantes qui enlevent les ſuffrages, il poſſedoit l'art de la Cour, qui eſt celui de l'aſſiduïté, de la flatterie, & en un mot de la baſſeſſe; il entra aveuglément dans les vües de ſon Maitre, perſuadé que ſervir ſes paſſions, c'étoit affermir ſa fortune particuliere.

Colbe n'etoit pas aſſés privé de lumiére pour ne pas s'appercevoir qu'il avoit beſoin d'un guide habile dans ſa nouvelle carrière. D'Ilgen, Secretaire dans le Bureau des affaires étrangéres, gagna ſa confiance, & le dirigea avec tant de prudence que Colbe fut declaré Premier Miniſtre, & qu'il fut mis à la tête du Département des Affaires Etrangéres.

Dans le fonds Frèderic III. n'étoit flatté que par les dehors de la Royauté, par le faſte de la repréſentation, & par un certain travers de l'amour propre, qui ſe plait a faire ſentir aux autres leur Infériorité.

Ce

Ce qui fut en effet l'ouvrage d'une vanité bourgeoiſe & puérile, ſe trouva dans la ſuite un Chef d'oeuvre de Politique : car la Royauté tira la Maiſon de Brandebourg de ce joug de ſervitude, où la maiſon d'Autriche tenoit alors tous les Princes d'Allemagne. C'étoit une amorce que Frèderic III. jettoit à toute ſa Poſtérité, & par laquelle il ſembloit leur dire.

„Je vous ai acquis un Titre, rendez-vous en digne ; j'ai jetté „les fondemens de vôtre Grandeur ; c'eſt à vous d'achever l'Ou„vrage.

Frèderic III. fut obligé de remuër tous les reſſorts de la Politique, & d'épuiſer toutes les reſſources de l'intrigue, pour conduire ſon projet jusqu'à ſa maturité. C'étoit un préalable de s'aſſurer des bonnes diſpoſitions de l'Empereur ; ſon approbation entrainoit les ſuffrages de tout le Corps Germanique. Pour prévenir l'eſprit de ce Prince favorablement, l'Electeur lui remit le Cercle de Swibus, & il ſe contenta de l'expectance ſur la Principauté de Friſe, & la Baronie de Limbourg, ſur leſquelles la Maiſon Electorale avoit d'ailleurs des droits inconteſtables. Par les mêmes principes les Troupes Brandebourgeoiſes ſervirent dans les armées Impériales en Flandre, au Rhin, & en Hongrie, quoique l'Electeur n'eut directement, ni indirectement, part à ces guerres, & qu'il eût été plus avantageux à ſes intérêts d'obſerver une exacte neutralité.

Pendant que l'Europe étoit déchirée par des guerres violentes, 1695.
l'Electeur accommoda à l'exemple de ſon Père, les Ducs de Mecklenbourg Schwerin & de Strelitz, qui avoient entr'eux des démêlés de Succeſſion. L'Univerſité de Halle fut fondée *. Il fit conſtruire ces * en 1696.
belles Ecluſes ſur la Salle, qui facilitent le negoce & le tranſport des Sels, † & il reçût chez lui cette Ambaſſade unique & ſingulière, à la † 1697.
ſuite de laquelle ſe trouvoit le Czar Pierre Alexiowiz.

Ce jeune Czar s'étoit apperçû à force de génie qu'il étoit un Barbare, & que ſa Nation étoit ſauvage ; il ſortoit alors pour la premiere fois de ſes Etats, ayant formé le noble projet de s'inſtruire, & de rapporter dans le ſein de ſa Patrie, les lumiéres de la Raiſon, & l'induſtrie qui lui manquoient. La Nature avoit fait de ce Prince un

grand homme, mais un défaut total d'éducation l'avoit laiſſé ſauvage. De là réſultoit ſans ceſſe dans ſa conduite un mêlange extraordinaire d'actions véritablement grandes & de ſingularités, de reparties ſpirituelles & de manieres groſſieres, de deſſeins ſalutaires & de vengeances cruelles. Il ſe plaignoit lui-même de ce que, parvenant à policer ſa Nation, il ne pouvoit encore dompter ſa propre ferocité. En morale c'étoit un Phénomene bizarre, qui inſpiroit l'admiration & la terreur. Pour ſes ſujets c'étoit un orage, dont la foudre abattoit les Clochers & les Arbres, & dont la pluye rendoit les Contrées fécondes. De Berlin il ſe rendit en Hollande, & de là en Angleterre.

L'Europe s'acheminoit dès lors à grands pas vers la Paix générale. Les Alliés étoient rebutés du mauvais ſuccés de leurs Armes; & Louïs XIV. qui voyoit Charles II. Roy d'Eſpagne ſur ſon déclin, d'un tempérament à ne pas promettre une longue vie, ſe prêta facilement à la paix; quoiqu'il rendit ſes Conquêtes preſque ſans reſtriction, il ſacrifia ces avantages paſſagers à des deſſeins plus importans. Il lui falloit l'aiſance de la paix pour les préparatifs d'une nouvelle guerre, dont l'objet étoit de la derniere conſéquence pour la maiſon de Bourbon. La Paix fut concluë à Ryswick, & l'Electeur qui n'avoit concouru à cette guerre que par complaiſance, n'en retira non plus aucun avantage.

Dans le Nord, Auguſte de Saxe fut élû Roy de Pologne, & les intrigues de Flemming ſon Miniſtre, & ſon Général, l'emporterent ſur
* 1698. les liberalités du Prince de Conti. * Le nouveau Roy de Pologne s'étoit épuiſé par ſes dépenſes, ce qui l'obligea de vendre a Frèderic III.
† 1699. l'Avocatie de l'Abbaye de Quedlinbourg & du Petersberg de Halle †.

L'Electeur profita des troubles de la Pologne, & s'empara d'Elbing, pour ſe rembourſer d'une ſomme que les Polonois lui devoient. On moyenna un accommodement par lequel les Polonois lui engagerent une Couronne & des bijoux Ruſſiens. Aprés quoi l'Electeur fit évacuer la Ville, & conſerva, du conſentement de la République, la poſſeſſion du territoire d'Elbing.

L'Europe ne tarda pas d'être agitée par des troubles nouveaux au commencement de ce Siécle, à cauſe de la Succeſſion de Charles II.

II. Roy d'Eſpagne qui vint à mourir, La Maiſon de Bourbon, & celle d'Autriche, ſe la diſputoient.

On avoit eſſayé de prévenir les guerres ſanglantes auxquelles cette Succeſſion donneroit lieu. Louïs XIV. étoit convenu avec les Puiſſances maritimes d'un Traité de partage. On avoit enſuite pris d'autres arrangemens, mais il étoit écrit dans le livre des Deſtins qu'il n'en ſeroit rien. Le jeune Prince de Bavière, deſtiné au Trône d'Eſpagne, mourut même avant Charles II.

L'Empereur proteſtoit d'ailleurs contre tout partage; il ſoutenoit l'indiviſibilité de la Monarchie Eſpagnole, & prétendoit qu'étant d'une même Maiſon, diviſée en deux Branches, elles avoient droit de ſucceder les unes aux autres, celle d'Eſpagne à celle d'Autriche, & celle d'Autriche à celle d'Eſpagne. L'Empereur Leopold & Louïs XIV. étoient au même dégré, tous deux petits-fils de Philippe III. Tous deux avoient épouſé des filles de Philippe IV. Mais le droit d'aîneſſe étoit dans la Maiſon de Bourbon, & Louïs XIV. fondoit principalement ſes droits ſur ce fameux Teſtament de Charles II. que le Cardinal Porto-Carrero, & ſon Confeſſeur, lui firent ſigner, agoniſant & d'une main tremblante. Ce Teſtament changea la face de l'Europe.

Louïs XIV. céda ſes droits a ſon Petit-fils, Philippe d' Anjou, eſperant d'applanir par le choix de ce Prince éloigné du Trône de France les difficultés & les obſtacles que la jalouſie de l'Europe pourroient porter a ſa Grandeur. Philippe paſſa en Eſpagne; il fut reconnu Roy par tous les Princes, à l'exception de l'Empereur Joſeph.

Au commencement de cette Guerre, la France étoit au comble de ſa Grandeur. Elle ſe voyoit victorieuſe de tous ſes ennemis. La Paix de Ryswick faiſoit l'eloge de ſa modération. Louïs XIV. déployoit dans l'Univers entier ſa Splendeur & ſa Magnificence; Il étoit craint & reſpecté. La France étoit comme un Athléte, préparée ſeule au combat, qui entroit dans une lice où il ne paroiſſoit encore aucun adverſaire; rien n'étoit épargné pour les préparatifs des Armemens de terre & des Armemens de Mer, également nombreux. Dans ſes plus violens efforts, cette Monarchie entretint 400. mille Combattans, mais les grands

grands Généraux étoient morts, & il ſe trouva, (avant que le merite de Villars ſe fut fait connoitre,) que la France avoit 800. Mille bras, mais point de tête: tant il eſt vrai de dire, que la fortune des Etats ne dépend ſouvent que d'un ſeul homme!

La Maiſon d'Autriche étoit bien éloignée de ſe trouver dans une ſituation auſſi heureuſe; elle étoit presque épuiſée par les guerres continuelles qu'elle avoit ſoutenüe. Son Gouvernement étoit dans la langueur & dans la foibleſſe, & cette Puiſſance jointe au Corps Germanique ne pouvoit rien ſans le ſecours des Hollandois, & des Anglois; mais avec moins de reſſources & de troupes que la France, elle avoit à la tête de ſes Armées le Prince Eugene de Savoye.

Le Roy Guillaume, qui gouvernoit l'Angleterre & la Hollande, étoit dans l'engourdiſſement de la ſurpriſe, en apprenant cette nouvelle, & il reconnut le Duc d'Anjou Roy d'Eſpagne par une eſpece de précipitation: mais dés que la réfléxion l'eut ramené à ſon flegme naturel, il ſe déclara pour la maiſon d'Autriche, parce que la Nation Angloiſe le vouloit, & que ſon interêt ſembloit le demander.

Le Nord étoit lui-même plongé dans la guerre que Charles XII. portoit en Dannemarck; la Jeuneſſe de ce Prince avoit inſpiré à ſes voiſins l'audace de l'attaquer; mais ils trouverent un Prince qui joignoit un courage impétueux à des vengeances implacables.

Frèderic III. qui étoit en paix ſe laiſſa entrainer dans la grande Alliance contre Louïs XIV. dont le Roy Guillaume étoit l'ame, pour ſe frayer le chemin de la Royauté par ce ſervice, pour ſubvenir par ſes ſubſides à l'entretien d'un Corps nombreux de troupes, & pour que cet argent étranger ſoulagea la prodigalité de ſa magnificence.

Il eſt difficile de comprendre, comment cette eſpece de fierté qu'ont les ames généreuſes, peut ſe concilier avec la baſſeſſe qu'il y a d'être aux aumônes de ſes égaux. Les tentatives de la France furent vaines pour détacher l'Electeur de cette Alliance; il étoit lié par des ſubſides, par ſon inclination, & par ſes eſperances.

Ce fut dans ces conjonctures que ſe négocia à Vienne le Traité de la Couronne, par lequel l'Empereur s'engagea de reconnoitre

Frè de

Frèderic III. Roy de Pruſſe, moyennant qu'il lui fournit un ſecours de dix mille hommes à ſes dépens pendant le cours de toute cette guerre ; qu'il entretint une Compagnie de Garniſon à Philipsbourg, qu'il aliât de concert avec l'Empereur dans toutes les affaires de l'Empire, que ſa Royauté n'alterât en rien les obligations de ſes Etats d'Allemagne, qu'il renonçât au Subſide que la Maiſon d'Autriche lui devoit, & qu'il promit de donner ſa voix pour l'Election des enfans mâles de l'Empereur Joſeph ; „à moins qu'il n'y eut des raiſons „graves & importantes qui ne l'obligeaſſent d'élire un Empereur d'u„ne autre Maiſon."

Ce Traité fut ſigné & ratifié. Rome cria, & Varſovie ſe tût. L'Ordre Teutonique proteſta contre cet Acte, & oſa revendiquer la Pruſſe; le Roy d'Angleterre qui ne cherchoit que des Ennemis à la France, les achetoit à tout prix. Il avoit beſoin des ſecours de l'Electeur dans la grande Alliance, & il le reconnut des premiers. Le Roy Auguſte qui affermiſſoit ſa Couronne ſur ſa tête, y ſouſcrivit. Le Dannemarck, qui ne craignoit & n'envioit que la Suède, s'y prêta facilement. Charles XII. qui ſoutenoit une guerre difficile ne crut pas qu'il lui convint de chicaner ſur un titre pour augmenter le nombre de ſes Ennemis, & l'Empire fut entraîné par l'Empereur, comme on l'avoit prévû. Ainſi ſe termina cette grande Affaire qui avoit trouvé de l'oppoſition dans le Conſeil de l'Electeur, dans les Cours étrangères, chez les Amis comme chez les Ennemis, à laquelle il fallut une complication de Circonſtances auſſi extraordinaires pour qu'elle put réüſſir, qu'on avoit traitté de chimérique, & dont on prit bientôt une opinion differente. Le Prince Eugene dit en l'apprenant, que l'Empereur devroit faire pendre les Miniſtres qui lui avoient donné un conſeil auſſi perfide.

Le Couronnement ſe fit l'année ſuivante. Le Roy que nous appellerons déſormais Frèderic I. ſe rendit en Pruſſe, & dans la Cérémonie du Sacre, on obſerva qu'il ſe mit luy-même la Couronne ſur la tête. Il créa en mémoire de cet événement l'Ordre des Chevaliers de l'Aigle noir. 1701.

Le Public ne pouvoit cependant pas revenir de la prévention dans laquelle il étoit contre cette Royauté. Le bon ſens du vulgaire déſiroit une augmentation de puiſſance avec une augmentation de Dignités. Ceux qui n'étoient pas Peuple, penſoient de même; il échapa à l'Electrice de dire à quelqu'une de ſes femmes; „Qu'elle é-„toit au déſeſpoir d'aller jouër en Pruſſe la Reine de Théatre vis à „vis de ſon Eſope.“ Elle écrivit à Leibnitz. „Ne croyez pas que je „préfére ces Grandeurs & ces Couronnes, dont on fait ici tant de cas, „aux charmes des entretiens Philoſophiques que nous avons eûs à „Charlottenbourg.

Aux preſſantes ſollicitations de cette Princeſſe, ſe forma à Berlin l'Academie Royale des Sciences, dont Leibnitz fut le fondateur & le Chef. On perſuada à Frèderic I. qu'il convenoit à ſa Royauté d'entretenir une Academie, comme on fait accroire à un nouveau Gentilhomme qu'il eſt ſeant d'entretenir une meute de chaſſe. On ſe propoſe de parler en ſon lieu de cette Academie avec plus d'étendüe.

Le Roy s'abandonna aprés ſon couronnement au penchant qu'il avoit aux Cérémonies & à la magnificence, ſans plus y mettre de bornes. A ſon retour de Pruſſe, il fit une entrée ſuperbe à Berlin.

Pendant le divertiſſement de ces Fêtes & de ces Célébrités, on apprit que Charles XII. cet Alexandre du Nord, qui auroit reſſemblé en tout au Roy de Macedoine, s'il eut eu ſa fortune, venoit de remporter ſur les Saxons auprés de Riga une Victoire complette. Le Roy de Dannemarck & le Czar avoient attaqués, comme on l'a dit, ce jeune Héros, l'un en Norwegue, & l'autre en Livonie. Charles XII. força dans ſa Capitale le Monarque Danois à faire la paix; De là il paſſa avec 8000. Suedois en Livonie, défit 80. mille Ruſſes auprés de Nerva, & battit 30. mille Saxons au paſſage de la Dwina.

La fuite des Saxons les entraîna vers les limites de la Pruſſe. Frèderic I. en fut d'autant plus inquiet que la plus grande partie de ſes troupes ſervoit dans les Armées Impériales, & que la Guerre s'approchoit de ſon nouveau Royaume. Charles XII. promit cependant, en conſidération des interceſſions de l'Empereur, de l'Angleterre & de la Hollande, la neutralité pour la Pruſſe.

Ces

Ces années étoient l'Epoque des triomphes du Roi de Suéde; 1702.
il diſpoſoit en Souverain de la Pologne, ſes négociations étoient des ordres, & ſes Batailles des Victoires: mais ces Victoires toutes brillantes qu'elles étoient, conſumoient les Vainqueurs, & obligoient le Héros à renouveller ſouvent ſes armées. Un transport de troupes Suédoiſes ſe rendit en Pomeranie ; Berlin en prit l'allarme, ces troupes n'en traverſerent pas moins l'Electorat, & ſe rendirent en Pologne au lieu de leur deſtination.

Le Roy leva 8000. hommes de nouvelles troupes. Au lieu de les employer à la ſureté de ſes Etats, il les envoya en Flandres à l'Armée des Alliés, il ſe rendit lui-même au Pays de Cléves pour recueïllir l'héritage de Guillaume d'Orange Roy d'Angleterre, auquel Anne, ſeconde fille du Roy Jaques, ſucceda au Trône.

Les droits de Frèderic I. ſe fondoient ſur le Teſtament de Fréderic Henri d'Orange qui avoit ſubſtitué ſes biens, en cas d'extiction des mâles, ſur ſe chef de ſa fille, Epouſe du Grand Electeur. Le Roy Guillaume laiſſa un Teſtament tout contraire en faveur du Prince Friſon de Naſſow, dont les Etats Généraux devoient être les Exécuteurs. Les biens de la Succeſſion conſiſtoient dans la Principauté d'Orange, de Moeurs, & dans differentes Seigneuries & fonds de terre ſitués en Hollande & en Zélande.

Frèderic I. menaçoit de retirer ſes troupes de la Flandre, ſi on ne lui rendoit juſtice. Cette menace perſuada aux Hollandois que ſes droits étoient légitimes. On parvint cependant à régler un accord proviſionel, qui partageoit l'héritage en deux parties égales. Un gros Diamant fut d'abord remis à Frèderic I. & il conſentit à laiſſer ſes troupes en Flandre. Louïs XIV. mit le Prince de Conti en poſſeſſion d'Orange; le Roy s'en trouva griévement offenſé, il augmenta ſon Armée, & prit même des troupes de Gotha & de Wolffenbuttel à ſon ſervice. Il déclara peu aprés la Guerre à la France, à cauſe que l'Armée de Boufflers avoit commis quelques excés dans le Païs de Cléves. Louïs XIV. ne s'apperçût pas qu'il eut un nouvel ennemi, & le nouveau Roy fit en cela beaucoup pour ſa paſſion, mais rien pour ſes intérets : il manifeſtoit ſa haine pour la France dans toutes les

occaſions ; il obligea le Duc Antoine Ulrich de Wolffenbüttel à renoncer aux engagemens qu'il avoit pris avec Louïs XIV. aprés que les Ducs d'Hanovre & de Zell eurent diſſipé les troupes qu'il entretenoit au moyen des ſubſides François.

1703. Dans ce tems l'Angleterre faiſoit des efforts prodigieux pour la Maiſon d'Autriche. Ses flottes transporterent l'Archi-Duc Charles, (qui depuis devint Empereur,) dans ce Royaume, qu'une Armée Angloiſe devoit aider à lui conquerir. L'enthouſiasme de l'Europe pour la Maiſon d'Autriche ſurpaſſoit tout ce qu'on en peut dire.

Dans cette Guerre de Succeſſion, les Troupes Pruſſiennes ſoutinrent avec éclat la réputation qu'elles avoient acquiſes ſous le grand Electeur. Sur le Rhin, elles prirent Keyſerswerth en Allemagne; dans cette action de Höchſtedt, où Villars ſurprit & battit Stirheim, le Prince d'Anhalt fit une belle retraite avec les 8000. Pruſſiens qu'il commandoit. Je lui ai oüi dire, que lorsqu'il s'apperçut de la confuſion & de la fuite des Autrichiens; il forma un quarré de ſes troupes, & traverſa une grande plaine en bon ordre jusqu'à un bois qu'il gagna vers la nuit, ſans que la Cavalerie Françoiſe osât l'entamer.

Le ſuccés des Troupes Pruſſiennes ſur le Rhin, & leur bonne conduite en Söuabe ne raſſurérent pas Fréderic I. contre l'apprehenſion que lui donnoit le voiſinage des Suédois; rien ne leur réſiſtoit alors. Le génie de Pierre I. la magnificence d'Auguſte, étoient impuiſſans contre la fortune de Charles XII. Ce Héros étoit à la fois plus valeureux que le Czar, & plus vigilant que le Roy de Pologne. Pierre préferoit la ruſe à l'audace, Auguſte les plaiſirs aux travaux, & Charles l'amour de la gloire à la poſſeſſion du Monde entier. Les Saxons étoient ſouvent ſurpris ou battus, les Moſcovites avoient appris à leurs dépens l'art de ſe retirer à propos; ils ne faiſoient qu'une Guerre d'incurſions, les armées Suédoiſes étoient ſeules aſſaillantes, & victorieuſes jusqu'alors. Mais Charles XII. dont l'inflèxible opiniatreté ne molliſſoit jamais, ne ſavoit éxecuter ſes projets que par la force : il domptoit la fortune comme ſes Ennemis. Le Czar & le Roy de Pologne ſuppléoient à cette valeur d'enthouſiasme par les Intrigues du Cabinet; ils éveilloient la jalouſie de l'Europe, & ſuſcitoient l'en-

l'envie contre le bonheur d'un jeune Prince ambitieux, implacable dans ſes haines, & qui ne ſavoit ſe venger des Rois ſes ennemis qu'en les détrônant.

Ces intrigues n'émpecherent pas Frèderic I. qui n'avoit point de troupes à ſa diſpoſition, de conclurre une Alliance défenſive avec Charles XII. qui avoit une Armée victorieuſe dans le voiſinage. Frèderic I. & Stanislas reconnurent reciproquement leur Royauté; le Traité ne dura qu'autant que la fortune de Charles XII. ne ſe démentit point.

Malgré cette Alliance le Roi fournit toutes ſes Places de la Pruſſe, de garniſons ſuffiſantes, & * il envoya de nouveaux ſecours à l'Armée Alliée en Söuabe. Les Pruſſiens y eurent une part conſiderable au gain de la fameuſe Bataille de Höchſtedt; ils étoient à la droite ſous les ordres du Prince d'Anhalt, & de ce Corps d'Armée que le Prince Eugene commandoit. A la premiere attaque la Cavalerie & l'Infanterie Impériale plierent devant les François, & les Bavarois, mais les Pruſſiens ſoutinrent le choc, & enfoncerent les ennemis; le Prince Eugene vint ſe mettre à leur tête, piqué de la mauvaiſe manoeuvre des Autrichiens, il dit qu'il vouloit combattre avec de braves Gens, & non pas avec des Troupes qui lâchoient le pied. C'eſt un fait connu, que Milord Malborough fit une partie de l'Infanterie & de la Cavalerie Françoiſe priſonniére au Village de Blenheim, & que le gain de cette Bataille fit perdre aux François la Baviére & la Söuabe. 1703. * 1704.

Milord Malborough ſe rendit à Berlin, aprés avoir terminé cette glorieuſe Campagne, pour diſpoſer Frèderic I. à l'envoy d'un Corps de ſes troupes en Italie. Cet Anglois qui avoit jugé des projet de Charles XII. en voyant une Carte Geographique étendüe ſur ſa table, pénétra facilement le caractère de Frèderic I. en jettant un regard ſur ſa Cour: il étoit rempli de ſoumiſſions & de ſoupleſſes devant ce Prince, il flattoit adroitement ſa vanité & s'empreſſoit à lui préſenter l'éguiere, lorsqu'il ſe levoit de table. Frèderic ne put lui réſiſter, & il accorda aux flatteries du Courtiſan ce qu'il auroit peut-être refuſé au mérite du Grand Capitaine, & à l'habileté du profond

Politique, & le Prince d'Anhalt marcha en Italie à la tête de 8000. hommes.

1705. La mort de la Reine Sophie Charlotte mit alors toute la Cour en deuïl. C'étoit une Princeſſe d'un merite diſtingué, qui joignoit tous les appas de ſon Sexe aux graces de l'eſprit & aux lumières de la raiſon. Elle avoit voyagé dans ſa jeuneſſe en Italie & en France, ſous la conduite de ſes Parens. On la deſtinoit pour le Trône de France ; Louïs XIV. fut touché de ſa Beauté, mais des raiſons de politique firent échoüer ce mariage. Cette Princeſſe amena en Pruſſe l'eſprit de la Société, la vraye Politeſſe, & l'Amour des Arts & des Sciences. Elle fonda, comme on l'a dit plus haut, l'Academie Royale. Elle appella Leibnitz, & beaucoup d'autres Savans à ſa Cour: ſa curioſité vouloit ſaiſir les premiers principes des choſes. Leibnitz qu'elle preſſoit un jour ſur ce ſujet, lui dit ; „Madame, il n'y a pas moyen „de vous contenter: vous voulez ſavoir le pourquoi du pourquoi." Charlottembourg étoit le rendés-vous des gens de goût; toutes ſortes de divertiſſemens & de fêtes variées a l'infini rendoient ce ſéjour délicieux, & cette Cour brillante.

Sophie Charlotte avoit l'ame forte, ſa Religion étoit épurée, ſon humeur douce, ſon eſprit orné de la Lecture de tous les bons Livres François & Italiens. Elle mourut à Hanovre dans le ſein de ſa famille. On voulut introduire un Miniſtre Réformé dans ſon appartement: „Laiſſez-moi mourir, lui dit elle, ſans diſputer.„ Une Dame d'honneur qu'elle aimoit beaucoup, ſe fondoit en larmes. „Ne me plaignez „pas, reprit elle, car je vais à preſent ſatisfaire ma curioſité ſur les „principes des choſes, que Leibnitz n'a jamais pû m'expliquer, ſur „l'eſpace, ſur l'infini, ſur l'Etre, & ſur le Néant, & je prépare au „Roi mon Epoux le Spectacle de mon Enterrement, où il aura une „nouvelle occaſion de déployer ſa magnificence.„ Elle recommanda en mourant les Savans qu'elle avoit protégés, & les Arts qu'elle avoit cultivés, à l'Electeur ſon frere. Frèderic I. ſe conſola par la cérémonie de cette Pompe funébre, de la perte d'une Epouſe qu'il n'auroit jamais aſſés pû regretter.

En

En Italie la Guerre commençoit à devenir plus vive. Les Prus- 1606.
ſiens que Milord Malborough y avoit fait marcher, furent battus à Caſano avec le Prince Eugene, & à Calcinato, lorsque le Général Reventlau qui les commandoit, y fût ſurpris par le grand Prieur.

Le Prince Eugene pouvoit être battu, mais il ſavoit réparer ſes 1607.
pertes en grand homme, & l'echec de Caſano fut bientôt oublié par le gain de la fameuſe Bataille de Turin, auquel les Pruſſiens eurent la part principale. Quoique le Duc d'Orleans propoſât aux François de ſortir de leurs retranchemens, ſon avis ne fut point ſuivi; la Feuillade & Marſin avoient des Ordres de la Cour, qui portoient, à ce qu'on aſſure, de ne point hazarder de bataille. Celle de Höchſtedt avoit rendu, à ce qu'il paroit, le Conſeil de Louïs XIV. plus circonſpect.

Les François qui auroient été du double ſuperieurs aux Alliés, s'ils les avoient attaqués hors de leurs Retranchemens, leur furent inférieurs partout, à cauſe que les quartiers différens qu'ils avoient à défendre, étoient d'une étendüe immenſe, & de plus ſéparés.

Les Pruſſiens qui avoient l'aile gauche de l'Armée des Alliés, attaquerent la droite du retranchement François qui s'appuyoit à la Doria. Le Prince d'Anhalt étoit déjà aux bords du foſſé, & la réſiſtance des ennemis rallentiſſoit la vigueur de ſon attaque, lorsque 3. Grenadiers ſe gliſſerent le long de la Doria, & tournerent le Retranchement François par un endroit où il n'étoit pas bien appuyé à cette Riviére. Tout d'un coup une voix s'entendit dans l'armée Françoiſe: nous ſommes coupés; elle abandonne ſon poſte, prend la fuite, & en même tems le Prince d'Anhalt eſcalade le retranchement, & gagne la Bataille. Le Prince Eugene en fit un Compliment au Roy, où l'eloge de ſes troupes devoit lui faire d'autant plus de plaiſir qu'il partoit d'un Prince qui devoit bien s'y connoitre.

Frèderic I. fit pendant cette guerre quelques acquiſitions paciſiques. Il acheta le Comté de Tecklenbourg en Weſtphalie du Comte de Solms Braunſfels; & Madame de Nemours qui étoit en poſſeſſion de la Principauté de Neufchâtel, venant de mourir, le Conſeil d'Etat de Neufchatel prit la Régence, & élut quelques uns de ſes Mem-

bres

bres pour juger des prétentions que le Roy de Pruſſe formoit d'un côté, & tous les Parens de la Maiſon de Longueville d'un autre. La Principauté de Neufchâtel fut adjugée au Roy, comme ayant les meilleurs droits en qualité d'Heritier de la Maiſon d'Orange. Louïs XIV. s'éleva contre cette ſentence, mais il avoit de ſi grands interêts à diſcuter qu'ils firent évanouïr devant eux ces petits litiges, & la Souveraineté de Neufchatel fut aſſurée a la Maiſon Royale par la Paix d'Utrecht.

Charles XII. étoit parvenu alors au plus haut période de ſes proſperités. Il avoit détrôné Auguſte de Pologne, & lui avoit preſcrit les loix d'une paix dure à Alt-Ranſtadt au milieu de la Saxe. Le Roy vouloit diſpoſer ce Prince à quitter la Saxe, il lui envoya ſon Grand Maréſchal Printz pour le prier de ne point troubler la paix de l'Allemagne par le ſejour qu'il y faiſoit avec ſes troupes.

Charles XII. qui avoit d'ailleurs le deſſein de quitter les Etats d'un Prince qu'il avoit mis aux abois, pour renouveller la même Scene avec le Czar à Moskow, trouva mauvais que Printz lui fit de pareilles propoſitions, & lui demanda ironiquement: „Si les troupes Pruſſiennes étoient auſſi bonnes que les Brandebourgeoiſes.„ Oui, Sire, lui „répondit l'Envoyé, elles ſont encore compoſées de ces vieux Soldats qui ſe trouverent à Fehrbellin.“ Charles XII. obligea l'Empereur, en paſſant par la Siléſie, de reſtituer 125. Egliſes aux Proteſtans de ce Duché. Le Pape en murmura, & n'épargna pas ſes Cenſures. Joſeph lui répondit, que ſi le Roy de Suède lui eut propoſé de ſe faire Lutherien-lui même, il ne ſavoit pas trop ce qui en ſeroit arrivé.

1708. Ces mêmes Suédois qui faiſoient alors la terreur du Nord, rétablirent avec les Pruſſiens & les Hannovriens le calme dans la Ville de Hambourg, qu'une ſédition populaire avoit troublée. Frèderic I. y envoya 4000. hommes pour ſoutenir les prérogatives des Echevins & des Syndics. Il eut quelques démêlés avec ceux de Cologne, à cauſe que la populace de cette Ville avoit enfoncé les Portes du Réſident Pruſſien, qui tenoit une Chapelle Réformée dans ſa Maiſon. Le Roy fit arrêter des Marchandiſes de Cologne, qui deſcendoient le Rhin,

Rhin, & paſſoient par Weſel, & il menaça d'interdire le culte Catholique dans ſes Etats, ſur le même pied qu'il en avoit uſé, lorsque l'Electeur Palatin avoit perſecuté les Proteſtants du Palatinat. La crainte de ces repréſailles fit rentrer la Ville de Cologne dans ſon devoir, & lui apprit que la tolérance eſt une vertu, qu'il eſt quelquefois même dangereux d'enfreindre.

La Cour de Frèderic I. étoit alors pleine d'intrigues. Ce Prince étoit comme une mer agitée par differens vents, pouſſé tantôt d'un côté, tantôt de l'autre ; mais pendant ces orages qu'excitoient les Courtiſans, d'Ilgen conduiſoit toujours le Gouvernail de l'Etat d'une main ferme & ſure. Les Favoris du Roy étoient des gens de peu de génie. Leurs intrigues étoient groſſiéres, & leurs fourberies ouvertes ; le Prince Royal ne pouvoit déguiſer le mécontentement qu'il avoit de leur conduite. Ces marques de ſa mauvaiſe volonté leur fit penſer à étayer leur credit d'un nouvel appuy, & ils perſuaderent au Roi de ſe marier ; quoiqu'il fut trés infirme, qu'il ne vêcut que par l'art des Medecins, & qu'il chicana par un reſte de tempérament un ſouffle de vie qui lui reſtoit. On lui choiſit une Princeſſe de Mecklenbourg-Schwerin, nommée Sophie Loüiſe, dont l'age, la façon de penſer, & les inclinations ne s'accordoient point avec celles de ce Prince ; il n'eut d'agrément que les Cérémonies de la Nôce, le reſte du mariage ne fut que malheureux.

Frèderic I. ne recevoit que de bonnes nouvelles de ſes troupes : elles ne ſe diſtinguerent pas moins en Flandres qu'en Italie, elles firent des merveilles ſous le Commandement du Comte de Lothum, à la bataille d'Oudenarde & au Siége de Lille.

La fortune ſe laſſa enfin de protéger les caprices de Charles XII. Il avoit joui de 9. Années de ſuccès. Les 9. dernieres années de ſa vie ne furent qu'un enchainement de revers : il venoit de rentrer victorieux en Pologne avec une Armée nombreuſe, chargée des tréſors, des dépouilles des Saxons. 1709.

Leipzig fut la Capoüe des Suédois, ſoit que les délices de la Saxe euſſent amolli ces Vainqueurs ; ſoit que la proſpérité enflât l'audace

de ce Prince, & le pouſſât au delà de ſon but, il n'eut plus que des malheurs affreux à eſſayer. Il vouloit diſpoſer de la Ruſſie, comme de la Pologne, & détroner le Czar, comme il avoit détroné Auguſte. Dans ce deſſein il s'avança vers les frontiéres de la Moſcovie, où deux chemins le conduiſoient, l'un par la Livonie, où tous les ſecours de la Suède étoient à portée de le joindre, par lequel il auroit pû s'avancer jusqu'à la nouvelle Ville, que le Czar fondoit alors ſur les bords de la Balthique, & détruire pour jamais le lien qui devoit joindre la Ruſſie avec l'Europe. L'autre chemin traverſoit l'Uckraine, & conduiſoit a Moſkow par des Déſerts impraticables. Charles XII. ſe détermina pour ce dernier; ou, parce qu'il avoit ouï dire qu'on ne vaincroit jamais les Romains que dans Rome, ou que la difficulté de l'entrepriſe irrita ſon courage, ou parce qu'il comptoit ſur Matzepa, Prince des Coſaques, qui lui avoit promis de fournir ſon armée de vivres, & de la joindre avec un nombre conſiderable des ſiens. Le Czar fut averti des intrigues de ce Coſaque, il diſſipa les Troupes que Matzepa aſſembloit, & s'empara de ſes Magaſins, de ſorte que lorsque le Roy de Suéde arriva devant la petite Ville de Pultawa, il ne trouva que des déſerts affreux, au lieu de Magazins, & un Prince fugitif qui venoit chercher un azile dans ſon Camp, au lieu d'un Allié puiſſant qui lui amenoit des ſecours.

Ces contretems ne rebuterent point Charles XII. Il aſſiégea Pultawa, comme s'il n'eut manqué de rien; lui, qui avoit été invulnérable jusqu'alors, fut bleſſé a la jambe, en s'amuſant à reconnoitre cette bicoque de trop prés. Son Général Löwenhaupt qui lui amenoit des vivres, des munitions, & un ſecours de 13. mille hommes, fut battu par le Czar à trois repriſes, & obligé dans cette néceſſité de bruler les Convois qu'il conduiſoit, il n'arriva au Camp du Roy qu'avec 3000. hommes de Troupes exténuées de fatigues.

Le Czar s'approcha bientôt de Pultawa, & dans cette plaine ſe donna cette Bataille ſi célébre entre les deux hommes les plus ſinguliers de leur Siécle.

Charles XII. qui jusqu' alors, comme l'Arbitre des Deſtins, n'avoit rien trouvé qui arrêtât ſes volontés, fit tout ce qu'on pou-

voit

voit attendre d'un Prince bleſſé, & porté ſur des brancards. Pierre Alexiowitz, qui n'avoit été que Legislateur jusqu'alors, aſſiſté de Mentzikow, marqua dans cette journée qu'il poſſedoit les parties d'un grand Capitaine, & ſe ſurpaſſa. Mais tout étoit fatal aux Suèdois; la bleſſure de leur Roy qui l'empêchoit d'agir; la miſére qui leur otoit les forces pour combattre; un corps detaché qui s'égara le jour de cette bataille déciſive, le nombre de leurs ennemis, & le tems qu'ils avoient eu d'élever des Redoutes, & de diſpoſer avantageuſement leurs Troupes. Enfin les Suèdois ſurent battus, & perdirent, par un inſtant déciſif & malheureux, le fruit de neuf Années de travaux & de tant de prodiges de valeur.

Charles XII. fut réduit à chercher un azile chez les Turcs; ſes haines implacables le ſuivirent à Bender, d'où il eſſaya vainement par ſes intrigues de ſoulever la Porte contre les Moscowites. Il devint ainſi la victime de ſon infléxibilité d'eſprit, qu'on auroit appellé opiniatreté, s'il n'eut pas été un Hèros. Aprés cette défaite l'Armée Suèdoiſe mit bas les armes devant le Czar aux bords du Boryſthène, comme l'Armée Moſcovite l'avoit fait devant Charles XII. aux rives de la Balthique, aprés la Bataille de Narva.

Auguſte qui vit ſon antagoniſte renverſé, ſe crût dégagé de ſa parole, & du Traité d'Alt-Ranſtadt, il s'aboucha à Berlin avec le Roy de Dannemarck & Frèderic I. Enſuite de quoi, Auguſte rentra avec une Armée en Pologne, & le Roy de Dannemarck attaqua les Suèdois en Scanie. Frèderic I. que ces Princes ne purent ébranler, demeura neutre.

En Pologne tous les partiſans Suèdois ſe tournerent du côté des Saxons. Stanislas étoit auprès de l'armée Suédoiſe, que Craſſaw commandoit. Ce Général ſe trouvant reſſerré par les Moſcowites & les Saxons, traverſa la Nouvelle Marche, & ſe rendit à Stettin ſans qu'il en pût demander la permiſſion à Frèderic I. qui voyoit avec déplaiſir ces paſſages, & ces Armées nombreuſes dans ſon voiſinage.

Le Roy fit un voyage à Königsberg où il obtint du Czar, qui

s'y étoit rendu, qu'il rétabliroit le jeune Duc de Courlande, Neveu de Frèderic I. dans ſes Etats, à condition qu'il épouſeroit la Nièce de Pierre Alexiowitz.

Du coté du Sud la France faiſoit à la Haye des propoſitions de paix, mais la fermentation des eſprits étoit encore trop grande, & les eſpérances des deux partis trop vagues, & trop chimériques, pour qu'on pût s'accorder. Si les hommes étoient capables de raiſon, feroient-ils des guerres ſi longues, ſi acharnées, & ſi onereuſes, pour en revenir pourtant à des conditions de paix, qui ne leur paroiſſent intolérables que dans les momens où la paſſion les gouverne, ou dans leſquels la fortune leur rit?

Les Alliés ouvrirent la Campagne par la priſe de Tournay & la Bataille de Malplaquet, où le Prince Royal ſe trouva en perſonne. Le Comte de Finck eut beaucoup de part à cette Victoire; il fut le premier qui força le retranchement François avec les Pruſſiens, il forma ſes troupes ſur le parapet, & de là il ſoutint la Cavalerie Impériale que les François repouſſèrent par deux repriſes, juſqu'à ce qu'un plus grand nombre de troupes ſe joignant aux ſiennes euſſent pû mettre le dernier ſceau à la Victoire.

1710. En Poméranie les Suédois firent mine de nouveau de vouloir marcher en Saxe; le Roi craignit que la Guerre ne ſe portât enfin dans ſes propres Etats, & dans l'intention d'aſſoupir les troubles du Nord, il prit les meſures les plus juſtes pour les augmenter; il propoſa l'entretien d'une Armée de neutralité, mais cette Armée ne s'aſſembla jamais. Craſſaw conſentit à une ſuſpenſion d'armes. Charles XII. qui l'apprit, proteſta du fond de la Beſſarabie contre toute neutralité: ce Traitté ébauché fut rompu, & il eut le ſort de tous ces Actes publics, que la néceſſité & l'impuiſſance font faire dans un tems, & que la force ſecondée de conjonctures favorables rompt dans un autre.

La France renoüa les Négociations de la Paix à Gertrudenberg, & dès les premieres conferences elle s'engagea à reconnoitre la Royauté de Pruſſe & la Souveraineté de Neufchâtel. L'ouvrage de la Paix avorta encore, & les Pruſſiens furent employés dans cette Campagne ſous

ſous le Prince d'Anhalt au Siége d'Aire & de Doüai qu'ils prirent. Le Roi déclara alors qu'il ne rendroit pas la Ville de Gueldre, où il avoit garniſon, que les Eſpagnols ne lui payaſſent les ſubſides qu'ils lui devoient. Auſſi en conſerva-t-il la poſſeſſion par la Paix.

Dans ce tems mourut le Duc de Courlande, Neveu du Roy; les Moſcowites s'emparerent de nouveau de la Courlande, ils prirent auſſi Elbing, mais comme le Roy avoit des droits ſur cette Ville, un Bataillon Pruſſien y fut mis en garniſon.

Le paſſage & le voiſinage de tant d'armées avoit porté la Contagion en Pruſſe; la diſette qui commençoit à s'y faire ſentir vivement, augmenta la violence & le venin de la Peſte. Le Roi abandonna ces Peuples à leur infortune, & tandis que ſes revenus & ſes ſubſides ne ſuffiſoient pas même à la magnificence de ſa dépenſe, il vit périr de ſang froid plus de 200. mille Ames, qu'il auroit pû ſauver par quelques liberalités.

Le Prince Royal revolté de cette dureté, & qui ſavoit que les Comtes de Witgenſtein * & de Wartemberg en étoient la cauſe, fit joüer toutes ſortes de reſſorts pour les déplacer. La Cour a ſes orages, la faveur ſes périls. Witgenſtein fut envoyé à Spandow, & le Roy ſe ſépara en fondant en larmes du Grand Chambelan qu'il chériſſoit. Wartemberg ſe retira dans le Palatinat avec une Penſion de 2n. mille Ecus.

* Directeur des Finances.

Charles XII. avoit refuſé la neutralité, comme nous venons de le dire. Le Czar, les Rois de Pologne, & de Dannemarck ſe ſervirent de ce prétexte pour l'attaquer en Poméranie. Frèderic I. réſuſa conſtamment d'entrer dans cette Ligue, il ne vouloit point expoſer ſes Etats aux incurſions, aux ravages, & aux hazards de la Guerre, & il eſperoit même de gagner, par ſa neutralité, aux Guerres de ſes voiſins. 1711.

Le commencement des opérations ne leur furent pas favorables. Les Danois leverent le Siége de Wismar, & Auguſte leva ceux de Stralſund & de Stettin.

Pendant que l'Europe étoit travaillée par ces convulſions, que l'eſperance & l'ambition ſouffloient la diſcorde dans les coeurs des

deux partis, mourut l'Empereur Joſeph. L'Empire élut à ſa place l'Archi-Duc Charles, qui étoit alors bloqué dans Barcelone, aprés avoir été couronné, & chaſſé de Madrit, pour la perte de la Bataille d'Almanza.

La mort de Joſeph applanit le chemin à la Paix générale: les Anglois qui commencoient à ſe laſſer de tant de dépenſes, ouvroient les yeux ſur l'objet de cette Guerre. A méſure que les nuages de leur enthouſiasme vinrent à ſe diſſiper, ils ſe convainquirent que la Maiſon d'Autriche ſetoit aſſés puiſſante, en conſervant ſes pays héréditaires, le Royaume de Naples, le Milanés & la Flandre, & ils ſe diſpoſérent à tenir des conférences à Utrecht dans le deſſein de faire la paix.

Le Roi qui déſiroit de terminer les démêlés de la Succeſſion d'Orange par un Traité définitif, ſe rendit dans le pays de Cleves, pour régler cette affaire avec le Prince de Friſe; mais ce malheureux Prince ſe noya au paſſage du Mordik, en voulant ſe rendre à la Haye. En revanche Frèderic I. fit une autre acquiſition par l'extinction des Comtes de Mansfeldt. Ce Pays fut mis en ſequeſtre entre la Pruſſe & la Saxe; la Régence Pruſſienne ſe tint à Mansfelt, & la Saxonne à Eisleben.

1712. Cependant tout s'achaminoit inſenſiblement à la Paix. Les Conférences continuoient à Utrecht; les Comtes de Döhnhoff, de Meternich & de Biberſtein, s'y rendirent en qualité de Plénipotentiaires du Roy.

Pendant qu'on tenoit ces Conférences, il arriva en Angleterre une Révolution, dont l'Europe accuſa le Maréchal de Tallard, alors priſonnier à Londres; ſoit que ce Maréchal, ou que ce qu'on appelle le hazard, en fuſſent la cauſe, le parti de Milord Malbotough fut culbuté; ceux de la Nation qui déſiroient la paix, l'emportérent. Le Duc d'Ormond eut le Commandement des troupes Angloiſes en Flandre, & il ſe ſépara des Alliés au commencement de la Campagne. Le Prince Eugene, quoiqu'affoibli par la défection des Anglois, continua l'offenſive. Le Prince d'Anhalt & les Pruſſiens furent chargés du Siége de Landreci, mais Villars marcha à Denain, fondit ſur le Camp que Milord

Milord Albemarle y commandoit, & le battit avant que le Prince Eugéne put le ſecourir. Cette Victoire remit au pouvoir des François Marchiénne, le Quesnoi, Doüai, & Bouchain.

Les Alliés ſuivirent l'exemple des Anglois, & ſongerent ſérieuſement à la paix. L'Empereur étoit le ſeul qui voulut continuer la guerre, ſoit que la lenteur de ſon Conſeil n'eut pas le tems de ſe décider, ou que ce Prince ſe crut aſſés fort pour réſiſter ſeul à Louïs XIV. Sa condition n'en devint que plus mauvaiſe.

Le Roi fit alors ſurprendre la Garniſon Hollandoiſe qui étoit à Moeurs, & maintint par là la poſſéſſion les droits qu'il avoit ſur cette place.

Mais les ſentimens pacifiques du Sud n'influerent point ſur le Nord. Le Roi de Dannemarck entra dans le Duché de Bréme, & prit Stade. Le Czar & le Roy de Pologne tenterent une deſcente dans l'Isle de Rügen, que les bonnes meſures des Suédois firent manquer. Les Alliés ne furent pas plus heureux au Siége de Stralſund qu'ils furent obligés de lever ; car Steinbock venoit de remporter une Victoire ſur les Saxons & ſur les Danois, à Gadebuſch dans le Mecklenbourg ; & un renfort de 10. mille Suedois étant arrivé en Poméranie, tout ce Pays fut delivré d'ennemis. Les Danois obligés d'abandonner Roſtock, remirent cette Ville aux Troupes du Roy, comme Directeur du Cercle du la Baſſe Saxe, mais les Suèdois en délogerent les Pruſſiens. La neutralité de Roy n'en ſouffrit aucune atteinte, & il continua de négocier, pour porter les eſprits à quelque conciliation, & pour conjurer les orages qui s'aſſembloient à l'entour de ſes Etats.

Au commencement de 1713. Frèderic I. mourut d'une maladie lente, qui avoit depuis longtems miné ſes jours : il ne vit point la conſommation de la Paix, ni le rétabliſſement du repos dans ſon Voiſinage. Il eut trois femmes ; la premiére fut une Princeſſe de Heſſe, dont il eut une fille, mariée au Prince héréditaire de Heſſe, à préſent Roy de Suède. Sophie Charlotte d'Hanovre mit au monde Frèderic Guillaume qui lui ſuccèda ; & il répudia la troiſiéme, qui étoit une Princeſſe de Mecklenbourg, à cauſe de ſa démence.

Nous

Nous venons de voir tous les évenemens qui ſe paſſerent pendant la vie de Frèderic I. Il ne reſte qu'à jetter rapidement quelques regards ſur le caractère de ce Prince. Son eſprit étoit fléxible à toutes ſortes d'impreſſions, comme ces Miroirs qui reflêchiſſent avec verité tous les objets qui s'y préſentent. Emporté par caprice, doux par nonchalance; confondant les choſes vaines avec la véritable Grandeur; aimant les fleurs, négligeant les fruits; plus attaché à l'éclat qui éblouït, qu'à l'utile qui n'eſt que ſolide; il ſacrifia 30. mille hommes de ſes ſujets, pour parvenir à la Royauté, dans les différentes Guerres que fit l'Empereur, & il n'ambitionnoit cette Dignité, que pour aſſouvir ſa hauteur, & juſtifier ſous des prétextes apparens ſes faſtueuſes diſſipations.

Il étoit magnifique & génereux, mais au prix de quelles baſſeſſes n'acheta-t-il pas le plaiſir de contenter ſes paſſions? Il trafiquoit du Sang de ſes Peuples avec les Anglois, & les Hollandois, comme ces Tartares, qui vendent leurs Troupeaux aux Bouchers de la Podolie pour les égorger. Il étoit ſur le point de retirer 15. mille hommes de Flandre: on lui remit un gros brillant de la ſucceſſion du Prince d'Orange, & les Troupes reſterent aux Alliés.

En remontant à l'origine des choſes, pour diſcerner en quoi conſiſte la généroſité d'un Souverain, nous trouvons qu'un Prince étant le prémier Serviteur de l'Etat, lui doit compte de l'uſage qu'il fait des fonds publics, qu'il en doit deſtiner une certaine ſomme au ſoutien de ſa Dignité, le reſte à recompenſer les ſervices & le mérite, à rendre par ſes largeſſes l'Etat opulent; entretenir l'égalité des conditions, ne pas fouler les Pauvres pour engraiſſer les Riches, ſecourir avec prodigalité les miſeres publiques, ſoulager les malheureux en tout genre, de toute eſpece, de toute condition, mettre de la magnificence en tout ce qui intereſſe le corps de l'Etat en général, & diriger le but de ſes dépenſes au plus grand avantage de ſes Peuples.

L'eſpece de dépenſe qu'aimoit Frèderic I. n'étoit pas de ce genre,

genre, c'étoit plûtôt la diſſipation d'un Prince prodigue & vain. Sa Cour étoit une des plus magnifiques de l'Europe. Ses Ambaſſades étoient auſſi brillantes que celles des Portugais. Ses Favoris recevoient de grandes penſions. Rien n'égaloit la magnificence de ſes Bâtimens, ſes Fêtes étoient ſuperbes, ſon Ecurie remplie de chevaux, ſes Offices de Cuiſiniers, & ſes Caves de Vin. Il donna un Fief de 40. mille Ecus à un Chaſſeur qui lui fit tirer un gros Cerf. Il fut ſur le point d'engager ſes Domaines de Halberſtadt aux Hollandois, pour acheter le *Pit*, gros brillant qui fut vendu à Louïs XV. du tems de la Régence. Ses Domeſtiques faiſoient leur fortune, lorsqu'ils avoient ſouffert des premieres ſaillies de ſon emportement. Mais ſes dépenſes n'avoient aucune proportion entr'elles; la bizarrerie de ſa dépenſe ne paroit plus évidente, que, lorsqu'on examine la totalité de ſon Etat & de ſes revenus. On y obſerve des parties d'un corps gigantesque, à côté d'autres membres deſſechés qui déperiſſent. Il vendoit 20. mille hommes pour en entretenir 30. mille. Sa Cour étoit comme ces grandes Riviéres, qui abſorbent l'eau de de tous les petits ruiſſeaux. Ses Favoris régorgeoient de ſes liberalités, tandis que la Lithuanie & la Pruſſe périſſoient par la famine & par la peſte, ſans que ce Prince généreux daignât la ſecourir. Un Prince avare eſt pour ſes Peuples, comme un Médecin qui laiſſe étouffer un malade dans ſon ſang; & le prodigue eſt comme celui qui le tüe à force de le ſaigner.

Frèderic I. n'eut jamais de faveurs conſtantes, ſoit qu'il ſe repentit de ſon mauvais choix, ſoit qu'il n'eut aucune indulgence pour les foibleſſes humaines. Depuis le Baron de Danckelmann jusqu'au Comte de Wittgenſtein, ſes Favoris eurent tous une fin malheureuſe. La mauvaiſe Education qu'il reçut dans ſa jeuneſſe, influa ſur toute ſa vie; ſon Eſprit étoit foible & ſuperſtitieux. Il eut un attachement ſingulier pour le Calvinisme, auquel il auroit voulu ramener toutes les autres Religions, & il eſt à croire qu'il auroit été Perſécuteur, ſi les Prêtres ſe fuſſent aviſés de mêler de la magnificence &

des Cérémonies aux Perſecutions. Il compoſa un livre de Priéres, que pour ſon honneur on n'imprima pas. S'il eſt digne de louänges, c'eſt pour avoir conſervé ſes Etats en Paix pendant tout ſon Régne, tandis que ceux de ſes voiſins étoient ravagés par des Guerres, pour avoir eu le coeur naturellement bienfaiſant, & pour n'avoir jamais donné atteinte à la vertu conjugale. Il étoit en un mot, grand dans les petites choſes, & petit dans les grandes; & ſon malheur a voulu qu'il fut placé dans l'Hiſtoire entre un Pére & un Fils, dont les talens ſupérieurs le font éclipſer.

DES

DES MOEURS, DES COUTUMES, DE L'INDUSTRIE, DES PROGRÈS DE L'ESPRIT HUMAIN DANS LES ARTS ET DANS LES SCIENCES.

Pour acquérir une Connoiſſance parfaite d'un Etat, il ne ſuffit pas d'en ſavoir l'Origine, les Guerres, les Traités, le Gouvernement, la Religion, les Revenus du Souverain. Ces parties ſont à la verité les principales auxquelles s'attache le pinceau de l'Hiſtoire. Il en eſt cependant encore d'autres, qui, ſans avoir le brillant des premieres, n'en ſont pas moins utiles ; je compte de ce nombre tout ce qui ſe rapporte aux moeurs des Habitans, comme l'origine des nouveaux uſages, l'abolition des anciens, la naiſſance de l'induſtrie, les cauſes qui l'ont dévelopée, les raiſons de ce qui a hâté, ou rallenti les progrés de l'Eſprit humain, & ſurtout ce qui caractériſe le plus le génie de la Nation dont on parle. Ces objets intereſſeront toujours les Politiques & les Philoſophes, & j'oſe avancer avec hardieſſe que cette ſorte de détails n'eſt en aucune façon indigne de la majeſté de l'Hiſtoire.

Je ne préſente au Lecteur dans cet Ouvrage qu'un choix des traits les plus frappans & les plus caractériſtiques du Génie des Brandebourgeois en chaque Siécle: mais quelle différence entre ces Siécles ? Des Nations qu'un Ocean immenſe ſépare, & qui habitent ſous

les Tropiques les plus oppoſés, ne différent pas plus entre leurs uſages, que les Brandebourgeois d'eux-mêmes, ſi nous les comparons du tems de Tacite au tems de Henri l'Oiſeleur; ceux de Henri l'Oiſeleur à ceux de Jean le Ciceron, & enfin ceux-là aux habitans de l'Electorat ſous Fréderic I. Rni de Pruſſe.

Le grand nombre des hommes diſtraits par la variété infinie des objets, regarde ſans réfiéxion la Lanterne magique de ce monde; il s'apperçoit auſſi peu des changemens ſucceſſifs qui ſe font dans les Uſages, que l'on paſſe légérement dans une grande Ville ſur ces ravages que la mort y fait journellement, pourvû qu'elle y épargne le petit Cercle de perſonnes avec leſquelles on eſt le plus lié. Cependant aprés une courte abſence, on trouve à ſon retour d'autres habitans & des modes nouvelles.

Qu'il eſt inſtructif & beau de paſſer en revuë tous les Siécles qui ont eté avant nous, & de voir par quelle analyſe ils tiennent à nos tems! Prendre une Nation dans la ſtupidité la plus groſſiére, la ſuivre dans ſes progrés, & la conduire juſqu'au tems qu'elle s'eſt civiliſée, c'eſt étudier dans toutes ſes Métamorphoſes le Ver à ſoye, devenu Chryſalide, & enfin Papillon.

Mais que cette étude eſt humiliante! Il ne paroit que trop qu'une Loi immuable de la Nature oblige les hommes de paſſer par bien des impertinences pour arriver à quelque choſe de raiſonnable; remontez aux Origines des Nations, vous les trouverez également barbares. Les unes ſont arrivées par une allure lente, & par bien des détours, à un certain dégré de perfection. Les autres y ſont parvenuës par un effor rapide; toutes ont tenu des routes différentes; & encore la politeſſe, l'induſtrie & tous les arts, ont-ils pris un gout de terroir dans les différens païs où ils ont été transplantés, qu'ils ont reçus du Caractére indélebile de chaque Nation. Ceci ſe fera ſentir davantage ſi vous liſez des Ouvrages écrits à Padouë, à Londres, ou à Paris; ils ſe diſtingueront ſans peine, quand même les Auteurs y traiteroient la même matiére; je n'en excepte que la plus ſublime Géometrie.

La variété inépuiſable que la Nature jette dans ces caractéres généraux & particuliers, eſt une marque de ſon abondance, mais en même

même tems de ſon Oeconomie: car quoique tant de Nations innombrables qui couvrent la terre, ayent chacune leur génie différent, il ſemble cependant que certains grands traits qui les diſtinguent des autres, ſont inaltérables, Tout peuple a un Caractère à ſoi, qui peut être modifié par le plus ou le moins d'Education qu'il reçoit, mais dont le fonds ne s'efface jamais. Je pourrois facilement appuyer cette opinion ſur des preuves Phyſiques, mais je ne prètens pas m'écarter de mon ſujet. Il s'enſuit donc que les Princes n'ont jamais totalement changé la façon de penſer des Peuples, qu'ils n'ont jamais pû forcer la Nature à produire les grands hommes, dont le nombre ſeul illuſtre les Siècles; quoique le travail des mines ſoit ſoumis à leurs ordres, les veines fécondes ne le ſont pas, elles s'ouvrent tout à coup, en fourniſſant des richeſſes abondantes, & ſe perdent, dans le tems qu'on les pourſuit avec le plus d'avidité.

Quiconque a lû Tacite & Ceſar, reconnoitra encore les Allemands, les François & les Anglois, aux couleurs dont ils les peignent: dix-huit Siècles n'ont pû les effacer. Comment donc un Règne pourroit-il effectuer ce que tant de Siècles n'ont pû faire? Un Statuaire peut tailler un morceau de bois dans la forme qu'il lui plait; il en fera un Eſope, ou un Antinoüs, mais il ne changera jamais la Nature inhérente du bois. Certains vices dominans, & certaines vertus de choix, reſteront toûjours à chaque Peuple. Si donc les Romains vous paroiſſent plus vertueux ſous les Antonins que ſous les Tibères, c'eſt que les crimes étoient ſévérement punis; le vice n'oſoit lever ſa tête impure, mais les vicieux n'en ſubſiſtoient pas moins. Les Souverains donneront un certain vernis de politeſſe à leur Nation, ils maintiendront les Loix dans leur vigueur, & les Sciences dans la médiocrité, mais ils n'altereront jamais l'eſſence des choſes; ils n'ajoutent que quelque nuance paſſagére à la Couleur dominante du Tableau.

C'eſt ce que nous avons vû de nos jours en Ruſſie. Pierre I. fit couper la barbe à ſes Moſcovites, il leur ordonna de croire à la Proceſſion du ſaint Eſprit, il en fit habiller quelques uns à la Françoiſe, on leur apprit même des Langues; cependant on diſtinguera encore

core longtems les Ruſſes des François, des Italiens, & des autres Nations de l'Europe.

Il n'y a, je crois, que la dévaſtation entière des Etats, & leur repeuplement par des Colonies étrangères qui puiſſent produire un changement total dans une Nation; mais qu'on y prenne bien garde, ce n'eſt, dés lors, plus la même Nation, & il reſteroit encore à ſçavoir ſi l'air & la nourriture ne rendroient pas avec le tems ces nouveaux habitans ſemblables aux anciens.

Je me ſuis cru obligé de ſéparer ce morceau qui traite des Moeurs des Brandebourgeois, du reſte de l'Hiſtoire, à cauſe que dans celle-là je me ſuis reſtraint à la Politique & à la Guerre, & que ces détails qui regardent les uſages, l'induſtrie & les arts, étant répandus dans tout un Ouvrage auroient peut être échapé au Lecteur, au lieu qu'il les trouve à préſent ſous un ſeul point de vûë, où ils forment ſeuls un petit corps d'Hiſtoire.

Les Auteurs Latins m'ont ſervi de guide dans les commencemens de cet Ouvrage, au défaut total de ceux du païs. Lockelius, que j'aurai lieu de citer ſouvent, m'a éclairé dans les Régences ténébreuſes des Margrawes des quatre premieres races, & les Archives m'ont fourni des matériaux pour ce qu'il y a de plus remarquable à dire des tems que la Maiſon de Hohenzollern a poſſédé cet Electorat: ce qui nous ramene juſqu'à nos jours.

Epoque Premiere.

Dans la longue énumération que Tacite fait des Peuples d'Allemagne, il s'eſt trompé ſur le mot d'*Ingevoner*, qui ſignifie habitans, & ſur celui de *Germenier*, qui veut dire gens de guerre, que l'ignorance de la langue lui fait prendre pour des Nations particulieres. La quantité de ces guerriers dont l'Allemagne étoit remplie, lui donna le nom de Germanie.

Les premiers habitans de la Marche furent des Teutons, & aprés eux les Semnons, dont Tacite dit, que c'étoient les plus nobles d'entre les Suéves.

L'Alle-

L'Allemagne étoit tout à fait barbare dans ces tems reculés ; les peuples groſſiers & à moitié ſauvages habitoient les forêts, ou de mauvaiſes Cabanes leur ſervoient de demeure ; ils ſe marioient jeunes, & peuploient d'autant plus, que les femmes étoient rarement ſtériles. La Nation alloit toûjours en ſe multipliant, & comme les enfans ſe bornoient à cultiver les Champs de leurs Pères, au lieu de défricher des terres nouvelles, il s'enſuivoit que ces petits héritages ne fourniſſant pas, (dans les meilleures années même,) à l'entretien d'un Peuple auſſi nombreux, les obligeoient à s'expatrier pour trouver ailleurs leur ſubſiſtance ; de là ces grands débordemens de Barbares, qui inonderent les Gaules, l'Afrique & l'Empire Romain même.

Les Germains étoient Chaſſeurs par néceſſité, & Guerriers par inſtinct ; leur pauvreté rendoit les guerres inteſtines qu'ils ſe faiſoient courtes, car l'interêt ne s'en méloit jamais. Leurs Généraux, qui depuis devinrent leurs Princes, s'appelloient *Fürſten*, ce qui eſt une dérivation du mot de Conducteur ; ils étoient renommés par leur taille haute, & pour avoir des corps robuſtes, & endurcis aux travaux les plus pénibles ; leurs vertus principales étoient la valeur, & la fidelité avec laquelle ils obſervoient leurs engagemens. ils célébroient ces vertus par des hymnes qu'ils apprenoient à leurs enfans, pour les transmettre à leur poſtérité.

Les Auteurs Latins rendent eux-mêmes un illuſtre témoignage à la valeur des Germains, en nous apprenant la défaite de Varus & de quelques autres Chefs des Armées Romaines. Si l'on applaudit au courage d'une Nation, qui, toutes choſes égales, eſt victorieuſe d'une autre, combien plus ne doit-on pas admirer la Bravoure de ces Germains, qui, n'ayant pour eux que la confiance en leur propre force, & une inflexible opiniatreté à ne point céder, triompherent de la Diſcipline Romaine, & de ces Legions qui avoient à peine achevé de ſubjuguer la moitié du Monde connu ?

Quoiqu'en ayent dit la plûpart des Hiſtoriens, il n'en eſt pas moins vrai que les Romains paſſérent l'Elbe malgré les Suéves, car on a découvert auprès de * Zoſſen, dans un Champ quarré de 800. pas

* à 6 Milles de Berlin.

pas quantité d'Urnes pleines de Médailles de l'Empereur Antonin, de l'Imperatrice Fauſtine, & de quelques Affiquets dont ſe paroient les Dames Romaines. Ce n'eſt pas aſſurément un Champ de Bataille, car les Suéves n'auroient pas enfouï ſous terre l'argent de leurs Ennemis, pour honorer leurs funérailles ; on peut en conjecturer, ce me ſemble, avec certitude, que ce lieu ſervit de Camp à quelques Cohortes détachées, auxquelles les Romains avoient fait paſſer l'Elbe, pour être avertis des mouvemens & de l'approche des Barbares.

Brandebourg eſt la plus ancienne Ville de la Marche ; les Annales * fixent ſa fondation l'an du Monde 3588 ; ce qui ſeroit 416. ans avant l'Ere Vulgaire. On dit qu'elle fut bâtie, & reçut ſon nom du même Brennus qui ſaccagea Rome. On entrevoit dans l'obſcurité les noms de quelques Rois † Vandales, qui furent apparemment plus ambitieux & plus inquiets que les autres. On trouve de plus dans les Annales, que Witikind Roi des Saxons, Hermanfried Roi de Thuringe, & Riehimire Roi des Francs s'allierent, dompterent les Semnons, & entourerent les premiers de murailles ces Villes conquiſes, pour contenir le Païs dans l'obéiſſance.

* Imprimées en 1595.

† Hoterus & Wenceslas.

Epoque Seconde.

Charlemagne prit enfin * Brandebourg, & Henri l'Oiſeleur † ayant entiérement ſubjugué les Saxons qui habitoient ces Contrées, établit les Margrawes, ou Gouverneurs de Frontiéres.

* en 781.

† en 928.

Les Moeurs s'adoucirent ſous les Margrawes, mais le païs étoit trés pauvre ; il ne produiſoit que les denrées les plus néceſſaires à la vie, il avoit beſoin de l'induſtrie de ſes voiſins, & comme perſonne ne recherchoit la ſienne, l'argent reſſortoit en plus grande quantité qu'il n'entroit. Cette diſproportion dans la circulation des eſpeces, qui alloit toûjours à leur diminution, baiſſoit le prix de toutes choſes : les denrées étoient à un ſi vil prix, que du tems de l'Electeur Jean II. d'Aſcanie, le boiſſeau de froment ſe vendoit à 28. liards, celui de ſeigle à 28. deniers, & 6. poules s'achetoient au marché pour 1. gros.

Les Berlinois paſſoient dés lors pour des maris auſſi fideles que jaloux ; les Chroniques * rapportent un exemple qui peint bien les moeurs

* Lockelius en 1564.

moeurs de ces tems. Sous la Régence de l'Electeur Othon de Baviere, un Sécretaire de l'Evêque de Magdebourg voulant aller à Berlin aux bains publics, rencontra dans la rüe une jeune femme de Bourgeois, & lui propoſa en badinant de ſe baigner avec lui: la femme ſe trouva offenſée de cette propoſition, le peuple s'attroupa, & les Bourgeois de Berlin qui n'entendoient pas raillerie, trainerent le pauvre Sécretaire dans une place publique, où ils le décapiterent ſans autre forme de procès. S'ils ſont jaloux, du moins exercent-ils à préſent des vengeances plus douces.

Le Païs croupiſſoit dans une miſere affreuſe ſous la Régence des Princes des 4. premieres Races, & il n'en pouvoit ſortir, paſſant ſans ceſſe d'une main à l'autre. * Othon de Baviere fut obligé de vendre l'Electorat à l'Empereur Charles IV. Celui-ci s'établit à Tangermünde, il y tint une Cour brillante, & y bâtit un aſſés vaſte Château, dont on voit encore les ruïnes. Pendant que Jodoce adminiſtroit le Brandebourg, les Vaudois perſécutés en France ſe réfugierent dans la ville d'Angermünde, à laquelle on donna le ſurnom d'Héretique. Je ne vois pas pourquoi les Vaudois chercherent un azile dans le Brandebourg, qui étoit également Catholique, & pourquoi ils y furent reçus, quoiqu'on les déteſtât. * en 1373.

Les Princes de la Maiſon de Luxembourg foulerent les Peuples le plus impitoyablement, ils engageoient l'Electorat dans leurs beſoins à ceux qui leur prêtoient les plus groſſes ſommes; & ces Créanciers qui regardoient ce malheureux Païs comme une Hypotheque, commettoient toutes ſortes de véxations pour s'enrichir, & y vivoient à diſcretion, comme dans une Province ennemie. Les Voleurs infeſtoient les grands chemins, la Police étoit inconnüe, & la Juſtice hors d'activité. Les Seigneurs de Quitzau & de Neuendorff, indignés du joug odieux que portoit leur Patrie, firent une guerre ouverte aux Sous-Tyrans qui l'opprimoient. Dans cette confuſion totale, & pendant cette eſpece d'anarchie, le peuple gémiſſoit dans la miſére, les Nobles étoient, tantôt les Inſtrumens, tantôt les Vengeurs de la Tyrannie, & le génie de la Nation abruti par la dureté

de l'eſclavage, & par la rigueur d'un Gouvernement barbare & Gothique, demeuroit engourdi & paralytique.

Epoque Troisieme.

1414. L'Empereur Sigismond débrouïlla ce chaos, en conférant le Brandebourg & la Dignité Electorale à Frèderic de Hohenzollern, Burgrawe de Nüremberg. Ce Prince exigea l'hommage de ſes nouveaux ſujets, mais le Peuple qui ne connoiſſoit que des Maitres cruels, eut de la peine à ſe ſoumettre à cette Domination douce & légitime. Frèderic I. réduiſit les Gentilshommes à l'obeïſſance par la terreur que répandit le gros Canon avec lequel il enfonçoit les Châteaux des Rebelles. Ce Canon étoit une piéce de 24. livres, en quoi conſiſtoit toute ſon Artillerie.

L'Eſprit de ſédition ne ſe perdit pas ſi vîte. Les Bourgeois de Berlin ſe révolterent à différentes repriſes contre leurs Magiſtrats. Frèderic II. appaiſa ces émeutes avec douceur & ſageſſe. La néceſſité obligea ce Prince d'hypothéquer les Péages de Schiffelbein & de Drambourg au Sieur Denis d'Oſten pour obtenir la ſomme de 1500. florins, dont il avoit beſoin pour ſe rendre à la Diéte de Nürnberg.

Les choſes reſterent dans cette ſituation juſqu'a Jean Ciceron. Cet Electeur fit les premiers efforts pour tirer le Peuple de ſon imbécillité & de ſon ignorance ; c'étoit beaucoup pour ces temps de s'appercevoir qu'on étoit ignorant. Quoique cette premiere Aurore du bon eſprit ne fut qu'un foible crépuſcule, elle produiſit toutefois la fondation de l'Univerſité * de Francfort ſur l'Oder. Conrad Wipina Profeſſeur de Leipzig, devint le premier Recteur de cette nouvelle Univerſité, & il en dreſſa les Statuts. Mille Etudians ſe firent inſcrire dés la premiere année dans les Faſtes de l'Univerſité.

* en 1495.

Il arriva pour les progrés des Sciences que Joachim Neſtor les protégea autant que ſon Pére : c'étoit le Leon X. du Brandebourg, il poſſedoit les Mathematiques, l'Aſtronomie & l'Hiſtoire, il parloit avec facilité le François, l'Italien & le Latin ; il aimoit les Belles Lettres, & il fit des dépenſes conſidérables pour encourager ceux qui s'y appliquoient.

Ce

Ce n'étoit pas l'ouvrage d'un jour que de civiliſer une Nation qui avoit été ſauvage pendant tant de ſiécles ; il faut bien du tems pour que la douceur du commerce des Sciences ſe communique à tout un peuple ; les jeunes Gens étudioient à la vérité, mais ceux qui étoient d'un âge mûr, demeuroient attachés à leurs anciens uſages, & à leur groſſiéreté. Les Nobles voloient encore ſur les grands chemins. La dépravation des moeurs étoit ſi générale en Allemagne, que la Diéte de l'Empire aſſemblée à Tréves voulant y mettre un frein, défendit de blasphemer & de s'abandonner à ces excès de débauche, qui ravalent l'humanité, & rendent les hommes inferieurs aux animaux.

Il y avoit dés lors des vignes plantées dans l'Electorat ; le Baril de vin ſe vendoit de ce tems à 30. gr. & le boiſſeau de Seigle à 21. Liards. Les eſpeces commençoient à circuler davantage ; Joachim Neſtor fit même conſtruire quelques Bâtiments, entr'autres le Château de Potzdam. Tout le monde étoit habillé à l'Allemande, ce qui répond à peu prés à l'ancien habillement Eſpagnol, hormis que les hommes portoient de larges fraiſes. Les Princes, * les Comtes & les Chevaliers portoient des chaines d'or au cou ; il n'étoit permis aux Gentilshommes que d'avoir trois anneaux d'or à la Cravate. L'habilement des femmes reſſembloit à celui des Augsbourgeoiſes, ou des filles de Strasbourg. * Lockelius.

On commença alors à connoitre un certain luxe proportionné à ces tems, mais comme on ne trouve point que l'Induſtrie, ni le Commerce du Brandebourg, s'étendiſſent en même tems, l'augmentation des richeſſes, & leur cauſe, demeurent un problême difficile à réſoudre.

Dés l'année 1560. on s'apperçoit d'une grande difference dans les dépenſes des Electeurs, car lorsque Joachim II. ſe rendit à la Diéte † de Francfort, il eut * 68. Gentilshommes à ſa ſuite, & 452. Chevaux dans ſes Equipages. Le grand jeu s'introduiſit en même tems ; cette mode paſſa de la Cour à la Ville, où on fut obligé de la défendre, à cauſe que quelques Bourgeois avoient perdu plus de mille Ecus dans une ſéance.

† 1562. convoquée par l'Empereur Ferdinand pour l'Election d'un Roi des Romains

* Lockelius.

Nous trouvons dans les Annales qu'au Mariage de Joachim II. avec Sophie fille de Sigismond Roi de Pologne, l'Electeur coucha la nuit des nôces armé de toutes pieces auprés de ſa jeune Epouſe, comme ſi les tendres combats de l'Amour demandoient des préparatifs auſſi redoutables ? Un mêlange de férocité & de magnificence entroit dans toutes les Coutumes de ces tems. Ces ſingularités venoient de ce que le Siécle vouloit ſortir de la Barbarie; il cherchoit le bon chemin & le manquoit. Sa groſſiereté confondoit les cérémonies avec la politeſſe, la magnificence avec la dignité, les débauches avec le plaiſir, la pédanterie avec le ſavoir, & les platitudes groſſieres des bouffons avec les ingénieuſes ſaillies de l'eſprit.

On doit rapporter à ces tems la fondation de l'Univerſité de Königsberg par Albert de Pruſſe.

Les dépenſes allerent encore en augmentant. Jean George fit des obſéques ſuperbes à ſon Pére: c'eſt la prémiere pompe funébre accompagnée de magnificence, dont l'Hiſtoire de Brandebourg fait mention. Le goût des Fêtes étoit la paſſion de ce Prince, il aimoit à donner ſa Grandeur en ſpectacle. Il célébra * la naiſſance de l'aîné de ſes Princes par des fêtes qui durérent quatre jours. Ces divertiſſements conſiſtoient dans des Tournois, des Combats de Barques, des Feux d'artifice, & des Courſes de bague. Les Seigneurs qui compoſoient les quatre Quadrilles, étoient vêtus en velours richement brodé en or & en Argent; mais le caractére du Siécle perçoit à travers toute cette magnificence. A la tête de chaque Quadrille étoit un bouffon qui ſonnoit du Cor d'une façon ridicule, & qui faiſoit cent extravagances, & la Cour monta au dongeon du Chateau pour voir tirer le feu d'artifice. † Au paſſage de Chriſtian Roi de Dannemarck par Berlin, l'Electeur lui fit une réception ſuperbe, il alla au devant du Roi, accompagné de nombre de Princes, de Comtes, de Seigneurs & d'une Garde de 300. Chevaux. Le Roi fit ſon entrée dans un char de velours noir galonné en Or, tiré par 8. Chevaux blancs, dont les Mors & les Caparaçons étoient d'argent. On l'accabla de fêtes dans le goût des précedentes.

* Lockelius.

† L'Electeur diſent les Annales, mit la tête hors d'une Lucarne & cria à l'Artificier: *Maître Jean boute quand je ſſlerai.*

Peut

Peut-être que le Luxe fut pouſſé trop loin, car Joachim Frèderic fit des Loix ſomptuaires: il employa ſes revenus à des uſages utiles, il fonda le College de Joachim, depuis transferé à Berlin par l'Electeur Frèderic Guillaume, où cette Ecole eſt de nos jours la plus floriſſante & la mieux réglée de tous les Etats de la Pruſſe.

Il manquoit encore du tems de Jean George beaucoup d'Inventions qui contribuënt à la commodité de la vie. L'uſage commun des Caroſſes ne remonte pas plus haut qu'à Jean Sigismond; il en eſt parlé à l'occaſion de l'hommage de la Pruſſe, que ce Prince rendit à Varſovie. Il eut à ſa ſuite 36. Caroſſes à 6. Chevaux, outre un Cortege de 80. Chevaux de main. L'Ambaſſade qui ſe rendit à la Diéte de l'Empire pour l'Election de l'Empereur Matthias, eut 3. Caroſſes avec elle. C'étoient de mauvais Coches, compoſés de quatre ais groſſiérement joints enſemble. Qui eut dit alors que cet art ſe perfectionneroit dans le XVIII. Siécle au point qu'on feroit des Caroſſes pour 20000. Ecus, & qu'ils trouveroient des acheteurs?

Les efforts que le Brandebourg & l'Allemagne faiſoient pour ſe civiliſer n'étoient pas tout à fait inutiles; le nombre des Univerſités augmentoit: celle de Halle fut fondée alors. En même tems ſe forma à Deſſaw une Academie pour la langue Allemande, ſous le nom de *Societé fruſtifiante*, qui auroit pû devenir utile: d'autant plus que la langue Allemande, diviſée en une infinité de Dialectes, manque de régles ſuffiſantes pour en fixer le véritable uſage; que nous n'avons aucuns Livres Claſſiques, & que s'il nous reſte encore quelque choſe de nôtre ancienne liberté Républicaine, c'eſt le ſtérile avantage d'eſtropier ſelon notre fantaiſie une Langue groſſiere & presque encore barbare.

Ces beaux Etabliſſemens qui nous auroient peut-être avancés d'un Siécle, étoient encore à peine ébauchés, lorsque la Guerre de 30. ans ſurvint, qui détruiſit & bouleverſa toute l'Allemagne.

Les Etats de Brandebourg avoient eû jusqu'à George Guillaume une entiére influence dans le Gouvernement; on les conſultoit ſur toutes les affaires, & l'on ſuivoit leurs avis. Lorsque la Guerre s'ap- George Guillaume en 1621.

s'approcha de l'Electorat, on songea à sa défense. Jusqu'alors les Princes n'entretenoient qu'une garde, & quand on vouloit assembler des Troupes, on convoquoit les Nobles qui étoient obligés de comparoitre, & qui avec leurs suzerains formoient la Cavalerie; leurs Vassaux composoient l'Infanterie. L'Electeur * & sur tour son Ministre, le Comte Schwartzenberg, étoient portés à l'entretien d'une milice réguliere. Les Etats consentirent à la levée de gens de guerre, & aprés qu'on en eut fait le choix, on leur ordonna de faire des quêtes dans le païs pour subvenir à leur subsistance, jusqu'au tems qu'on auroit besoin de leurs services. Un Edit fut publié en même tems, qui ordonnoit aux païsans de donner un liard par tête à ces miliciens, quand ils viendroient gueuser, & des coups de bâton, s'ils ne s'en contentoient pas. Au lieu d'avoir des Soldats disciplinés, cet Electeur institua des Mendians privilégiés.

*Sebaldus, Chronique.

Le Comte de Schwartzenberg diminua depuis le pouvoir de ces Etats, dont cependant ils n'avoient jamais abusé. Enfin dans le cours de cette cruelle guerre, l'année 1636. fut la plus malheureuse pour cet Electorat: les Suédois étoient à Werben, les Imperiaux à Magdebourg & Rathenau, Wrangel à Stettin, Morosini dans la Nouvelle Marche, quand 36. mille Autrichiens traverserent le Païs, pillerent & désolerent tout dans leur passage. C'en fut trop à la fois: le Brandebourg énervé par le nombre des Troupes qui en avoit subsisté, & qui l'avoit pillé les années précedentes, succomba enfin: la cherté y devint exorbitante, un boeuf s'achetoit 100. Ecus, le boisseau de bled 5. l'Orge 3. & les espéces hausserent de prix par leur rareté, la valeur numeraire du Ducat fut évaluée à 10. Ecus. Quelques Gentilshommes qui avoient soustrait leurs provision à l'avidité des Ennemis, voulurent profiter des circonstances de la disette; mais les païsans qui n'avoient pas dequoi acheter ces grains, réduits au désespoir par la famine, assommerent ces Maitres inhumains, & pillerent leurs greniers. La famine continua avec la même violence; la Peste s'ensuivit, & la désolation parvint à son comble. Les restes de ces malheureux habitans, que la mort & les ennemis avoient épargné ne pouvant

pouvant tenir contre tant de calamités, abandonnerent leur Patrie infortunée, & ſe réfugierent dans les païs voiſins.

Toute la Marche n'étoit qu'un affreux deſert; elle offroit le ſpectacle deplorable, de ruïnes, d'incendies, & de tous les fléaux qu'une guerre longue & furieuſe entraine aprés elle. A peine découvroit-on ſous tant d'horreurs & de ſaccagement, dans des lieux devenus tout ſauvages, les traces des anciens Habitans.

C'en eut été fait du Brandebourg, ſi Frèderic Guillaume ne ſe fut obſtiné à ſon retabliſſement. Sa prudence, ſa fermeté & le tems vainquirent tous ces obſtacles; il fit la paix, & mit d'abord la main à cette nouvelle Création. Frèderic Guillaume 1640.

Le Brandebourg devint effectivement un nouveau Païs, formé du mêlange de différentes Colonies de toutes ſortes de Nations, qui s'allierent dens la ſuite à ceux des anciens habitans, qui étoient echappés à ſa deſtruction. Soit que l'année fut abondante, ſoit défaut de conſommation, les denrées furent à un ſi bas prix, que le boiſſeau de bled ſe vendoit à 12. gros.

La Guerre de 30. ans, entre les maux qu'elle cauſa, détruiſit entr'autres le peu de Commerce que le Nord de l'Allemagne faiſoit. Nous tirions anciennement nos ſels de Hollande & de France: les proviſions qui ne pouvoient être renouvellées pendant ces troubles, s'épuiſerent. Ce manquement d'une denrée auſſi néceſſaire fit avoir recours à l'induſtrie, & l'on trouva des ſources ſalées à Halle, qui fournirent non ſeulement aux beſoins du Brandebourg, mais encore à ceux des Païs voiſins.

La premiere Colonie qui vint s'etablir dans l'Electorat, fut compoſée de Hollandois: ils renouvellerent l'eſpece des Profeſſionnaires & des Artiſans, ils formerent des projets pour la vente des Bois de haute futaye, qui ſe trouvoient en grande abondance; la ruïne de la Guerre de 30. ans ayant fait de tout le païs une vaſte forêt. Sur la vente de ces bois roula enſuite une des branches principales de nôtre Commerce; l'Electeur permit même à quelques familles Juives de ſe domicilier dans ſes Etats, le voiſinage de la Pologne rendoit leur miniſtere

niſtére utile pour débiter dans ce Royaume les rebuts de nos friperies.

Il arriva depuis un événement favorable qui avança conſidérablement les projets du grand Electeur. Louïs XIV. revoqua l'Edit * de Nantes, & 300. mille François ſortirent pour le moins de ce Royaume: les plus riches paſſérent en Angleterre & en Hollande, les plus pauvres, mais les plus induſtrieux, ſe réfugierent dans le Brandebourg au nombre de 20. mille, ou environ: ils aiderent à repeupler nos Villes déſertes, & nous donnerent toutes les Manufactures qui nous manquoient.

* en 1684.

Afin de juger des avantages qui revinrent à l'Etat par cette Colonie, il eſt néceſſaire d'entrer dans le détail de ce qu'étoient nos Manufactures avant la Guerre de 30. ans, & de ce qu'elles devinrent aprés la Révocation de l'Edit de Nantes.

Nôtre Commerce rouloit anciennement ſur la vente de nos grains, du vin & de nos laines; quelques Manufactures de drap ſubſiſtoient encore, mais elles n'etoient pas conſidérables. Il n'y avoit du tems de Jean Ciceron que 700. Manufacturiers dans tout le païs. Durant la Régence de Joachim II. le Duc d'Albe opprimoit tyranniquement la liberté des Flamans. La ſage Elizabeth Reine d'Angleterre ſe prévalut de la ſottiſe de ſes voiſins, en attirant dans ſes Etats les Manufacturiers de Gand & de Bruges; ils y travaillerent les laines d'Angleterre, & obtinrent qu'on en défendit la ſortie.

Nos Manufacturiers n'avoient fait jusqu'alors de bons draps, que par le mêlange des laines Angloiſes avec les nôtres; & comme celles-là vinrent à manquer, nos draps tomberent. Les Electeurs de Saxe, Auguſte & Chriſtian, ſuivirent l'exemple de la Reine Elizabeth, en attirant dans leurs païs des Ouvriers Flamans, qui rendirent leurs Manufactures floriſſantes; le manque de laines étrangeres, la décadence de nos Manufactures, & l'accroiſſement de celles de nos voiſins, accoutuma la Nobleſſe de Brandebourg de vendre ſes laines aux Etrangers; ce qui détruiſit presque entierement nos Fabriques. Jean Sigismond, pour les relever, défendit l'entrée des draps étrangers dans ſes Etats;

Etats; mais cette défenſe devint puérile, à cauſe que les fabriques du Brandebourg ne pouvoient pas fournir les draps dont le païs avoit beſoin, ce qui obligeoit d'avoir recours à l'induſtrie des voiſins. Il y a grande apparence qu'on auroit eu recours à des expédiens plus heureux, mais la Guerre de 30. ans ſurvint, & elle renverſa les projets, les Manufactures & l'Etat.

A l'avénement de Frèderic Guillaume à la Régence, on ne faiſoit dans ce païs, ni chapeaux, ni bas, ni ſerges, ni aucunes étoffes de laine. L'induſtrie des François nous enrichit de toutes ces Manufactures: ils établirent des fabriques de draps, de Serges, d'Etamines, de petites étoffes, de Droguets, de Griſettes, de Crepon, de Bonnets, & de bas tiſſus ſur des métiers, de Chapeaux de Caſtor, de Lapin, & de poils de Liévre, des teintures de toutes les eſpeces. Quelques uns de ces Réfugiés ſe firent Marchands, & débiterent en détail l'induſtrie des autres. Berlin eut des Orfèvres, des Bijoutiers, des Horlogers, des Sculpteurs; & les François qui s'établirent dans le plat Païs, y cultiverent le Tabac, & firent venir des fruits & des légumes excellens dans les Contrées ſablonneuſes, qui, par leur ſoin, devinrent des potagers admirables. Le grand Electeur, pour encourager une Colonie auſſi utile, lui aſſigna une penſion annuelle de 40. mille Ecus dont elle jouït encore.

Ainſi l'Electorat ſe trouva plus floriſſant vers la fin de la Régence de Fréderic Guillaume, qu'il ne l'avoit été ſous aucun de ſes Ancêtres, & la grande augmentation des Manufactures étendit les branches du Commerce, qui roula dans la ſuite ſur nos Blés, ſur les bois, ſur les Etoffes & les draps, & ſur nos ſels. L'uſage des Poſtes, inconnu jusqu'alors en Allemagne, fut introduit par le grand Electeur dans tous ſes Etats depuis Emmerick jusqu'à Memel. Les Villes payoient des taxes arbitraires, qui furent abolies; l'établiſſement de l'acciſe les remplaça. Les Villes commencerent à ſe policer, on pava les ruës, & on plaça de diſtance en diſtance des lanternes pour les éclairer. Cette Police étoit d'une néceſſité indiſpenſable. Car les Courtiſans étoient obligés d'aller en échaſſes au Chateau de Potzdam, lorsque la Cour

s'y tenoit, à cauſe des bouës qu'il falloit traverſer dans les ruës.

Frèderic Guillaume fut le premier Electeur qui entretint à ſon ſervice un Corps d'Armée diſcipliné régulierement. Les Bataillons d'Infanterie étoient compoſés de 4. Compagnies à 150. têtes chacune, un tiers du Bataillon étoit armé de piques, le reſte avoit des mousquets. L'Infanterie portoit des habits d'ordonnance & des manteaux. Les Cavaliers ſe pourvoyoient eux-mêmes d'armes & de Chevaux. Ils avoient la demi-armure, ils combattoient par Eſcadrons, & ils menoient ſouvent du Canon avec eux.

Le grand Electeur, quoique généreux & magnifique pour ſa perſonne, fit des Loix ſomptuaires: ſa Cour étoit nombreuſe, & ſa dépenſe ſe faiſoit avec dignité. Aux Fêtes qu'il donna au mariage de ſa Niéce la Princeſſe de Courlande, 56. Tables de 40. Couverts furent ſervies à chaque repas. L'activité infatigable de ce grand Prince donna à ſa Patrie tous les Arts utiles; il n'eut pas le tems d'y ajouter les agrèables.

Les Guerres continuelles, & le mêlange des nouveaux habitans, avoient déjà fait changer les anciennes moeurs; beaucoup d'uſages des Hollandois & des François devinrent les nôtres, les vices dominans étoient l'yvrognerie & l'interêt. La débauche avec les femmes étoit interdite à la Jeuneſſe, & certains ſouvenirs cuiſans qu'on gagne en mourant de plaiſir, étoient inconnus alors. La Cour aimoit les pointes, les équivoques & les bouffons; les enfans des Nobles ſe remettoient aux Etudes, & l'Education de la jeuneſſe tomba inſenſiblement entre les mains des François. Nous leur devons encore une douceur dans le commerce, & des maniéres plus aiſées, que n'en ont ordinairement les Allemans.

Le changement qui arriva dans cet Etat aprés la Guerre de 30. ans, étoit univerſel: les Monnoyes s'en reſſentirent ainſi que le reſte; autrefois le Marc d'argent étoit ſur le pied de 9. Ecus dans tout l'Empire jusqu'à l'année 1561. que les malheurs des tems forcerent le Grand Electeur d'avoir recours à toutes ſortes d'expédiens pour fournir aux dépenſes de l'Etat. Il fit publier la même année * un Edit qui fixoit le

* 1651.

prix

prix des monnoyes courantes, & il fit battre des gros & des fenins, pour des ſommes conſiderables, dont la valeur intrinſeque répondoit à peu prés au tiers de la valeur réelle de ces eſpéces. Le prix de cette monnoye étant idéal, elle fut auſſi-rôt décriée, & tomba à la moitié de ſa valeur. Les vieux Ecus de bon alloi monterent à 28. à 30. gros; & de là vient ce que nous appellons l'Ecu de banque. Pour remedier à ces abus, les Electeurs de Brandebourg & de Saxe * s'abouche- * En 1667.
rent à Cinna, & ils convinrent d'evaluër les Monnoyes ſur un nouveau pied, moyennant lequel le Marc fin d'argent, avec ce qu'on appelle le Stile de monnoye, ou le reméde, devoit être rendu au Public généralement dans toutes les eſpéces de monnoyes de l'Ecu jusqu'au fenin à 10. Ecus 16. gros. Depuis ce tems on frappa les florins & les demi florins, & le prix du marc d'Argent demeura fixé à 10. Ecus.

Depuis en 1690. Frèderic I. ſe concerta avec l'Electeur de Saxe & le Duc de Hanovre ſur les moyens de ſoutenir la monnoye ſur le pied de la Convention de Cinna, mais en ayant reconnu l'impoſſibilité, ils convinrent que l'eſpece courante des florins & des 8. gros ſeroit frappée dans leurs Etats à raiſon de 12. Ecus: c'eſt ce qu'on appelle le pied de Leipzig, qui ſubſiſte encore de nos jours.

Toutes les nouvelles Colonies que le grand Electeur avoit établies, ne furent véritablement floriſſantes que ſous Frèderic I. Nous eûmes alors une Manufacture de haute-liſſe égale à celle de Bruxelles, nos Galons égalerent ceux de France, nos Miroirs de Neuſtadt ſurpaſſerent par leur blancheur ceux de Veniſe, l'Armée fut habillée de nos propres draps. L'année 1700. les Troupes changerent d'armes, on abolit l'uſage des piques, & l'Infanterie eut des fuſils; la Cavalerie ne conſerva de ſon armure que la Cuiraſſe, & on lui donna des habits d'ordonnance.

La Cour étoit nombreuſe & brillante, les eſpeces y devenoient abondantes par les ſubſides étrangers, le Luxe parut dans les Livrées, les habits, les tables, les équipages & les bâtimens. Le Roi eut à ſon ſervice deux des plus habiles Architectes de l'Europe, & Schlüter qui ne leur cédoit point en mérite, & dont la Sculpture relévoit l'Architecture des premiers. Bott fit la belle Porte de Weſel, il donna les

deſſeins du Chateau & de l'Arſenal de Berlin, il bâtit la maiſon de Poſte au coin du grand Pont, & le beau Portique du Chateau de Potzdam, trop peu connu des amateurs. Loſander éleva la nouvelle aîle du Château de Königsberg, & la Cour des monnoyes qui fut abbatuë dans la ſuite. Schlüter décora l'Arſenal de ces trophées, & de ces beaux Maſcarons, qui font l'admiration des Connoiſſeurs, & il fit fondre la Statuë equeſtre du Grand Electeur, qui paſſe pour un Chef d'Oeuvre. Le Roi embellit la Ville de Berlin de l'Égliſe du Cloitre, des Arcades, & de quelques autres Edifices encore; & il orna les Maiſons de plaiſance d'Orangebourg, de Potzdam & de Charlottenbourg, par toutes ſortes d'augmentations & d'embelliſſemens.

Les beaux Arts, enfans de l'abondance, commencerent à fleurir. L'Academie des Peintres dont Pesne, Mayer, Widemann & Leigeber étoient les premiers Profeſſeurs, fut fondée; mais il ne ſortit de leur Ecole aucun Peintre de réputation. Ce qu'il y eut de plus remarquable, & ce qui intereſſe le plus les progrés de l'eſprit humain, ce fut la fondation de l'Academie Royale des Sciences en 1700. La Reine Sophie Charlotte y contribua le plus. Cette Princeſſe avoit le génie d'un grand homme, & les connoiſſances d'un ſavant; elle croyoit qu'il n'étoit pas indigne d'une Reine, d'eſtimer un Philoſophe; Vous ſentez bien que ce Philoſophe dont je vous parle, c'étoit Leibnitz: & comme ceux qui ont reçu du Ciel des ames privilegiées, s'élevent à l'égal des Souverains, elle admit Leibnitz dans ſa familiarité; elle fit plus, elle le propoſa comme ſeul capable de jetter les fondemens de cette nouvelle Academie. Leibnitz qui avoit plus d'une ame, ſi j'oſe m'exprimer ainſi, étoit bien digne de préſider dans une Academie, qu'au beſoin il auroit répreſenté tout ſeul. Il inſtitua 4 Claſſes, dont l'une de Phyſique & de Medecine, l'autre de Mathematiques, la troiſieme de la Langue & des Antiquités d'Allemagne, & la derniere des Langues & des Antiquités Orientales. Les plus célébres de nos Academiciens furent Meſſieurs Basnage, Bernoulli, la Croze, Guillelmini, Hartzöker, Herman, Kirch, Römer, Stürmer, Varignon, des Vignoles, Werenfels & Wolff. Depuis on y reçut Meſſieurs de Beauſobre

&

& Lenfant, Savans dont les plumes auroient fait honneur aux Siécles d'Auguſte & de Louïs XIV.

Otton de Guericke fleuriſſoit encore à Magdebourg : c'eſt le même auquel nous devons l'invention de la pompe Pneumatique, & qui par une heureuſe deſtinée a rendu ſon eſprit philoſophique & inventif héréditaire à ſes deſcendans.

Les Univerſités proſperoient en même tems : Halle & Francfort étoient fournies de ſavans Profeſſeurs. Thomaſius, Gundling, Ludewig, Wolff & Strick, tenoient le premier rang pour la célebrité, & faiſoient nombre de Diſciples. Wolff commenta l'ingenieux Syſteme de Leibnitz ſur les Monades, & noya dans un déluge de paroles, d'argumens, de Corollaires & de Citations, quelques Problemes que Leibnitz avoit jetté, peut-être comme une amorce aux Métaphyſiciens. Le Profeſſeur de Halle écrivit laborieuſement nombre de volumes, qui, au lieu de pouvoir inſtruire des hommes faits, ſervirent tout au plus de Catechiſme de Dialectique pour des enfans. Les Monades ont mis aux priſes les Metaphyſiciens & les Géometres d'Allemagne, & ils ſe diſputent encore ſur la diviſibilité de la matiére.

Le Roy fonda même à Berlin une Academie, pour des jeunes gens de Condition, ſur le modele de celle de Luneville : malheureuſement elle ne ſubſiſta pas longtems.

Ce Siécle ne produiſit aucun bon Hiſtorien. On chargea Teiſſier d'écrire l'Hiſtoire de Brandebourg ; il en fit le Panegyrique. Puffendorff écrivit la vie de Frèderic Guillaume, & pour ne rien omettre, il n'oublia ni ſes Clercs de Chancellerie, ni ſes Valets de Chambre. Nos Auteurs ont, ce me ſemble, toûjours peché, faute de diſcerner les choſes eſſentielles des acceſſoires, d'éclaircir les faits en les débrouïllant, & de racourcir & reſſerrer leur proſe trainante, & exceſſivement ſujette aux inverſions & aux nombreuſes épithetes.

Dans cette diſette de tout bon Ouvrage en proſe, le Brandebourg eut un bon Poëte. C'étoit le Sieur de Canitz ; il traduiſit heureuſement quelques Epitres de Boileau, il fit des vers à l'imitation d'Horace, & quelques Ouvrages où il eſt tout à fait Original. C'eſt le Pope de l'Allemagne, le Poëte le plus élégant, le plus correct & le

moins diffus, qui ait fait des vers en nôtre langue. Communément en Allemagne le Pédantisme affecte jusqu'aux Poëtes; la langue des Dieux eſt proſtituée par la bouche de quelque Régent d'un College obſcur, ou par quelque Etudiant diſſolu; & ce qu'on appelle honnêtes gens ſont, ou trop pareſſeux, ou trop fiers. pour manier la Lyre d'Horace, ou la Trompette de Virgile. Mr. *de Canitz*, quoique d'une maiſon illuſtre, crut que l'eſprit & le talent de la Poëſie ne dérogeoit pas: il le cultiva, comme nous l'avons dit, avec ſuccés; il eut une Charge à la Cour, & puiſa dans l'uſage de la bonne Compagnie cette politeſſe & cette amenité qui plait dans ſon ſtile.

Les Spectacles Allemans étoient peu de choſe. Ce qu'on appelle Tragédie, eſt communément un Monſtre, compoſé d'enflure & de baſſe plaiſanterie; les Auteurs Dramatiques ignorent jusqu'aux moindres régles du Théatre; la Comedie eſt plus pitoyable encore. C'eſt une farce groſſiere qui choque le goût, les bonnes moeurs & les honnêtes gens. La Reine entretenoit un Opera Italien, dont le fameux Bononchini étoit le Compoſiteur; nous eumes dés lors de bons Muſiciens. A' la Cour il y avoit une Comedie Françoiſe qui donnoit dans ſes repreſentations les chefs d'oeuvre des Molieres, des Corneilles & des Racines.

Le goût du Théatre François paſſa en Allemagne avec celui des modes de cette Nation. L'Europe enthouſiasmée du caractére de grandeur que Louïs XIV. imprimoit à toutes ſes actions, de la politeſſe qui régnoit à ſa Cour, & des grands hommes qui illuſtroient ſon Régne, vouloit imiter la France qu'elle admiroit. Toute l'Allemagne y voyageoit; un jeune homme paſſoit pour un imbecille, s'il n'avoit ſéjourné quelque tems à la Cour de Verſailles. Le gout des François régla nos Cuiſines, nos Meubles, nos habillemens, & toutes ces bagatelles, ſur leſquelles la tyrannie de la mode exerce ſon empire: cette paſſion portée à l'excés dégenera en fureur, les femmes qui outrent ſouvent les choſes, la pouſſerent jusqu'à l'extravagance. (*a*)

La

(*a*) La Mere du Poëte Canitz ayant épuiſé la France en modes nouvelles, pour rencherir ſur les autres Dames de Berlin, commit à un Marchand de faire venir de

La Cour ne donnoit pas tant dans les modes étrangeres que la Ville ; la magnificence & l'étiquette y décoroient l'ennui. On s'enyvroit même en Cérémonies. Le Roi inſtitua l'Ordre de l'Aigle noir, tant pour avoir un Ordre, comme en ont tous les Rois, que pour ſe procurer à cette occaſion une Fête, qui reſſemble aſſés à une Maſcarade. Ce Roi qui avoit fondé une Academie par complaiſance pour ſon Epouſe, entretenoit des Bouffons pour ſatisfaire à ſa propre inclination. La Cour de la Reine Sophie Charlotte étoit toute ſeparée de l'autre. C'étoit un Temple où ſe conſervoit le feu ſacré des Veſtales, l'Azile des Savans, & le Siége de la politeſſe. On regretta d'autant plus les vertus de cette Princeſſe qui celle * qui remplit le Trône aprés elle, ſe livra aux devots, & paſſa ſa vie avec des hypocrites, race médiſante, qui verſe ſes poiſons ſur la vertu, en ſanctifiant ſes propres vices. Enfin des adeptes parurent à la Cour; un Italien, nommé Cataneo, aſſura le Roi qu'il avoit le ſecret de faire de l'or, il en dépenſa beaucoup, & n'en fit point. Le Roi ſe vengea de ſa crédulité ſur ce malheureux, & Cataneo fut pendu.

* Princeſſe de Mecklenbourg, qui tomba enſuite en démence.

L'Etat changea presque entierement de forme ſous Fréderic Guillaume: la Cour fut congediée, & les groſſes penſions ſouffrirent une réduction ; beaucoup de perſonnes qui avoient entretenu Caroſſe, marcherent à pied : ce qui fit dire au Public que le Roi avoit rendu l'uſage des jambes aux perclus. Sous Frèderic I. Berlin étoit l'Athenes du Nord: ſous Frèderic Guillaume elle en devint la Sparte. Tout le Gouvernement fut militaire ; l'augmentation de l'Armée ſe fit, 1713.

de Paris un Mari jeune, beau, vigoureux, poli, ſpirituel & noble, ſuppoſant que cette Marchandiſe s'y trouvoit auſſi communément que des pompons dans une Boutique. Le Marchand, tout nouveau dans cette eſpece de métier, s'acquitta de ſa commiſſion comme il pût. Ses Correſpondans trouverent enfin un Epouſeur. C'étoit un homme de 50. ans, il ſe nommoit le Sieur de Brinboc, d'un tempérament foible & valétudinaire; il arrive, Madame de Canitz le voit, s'effraye & l'épouſe. Ce fut un bonheur pour les Pruſſiens que ce mariage tourna au mécontentement de la Dame, autrement ſon exemple auroit été ſuivi ; nos Beautés auroient paſſés dans les mains des François, & les Berlinois auroient été réduits comme les Romains à enlever les Sabines de leur voiſinage.

fit, & dans l'ardeur de ces premiers enrollemens, quelques Artiſans furent faits Soldats, ce qui répandit la terreur parmi les autres qui ſe ſauverent en partie: cet accident imprêvu cauſa de nouveau un dommage conſiderable à nos Manufactures.

Le Roi porta un prompt remede à ces abus, & il s'attacha avec une attention ſinguliere au rétabliſſement & aux progrès de l'induſtrie: il défendit par un arrêt ſévere la ſortie de nos Laines, il établit le Lagerhaus, * magaſin d'où l'on avance des laines aux pauvres Manufacturiers, qu'ils reſtituënt par leur ouvrage. Nos draps trouverent un débit aſſuré dans la conſommation de l'Armée, qui fut habillée de neuf tous les ans. Ce débit s'étendit jusques chez l'Etranger: la Compagnie de Ruſſie fut formée l'année 1725. nos Marchands fourniſſoient les draps pour toutes les Troupes Ruſſes; mais les Guinées Angloiſes paſſerent en Moſcovie, & elles furent bientôt ſuivies de leurs draps, de ſorte que nôtre Commerce ceſſa, nos Manufactures en ſouffrirent au commencement, mais d'autres ſorties s'ouvrirent. Les Ouvriers n'eurent plus aſſés de nos propres laines, on permit aux Mecklenbourgeois de nous vendre les leurs, & dés l'année 1733. nos manufactures étoient ſi floriſſantes qu'elles debiterent 44. mille piéces de drap de 24. aunes chacune chez l'Etranger.

* en 1714.

Berlin fut comme un Magazin de Mars: tous les Ouvriers qui peuvent être employés pour une Armée, y proſpérerent, & leurs Ouvrages furent recherchés par toute l'Allemagne. On établit à Berlin des Moulins de poudre à Canon, à Spandow des Fourbiſſeurs, à Potzdam des Armuriers, & à Neuſtadt des Ouvriers, qui travailloient en ferronerie & en cuivre.

Le Roi donna des immunités & des récompenſes à tous ceux qui bâtiroient dans les Villes de tous ſes Etats; il ajouta tout le Quartier de la Frèderic-Stadt à ſa Capitale, & couvrit de maiſons les places qu'avoit occupé l'ancien rempart. Il créa la ville de Potzdam, * & il la peupla; il ne fit pas le moindre Bâtiment pour lui même, mais tout pour ſes ſujets. L'Architecture de ſon Régne eſt généralement infectée par le goût Hollandois, il ſeroit à deſirer que les grandes dépenſes que ce Prince, fit en bâtimens, euſſent été dirigées par de plus habiles

* A peine y avoit-il 400. habitans dans cette Ville, au lieu qu'il y en a preſent plus de 20. mille.

habiles Architectes ; il eut le ſort de tous les Fondateurs des Villes, qui, occupés par la ſolidité de leurs deſſeins, ont la plûpart negligé ce qui avec la même dépenſe les auroit embellies & ornées davantage.

Berlin aprés ſon augmentation reçut une Police nouvelle * ſur le pied à peu prés de celle de Paris. On établit dans tous les quartiers de la ville des Officiers de police; l'uſage des Fiacres s'établit en même tems; on purgea la Ville de ces fainéans qui ſe nourriſſent à force d'importunités, & ces malheureux objets de nos dégoûts & de nôtre compaſſion, envers lesquels la Nature n'a été qu'une marâtre, trouvérent des aziles dans les Hopitaux publics. * en 1734.

Pendant que tous ces changemens ſe firent, le luxe, la magnificence & les plaiſirs diſparurent, l'eſprit d'épargne s'introduiſit dans tous les états ; chez le riche comme chez le pauvre. Sous les Régnes précedens, beaucoup de Nobles vendoient leurs terres pour acheter du drap d'or & des galons ; cet abus ceſſa. Dans la plûpart des Etats Pruſſiens, les Gentilshommes ont beſoin d'une bonne Oeconomie pour ſoutenir leurs familles, à cauſe que le droit de primogéniture n'a point lieu, & que les Péres ayant beaucoup d'enfans à établir, ne peuvent procurer que par leur épargne un revenu honnête à ceux qui aprés leur mort partageront leur maiſon dans des branches nouvelles.

Cette diminution dans la dépenſe du Public, n'empêcha pas beaucoup d'Artiſans de ſe perfectionner ; nos Caroſſes, nos Galons, nos Velours & nos Ouvrages d'Orfevrerie, ſe répandirent par toute l'Allemagne.

Mais ce qu'il y eut de déplorable, ce fut que pendant qu'on faiſoit des arrangemens ſi utiles & ſi grands, on laiſſa tomber dans une décadence entiére l'Academie des Sciences, les Univerſités, les Arts liberaux & le Commerce.

On rempliſſoit mal & ſans choix les places qui venoient à vaquer dans l'Academie Royale des Sciences, & par une dépravation ſinguliere le Siécle affectoit de mépriſer une Societé, dont l'origine étoit auſſi illuſtre, & dont les travaux tendoient autant à l'honneur de

la Nation que de l'eſprit humain. Pendant que tout ce Corps tomboit en léthargie, la Medecine & la Chymie ſe ſoutinrent. Pott, Margraff & Eller, combinoient & décompoſoient la matiere, & éclairoient le Monde par leurs découvertes; les Anatomiſtes obtinrent un Théatre pour leurs diſſections publiques, qui devint une Ecole floriſſante de Chirurgie.

La faveur & les brigues rempliſſoient les Chaires des Profeſſeurs dans les Univerſités; les Dévots qui ſe mêlent de tout, acquirent une part à la Direction des Univerſités, ils y perſecutoient le bon ſens, & ſur tout la Claſſe des Philoſophes. Wolff fut exilé pour avoir déduit avec un ordre admirable les preuves ſur l'exiſtence de Dieu; la jeune Nobleſſe qui ſe vouöit aux armes, crut déroger en étudiant, & comme l'eſprit humain donne toujours dans les excés, ils regarderent l'Ignorance comme un titre de mérite, & le Savoir comme une Pédanterie abſurde.

La même raiſon fit que les Arts liberaux tomberent en décadence. L'Academie des Peintres ceſſa. Pesne qui en étoit le Directeur, quitta les Tableaux pour les Portraits; les Menuiſiers s'érigerent en Sculpteurs, & les Maçons en Architectes. Un Chymiſte, nommé Böttcher, paſſa de Berlin à Dresde, & donna au Roi de Pologne le ſecret de cette Porcelaine, qui ſurpaſſe celle de la Chine par l'élégance des formes & la fineſſe de la diaprure.

Notre Commerce n'étoit pas encore né; le Gouvernement l'étouffoit, en ſuivant des principes qui s'oppoſoient directement à ſes progrés: il n'en faut point conclurre que la nation manque de Génie propre au négoce. Les Vénitiens & les Génois furent les premiers qui le ſaiſirent, la découverte de la Bouſſole le fit paſſer chez les Portugais & les Eſpagnols, il s'étendit enſuite en Angleterre & en Hollande, les François s'y appliquerent les derniers, & ils regagnerent de viteſſe ce qu'ils avoient négligé par ignorance. Si les habitans de Dantzig, de Hambourg, de Lubeck, ſi les Danois & les Suédois, s'enrichiſſent tous les jours par la navigation, pourquoi les Pruſſiens n'en ſeroient-ils pas autant? Les hommes deviennent tous des Aigles quand on leur ouvre

ouvre les chemins de la fortune; il faut que l'exemple les anime, que l'émulation les excite, & que le Souverain les encourage. Les François ont été tardifs; nous le ſommes de même; peut-être eſt-ce que notre heure n'eſt pas encore venuë.

On ſongeoit moins alors à étendre le Commerce, qu'à réprimer les dépenſes inutiles. Les deuïls avoient été autrefois ruïneux pour les familles. On donnoit des feſtins aux Enterremens, la pompe funebre étoit même coûteuſe. Toutes ces coûtumes furent abolies. On ne drapa plus les Maiſons, ni les Caroſſes, on ne donna plus des livrées noires; & depuis on mourut à fort bon marché.

Ce Gouvernement tout militaire influa dans les moeurs, & régla même les modes. Le public avoit pris par affectation un air aigrefin; perſonne dans tous les Etats Pruſſiens n'avoit plus de 3. aunes de drap dans ſon habit, & moins de deux aunes d'épée penduës à ſon coté. Les femmes fuyoient la ſociété des hommes, & ceux-ci s'en dédommageoient entre le vin, le tabac & les bouffons. Enfin nos moeurs ne reſſembloient plus, ni à celles de nos ancêtres, ni à celles de nos voiſins; nous étions Originaux, & nous avions l'honneur d'être copiés de travers par quelques petits Princes d'Allemagne.

Vers les dernieres années de ce Régne * le hazard conduiſit à Berlin un homme d'un eſprit malfaiſant, obſcur & ruſé; c'étoit une eſpece d'Adepte, qui faiſoit de l'Or pour le Souverain, aux dépens de la bourſe de ſes ſujets; ſes artifices lui réüſſirent un tems, mais comme la méchanceté ſe découvre tôt ou tard, ſes preſtiges diſparurent, & ſa malheureuſe ſcience rentra dans les ténébres dont elle étoit ſortie.

Telles ont été les moeurs du Brandebourg ſous tous ſes différens Gouvernemens. Le Génie de la Nation fut ſupprimé par une longue ſuite de Siécles barbares, il s'éleva de tems en tems, mais il s'affaiſſa auſſi-tôt ſous l'ignorance & le mauvais goût; & lorſque des circonſtances heureuſes ſemblerent favoriſer ſes progrés, ſurvint une Guerre dont les ſuites funeſtes anéantirent l'Etat. Nous avons vû cet Etat renaiſſant de ſes cendres; nous avons vû par quels nouveaux efforts la Nation parvint à ſe civiliſer, & ſi ce beau feu n'a jetté que de foi-

bles étincelles, il ne faut qu'une bagatelle pour le faire éclorre au grand jour. Comme les ſemences ont beſoin d'un terrain propre pour leur dévelopement, de même les Nations demandent un concours de conjonctures heureuſes, pour qu'elles ſortent de leur engourdiſſement, & qu'elles reçoivent pour ainſi dire une nouvelle vie.

Tous les Etats ont eu un certain Cercle d'évenemens à parcourir, avant que d'atteindre à leur plus haut dégré de perfection. Les Monarchies y ſont arrivées avec une allure plus lente, & s'y ſont moins ſoutenuës que les Républiques; & s'il eſt vrai de dire que la forme de Gouvernement la plus parfaite, eſt celle d'un Royaume bien adminiſtré, il n'eſt pas moins certain que les Républiques ont rempli le plus promptement le but de leur Inſtitution, & ſe ſont le mieux conſervées, par ceque les bons Rois meurent, & que les ſages Loix ſont immortelles.

Sparte & Rome, qui furent fondées pour être Guerrieres, produiſirent, l'une cette phalange invincible, l'autre, ces Légions qui ſubjuguerent la moitié du monde connu. Sparte enfanta les plus illuſtres Capitaines. Rome devint une pepiniere de Héros. Athenes, à laquelle Solon avoit donné des Loix plus pacifiques, devint le berceau des Arts. A quelle perfection ſes Poëtes, ſes Orateurs & ſes Hiſtoriens, ne parvinrent-ils point? Cet azile des Sciences ſe conſerva juſqu'à l'entiere ruine de l'Attique. Carthage, Veniſe, & même la Hollande, furent par leur inſtitution liées au Commerce, & elles le pouſſerent & le ſoutinrent conſtamment, reconnoiſſant que c'étoit le principe de leur grandeur, & le ſoutien de leur Etat.

Continuons encore cet examen pour un moment. En touchant aux Loix fondamentales des Républiques, on eſt ſûr de les renverſer de fond en comble, à cauſe que la ſageſſe des Légiſlateurs a formé un tout, auquel les parties du Gouvernement tiennent eſſentiellement: rejetter les unes, c'eſt détruire les autres, par l'enchainure des Conſéquences qui les lie enſemble, & qui en forme un Syſtême affortiſſant & complet.

Dans

Dans les Royaumes la forme du Gouvernement n'a de baſe que le Deſpotisme du Souverain: les Loix, le Militaire, le Negoce, l'Induſtrie, & toutes les autres parties de l'Etat, ſont aſſujetties au caprice d'un ſeul homme, qui a des ſucceſſeurs qui ne ſe reſſemblent jamais; d'où il s'enſuit pour l'ordinaire qu'à l'avenement d'un nouveau Prince, l'Etat eſt gouverné par de nouveaux principes; & c'eſt ce qui porte préjudice à cette forme de Gouvernement. Il y a de l'unité dans le but que les Républiques ſe propoſent, & dans les moyens qu'elles employent pour y parvenir, ce qui fait qu'elles ne le manquent presque jamais. Dans les Monarchies un fainéant ſuccede à un Prince ambitieux; celui-ci eſt ſuivi d'un dévot, celui-là par un Guerrier, celui-ci par un ſavant, celui-là par un autre qui s'abandonne à la volupté; & pendant que ce Théatre mouvant de la fortune préſente ſans ceſſe des ſcenes nouvelles, le Génie de la Nation diverti par la varieté des objets ne prend aucune aſſiéte fixe. Il faut donc que dans les Monarchies les Etabliſſemens qui doivent braver la viciſſitude des Siécles, ayent des racines ſi profondes qu'on ne puiſſe les arracher, ſans ébranler en même tems les plus ſolides fondemens du Trône.

Mais la fragilité & l'inſtabilité ſont inſéparables des Ouvrages des hommes. Les Révolutions que les Monarchies & les Républiques éprouvent, ont leurs cauſes dans les Loix immuables de la Nature. Il faut que les paſſions humaines ſervent de reſſorts, pour amener & mouvoir ſans ceſſe de nouvelles décorations, que la fureur audacieuſe des uns enleve, & que la foibleſſe des autres ne peut défendre; que des ambitieux effrenés renverſent des Républiques, & que l'artifice triomphe quelquefois de la ſimplicité. Sans ces grandes ſecouſſes dont nous venons de parler, l'Univers reſteroit ſans ceſſe le même; il n'y auroit point d'égalité entre le deſtin des Nations. Quelques Peuples ſeroient toujours civiliſés & heureux, & d'autres toûjours barbares & infortunés.

Nous avons vû des Monarchies naître & mourir, des peuples, de barbares qu'ils étoient, ſe policer & devenir le modele des Nations. Ne pourrions-nous pas en conclurre que ces Nations ont une révolu-

tion ſemblable à celle des Planetes, qui, ſelon le ſentiment de quelques Aſtronomes, aprés avoir parcouru en dix mille ans tout l'eſpace des Cieux, ſe retrouvent d'où elles étoient parties?

Nos beaux jours arriveront donc, comme ceux des autres; nos prétenſions ſont d'autant plus juſtes que nous avons paye le tribut à la Barbarie, quelques Siécles de plus que les Méridionaux.

Ces Siécles précieux s'annoncent par le nombre de Grands hommes en tout genre qui naiſſent à la fois. Heureux ſont les Princes qui viennent au monde dans des conjonctures auſſi favorables! Les Vertus, les Talens, le Génie, les emportent, d'un mouvement commun avec eux, aux choſes grandes & ſublimes.

RE-

RÉPONSE

DE

M. DE MAUPERTUIS.

Après les Mémoires, Monſieur, que vous avez leus dans nos Aſſemblées precedentes ſur l'Hiſtoire de ce Païs, il ne nous reſtoit plus à deſirer que celui que nous venons d'entendre. On reconnoit dans tous le même Génie & le même Style : cependant, ſi je l'oſe dire, celui-ci a ſur les autres l'avantage que lui donne ſon ſujet.

Repréſenter les évenemens dans leur ordre, donner à chaque partie de l'Hiſtoire ſa proportion & ſa meſure, écrire avec préciſion & élegance ; ſuppoſe un Eſprit juſte, une Imagination heureuſe, & une connoiſſance parfaite de la Langue. Décrire les Moeurs & les Coutumes des peuples, remonter à leur origine, les ſuivre dans leur progrés ; marquer ce qui appartient à l'homme en général, ou à une Nation en particulier, n'eſt donné qu'à un Eſprit profond.

Si un Ecrivain ſe trouve aſſés avantagé de la Nature pour pouvoir remplir à la fois tous ces differens objets, combien ne ſera-t-il pas ſuperieur, & à l'Hiſtorien qui ne rapporte que les faits, & au Philoſophe qui s'en tient aux ſpeculations ? C'eſt que les évenemens ſont neceſſairement liés aux moeurs ; & en ſont presque toujours

les

les ſuites, ou les cauſes. Un Eſprit aſſés vaſte embraſſe cette rélation; il pourroit en quelque ſorte prévoir les moeurs qui doivent réſulter d'une certaine chaine d'evenemens ; prédire les évenemens, qui ſeront la ſuite des moeurs.

Si un tel homme ſe trouvoit appellé au Conſeil des Rois ; s'il ſe trouvoit lui-même revêtu d'une grande puiſſance; (car nous avons depuis Ceſar l'exemple de grands Princes, qui nnt été en même tems d'excellens Auteurs,) quel bonheur ne ſeroit ce pnint pour les Peuples qu'il auroit à gouverner ! Quel bonheur ne ſeroit-ce point pour toute l'Europe !

DE LA SUPERSTITION ET DE LA RELIGION.

Je diviſe en trois parties ce morceau qui concerne la Religion & la Superſtition, & je préſenterai pour plus de clarté & d'ordre la Religion ſous le Paganiſme, ſous le Papiſme, & ſous la Réforme.

ARTICLE I.

De la Religion ſous le Paganiſme.

Le Brandebourg a ſuivi le culte different des divers Peuples qui l'ont habité. Les Teutons qui furent ſes plus anciens habitans, adoroient un Dieu, nommé Tuiſton. Céſar dit que c'eſt le *Dis Pater* engendré par la Terre, & qui avoit lui-même un fils nommé Man.

Le culte que les Germains rendoient à leurs Dieux étoit proportionné à leurs moeurs ſauvages, groſſieres & ſimples ; ils s'aſſembloient dans des Bois ſacrés, chantoient des Hymnes à l'honneur de leurs Idoles, & leur ſacrifioient même des victimes humaines.

Il n'y avoit pas de Contrée qui n'eut ſon Dieu particulier ; les Vandales en avoient un, nommé Triglaff. On en trouva encore un au Harlungerberg auprés de Brandebourg ; il étoit repréſenté avec trois têtes, ce qui marquoit * qu'il régnoit au Ciel, ſur la Terre & dans les Enfers ; c'étoit apparement la Trinité du Paganiſme. Ta-

* Valentin Eichſtädt.

cite rapporte que les Germains avoient un certain nombre de Chevaux blancs, qu'ils croyoient être instruits des Mysteres de leurs Dieux, & qu'on nourrissoit un cheval noir pour la Déesse Trigla, qui passoit pour l'interprête de ses volontés. * Ces Peuples adoroient aussi des serpens, & l'on punissoit de mort ceux qui en tuoient.

* Alaus Arentzit.

Dans le V. Siécle les Vandales abandonnerent leur Patrie pour inonder la France, l'Espagne, & même l'Afrique. ‡ Les Saxons qui revenoient alors d'Angleterre, firent une descente à l'embouchure de l'Elbe, & prirent possession de ces Contrées entre l'Elbe, la Sprée & l'Oder, que les naturels du Pays avoient abandonnées. Leurs Dieux & leur Religion devinrent ceux du Brandebourg. La principale de leurs Idoles s'appelloit Irmansëul, ce qui signifie Colonne d'Irman. Les savans Etymologistes d'Allemagne n'ont pas manqué de faire dériver le nom d'Irman de Hermes, qui est le même que le Mercure des Grecs.

† Oroſe & Grégoire de Tours.

Il est connu à tous ceux qui sont versés dans la Litterature Allemande, que c'est une fantaisie générale parmi leurs Savans de trouver des rapports entre les Divinités de la Germanie, & celle des Egyptiens, des Grecs & des Romains. Il n'est malheureusement que trop vrai que l'erreur & la superstition semblent être le partage de l'humanité. Tous les Peuples ont eu la même pente pour l'Idolatrie; & comme ils ont tous à peu prés les mêmes Passions, les effets n'ont pas manqué d'y répondre. La Crainte donna le jour à la credulité, & l'Amour propre interessa bientôt le Ciel au destin des hommes. De là naquirent tous ces cultes différens, qui n'étoient à proprement parler que des soumissions modifiées en cent façons extravagantes, pour appaiser la colere céleste dont on redoutoit les effets. La Raison humaine, alterée & abrutie par la terreur que toutes sortes de calamités lui inspiroient, ne savoit à qui s'en prendre pour se rassurer contre ses craintes; & comme les malades ont recours aux remedes les plus insenses, pour essayer s'ils n'en trouveront point un qui les guérisse; le Genre humain supposa dans son aveuglement une essence divine, & une vertu secourable, dans tous les objets de la Nature

depuis

depuis les plus ſublimes jusqu'aux plus abjects. Tout fut adoré; l'encens fuma pour des Champignons, le Crocodile eut des Autels, les Statuës des Grands Hommes, qui les premiers avoient gouverné des Nations, eurent des Temples & des Sacrificateurs, & dans les tems où des afflictions générales déſoloient un païs, la ſuperſtition redoubloit. Les Savans Allemans ont raiſon de dire en ce ſens, que la ſuperſtition eſt la méme chez toutes les Nations; quoiqu'elle ſoit en général une ſuite de la crédulité, elle ſe manifeſte cependant ſous des nuances variées à l'infini, & proportionnées au Génie des Nations. J'aurois peine à me perſuader que les Fables ingénieuſes des Grecs, que leurs Dieux, Minerve, Venus & Apollon euſſent été connuës dans ce Païs du tems du Paganisme. Mais nos profonds Etymologiſtes ne s'embaraſſent pas de ſi peu de choſe; ils croyent ennoblir leur Mythologie en donnant à leurs Dieux des origines Grecques, ou Romaines, comme ſi le nom de ces Peuples pouvoit rendre l'Idolatrie plus reſpectable, & que l'extravagance des Grecs valût mieux que celle des Allemans.

Irmansäul n'étoit pas le ſeul Dieu des Saxons. On trouva ſous une de leurs Idoles l'Inſcription ſuivante. *Je fus autrefois le Duc des Saxons, j'en ſuis devenu le Dieu.* Angelus ſoutient qu'ils adoroient le Soleil, ſous la forme d'une tête radieuſe, & que cette Idole donna ſon nom à la Ville de Sonnenburg, où elle étoit placée. Le même Auteur prétend qu'ils adoroient de même Venus repréſentée à demi nuë, ayant la mammelle gauche percée par une fléche, & trois Graces plus petites qu'elle qui l'entouroient. Ces Peuples la nommoient Magda, ce qui veut dire fille; & Angelus aſſure qu'elle donna ſon nom à Magdebourg, où elle avoit ſes autels, * On voyoit encore des ruines de ſon Temple dans cette ville, avant que Tilly l'eut ſaccagée. Ce qui paroit de plus remarquable dans le Culte que les Saxons rendoient à cette Divinité, étoient les jeux qu'ils célébroient à ſon honneur. Ils conſiſtoient en des Tournois que repréſentoient tous les jeunes Gens des Bourgades voiſines; ils dépoſoient une ſomme d'argent entre les mains des Juges, pour doter une jeune fille qui

* Annales de Magdebourg.

étoit donnée en mariage comme un prix, à celui qui l'avoit emporté à la joute. Les Annales de Magdebourg témoignent que ces jeux ſe célébroient encore, comme des reſtes du Paganisme, l'année 1279. & l'année 1387.

Le Luxe s'introduiſit dans la Religion, lors que les Richeſſes augmenterent. Anciennement les Peuples tenoient qu'il n'étoit pas convenable de placer leurs Dieux dans des Temples bâtis de main d'hommes, & ils les adoroient dans leurs Bois ſacrés, mais à meſure que les moeurs s'adoucirent, leurs Dieux vinrent habiter les Villes. * Cependant l'ancien uſage ne fut pas entierement aboli; car on trouve que Charlemagne défendit aux Saxons d'adorer des Chênes, & de les arroſer du Sang des victimes.

* Linderbroek.

Les Prêtres † de ces tems étoient plus artificieux & plus fourbes que le Peuple. Outre leur Sacerdoce ils exerçoient une triple Charlatannerie; ils fabriquoient des Oracles, & ſe mêloient de l'Aſtrologie & de la Médecine. Il ne falloit pas tant de ruſes pour abuſer un Peuple auſſi groſſier. Auſſi-fut-il bien difficile de détruire une Religion ancrée par tant de ſuperſtitions dans les eſprits. Toute l'Allemagne étoit encore attachée au Culte des Idoles, quand Charlemagne, & après lui Henri l'Oiſeleur, entreprirent de convertir ces peuples. Après bien des efforts inutiles, ils n'y réüſſirent qu'en noyant l'Idolatrie dans des torrens de ſang humain qu'ils verſerent.

† Freinshemius & Schmidt.

ARTICLE II.

Converſion des Peuples au Chriſtianisme; & de l'Etat de la Religion Catholique dans le Brandebourg.

La folie de tous les Peuples eſt d'illuſtrer la Nobleſſe de leurs Loix, de leurs Coutumes & de leur Religion, par l'antiquité de leur origine. Les Allemans non contens d'avoir dérobé leurs Dieux aux Grecs, ont voulu paſſer pour auſſi vieux Chrêtiens que les autres Nations de l'Europe. Ils ont trouvé dans St. Jerôme je ne ſai quel paſſage qui dit, à ce que Staphonius & Smitius prétendent, que l'Apôtre Thomas vint prêcher l'Evangile au Nord de l'Allemagne. Il n'y prêcha

prêcha en verité que l'incredulité; car le peuple demeura Payen, bien longtems aprés lui.

Quoiqu'on diſe, il ne ſe trouve aucune trace de Chriſtianisme dans le Brandebourg que du tems de Charlemagne. * Cet Empereur, aprés avoir remporté differentes victoires ſur les Saxons & les Brandebourgeois, vint établir ſon Camp à Wormerſtedt † auprés de Magdebourg, & il n'accorda la paix à ces Provinces qu'il avoit ſubjuguées, qu'à condition qu'elles embraſſeroient le Chriſtianisme.

* Dans le VIII. Siécle.

† Henri Meibomius.

L'impuiſſance de réſiſter à un ennemi auſſi redoutable, & la crainte des menaces, conduiſit ces Peuples au Batême, qui leur fut adminiſtré dans le Camp de l'Empereur; mais la ſécurité les ramena tous à l'Idolatrie, dés que l'Empereur ſe fut éloigné avec ſon armée de leur voiſinage.

L'Empereur Henri l'Oiſeleur triompha enſuite à l'exemple de Charlemagne, des habitans des bords de l'Elbe & de l'Oder, & aprés bien du ſang répandu, ces Peuples furent ſubjugués & convertis. Les Chrêtiens détruiſirent par zéle les Idoles du Paganisme, de ſorte qu'il ne nous en eſt presque reſté aucun veſtige; les niches de ces Idoles vacantes furent remplies de Saints de toute eſpece; & de nouvelles erreurs ſuccederent aux anciennes. 928.

Ce Siécle que Léon X. illuſtra en Italie, en y reſſuſcitant les beaux arts & les ſciences, enſevelies depuis longtems ſous l'ignorance & le mauvais goût; ce Siécle, dis-je, n'étoit point auſſi célébre pour les Ultramontains: l'Allemagne étoit encore plongée dans l'ignorance la plus groſſiere, & elle languiſſoit ſous un Gouvernement tout barbare; point de moeurs, aucunes connoiſſances, & la Raiſon humaine privée des lumiéres de la Philoſophie demeuroit abrutie dans ſa ſtupidité: les Convertiſſeurs, & les Néophytes, dans le même cas ſur ces articles, n'avoient aucun reproche à ſe faire.

* Environ l'année 946. l'Empereur Othon fonda l'Evêché de Havelberg, & peu de tems aprés celui de † Brandebourg. Il crut apparemment d'oppoſer par ce moyen une digue au débordement de l'Idolatrie, à laquelle ces Peuples étoient enclins, comme les Prin-

* Angelus.

† 960.

ces bâtiſſent des Citadelles dans des Villes nouvellement conquiſes, pour reprimer l'indocilité & la mutinerie de leurs habitans.

Le Brandebourg enfin converti au Chriſtianisme, tomba bientôt dans l'excés du faux zèle ; il ſe rendit à la fois tributaire du Pape, de l'Empereur, & du Margrawe qui le gouvernoit. Le peuple ne tarda pas de ſe repentir de ſa ſottiſe, & il regretta ſes Idoles qui étoient des Objets palpables de ſon Culte, & qui lui étoient bien moins onéreuſes que les tributs qu'il payoit tous les ans au Pape, qu'il ne voyoit jamais. L'Amour de la Liberté, la force d'un ancien préjugé, l'avantage de ſon interêt, tout le ramena à ſes faux Dieux. Miſtevoyus, Roi des Vandales, ſe mit à la tête du Paganisme renaiſſant, & il rétablit l'ancien Culte, aprés avoir chaſſé le Margrawe Thierry de Brandebourg. Ce furent encore des Guerriers, qui pour la troiſieme fois rétablirent le Chriſtianisme dans le Brandebourg. La Religion Catholique triomphante y parut alors ſans contrainte, & entraina aprés elle les plus grands ſcandales ; les Evêques étoient ignorans, cruels, ambitieux, & de plus Guerriers ; ils porterent les armes en perſonne contre les Margrawes & contre d'autres voiſins, pillant, ravageant les Contrées, violant, faiſant les Incendiaires & s'arrogeant, (malgré une vie auſſi ſouillée de crimes,) un pouvoir abſolu ſur les conſciences.

Ces déſordres étoient ſi communs dans ces tems que l'Hiſtoire en fourmille d'exemples : je me contenterai d'en rapporter deux ſeulement. * En 1278. l'Archevêque Gunter de Brandebourg fit la guerre à l'Electeur Othon, ſurnommé le Sagittaire, le prit priſonnier & l'obligea de ſe rançonner moyennant une ſomme de 7000. Marcs d'argent. En 1391. l'Archevêque Albert qui étoit toûjours armé, ſe ſaiſit du Sieur de Bredow, qui étoit Gouverneur Général de la Marche ; prit la ville de Rathenau, & pénetra le long de la Havel, le flambeau d'une main, l'épée de l'autre, & déſola ainſi tout le païs.

* Lockelius.

L'ignorance craſſe où vivoient ces Peuples pendant le XIII. Siècle, étoit un terrain où la ſuperſtition devoit fructifier ; auſſi ne manqua-t-on pas de miracles, ni d'aucune ſupercherie, capable d'affermir l'autorité des Prêtres.

Locke-

Lockelius raconte grâvement, que le Prince Othon ayant été excommunié par Luitpoldt Archevêque de Brandebourg pour des raiſons frivoles, ſe moqua des Cenſures de l'Egliſe, mais qu'il fut bien attrapé à ſon tour, lorſqu'il vit que des Chiens affamés ne vouloient point manger des viandes de ſa table, & il rentra en lui même: ces Chiens étoient ſans doute orthodoxes, malheureuſement l'eſpece en eſt perduë.

Les Vierges miraculeuſes, les Images ſecourables, & les Reliques des Saints avoient alors une vertu toute ſinguliere. * Le Sang de Belitz entr'autres étoit fort renommé. Voici ce que c'étoit. Une Cabaretiére de cette Ville vola une hoſtie conſacrée, & l'enterra ſous un Tonneau dans ſa cave, pour avoir meilleur débit de ſa Biére; elle en eut des remords, (car les Cabaretiéres ont la conſcience delicate,) elle denonça ſon crime au Curé qui vint en proceſſion avec tout ſon attirail Pontifical pour déterrer l'hoſtie. En enfonçant la pêle en terre, on vit bouïllonner du Sang, & tout le monde cria, au miracle. L'impoſture étoit trop groſſiere, & l'on ſçut que c'étoit du Sang de boeuf que la Cabatiére y avoit verſé. Ces miracles ne laiſſoient pas que de faire impreſſion ſur l'eſprit des Peuples, mais ce n'en étoit pas aſſés. † La Cour de Rome, toûjours attentive à étendre ſa Domination ſous l'ombre des Autels, ne négligeoit aucun des moyens qui pouvoient l'y conduire. Dans le XIII. Siécle ſe formerent la plûpart des Ordres Religieux. Le Pape en établit en Allemagne, & dans le Brandebourg, le plus qu'il pût, ſous prétexte d'affermir par là les eſprits dans le Chriſtianiſme. Les Miſanthropes, les fainéans, les pareſſeux, & toutes ſortes de gens qui s'étoient deshonnorés dans le monde, ſe refugiérent dans ces aziles ſacrés; ils appauvrirent l'Etat de ſujets, en le ſequeſtrant de la Société, & en renonçant à la Bénédiction que Dieu donna à nos premiers Parens. Ils furent à la charge des Citoyens, ne ſe nourriſſant que d'aumônes, ou faiſant des acquiſitions illicites: & quoique ces Etabliſſemens fuſſent également contraires aux Loix de la Société & de la bonne Politique, le Pape les introduiſit dans toute l'Europe, & parvint ſans oppoſition à lever une puiſſante armée de Prêtres, aux dépens de tous les Princes, & d'entretenir de gros

* 1249. Annales de Brandebourg.

† en 1270.

groſſes Garniſons dans des Païs ſur lesquels il n'avoit aucune Souveraineté. Mais dans ces temps les Peuples étoient abrutis, les Princes foibles, & la Religion triomphante.

Quand une fois le Chriſtianisme eut pouſſé de profondes racines, il produiſit des Fanatiques de toute eſpéce. * La Peſte ravagea le Brandebourg en 1351. & c'en fut aſſés pour faire extravaguer la ſuperſtition, Pour appaiſer la colore céleſte, on batiſa des Juifs par force, on en brula d'autres, on fit des Proceſſions, des Voeux aux Images miraculeuſes, & l'imagination échauffée par tant d'inventions folles, ou bizarres, enfanta enfin l'Ordre des Flagellans. C'étoient des Chrêtiens mélancholiques & atrabilaires, qui ſe fouëttoient avec des verges de fil d'archal dans les Proceſſions publiques. Cependant le Pape eut horreur de ces macerations monſtrueuſes, & reprouva l'ordre & ſes abus.

* Cramer, Baronius, Lockelius.

On tourna la dévotion du Public ſur des objets plus doux. Le Pape Jean XXII. établit des Bureaux d'Indulgences dans le Brandebourg. Les Auguſtins trafiquoient de ces Indulgences, & en envoyoient le produit à Rome. Les miracles devinrent à la fin ſi fréquens, † que les Auteurs rapportent qu'il tomba l'année 1500. une pluye de Croix rouges & blanches ſur tous les paſſans. On trouva même de ces Croix dans le pain, ce qui fut regardé comme le préſage d'un grand malheur.

† Lockelius Annales de Brandebourg

Dans ce tems où les Prêtres abuſoient ſi groſſierement de la crédulité des hommes, où ils ſe ſervoient de la Religion pour s'enrichir, où les Eccleſiaſtiques menoient la vie la plus ſcandaleuſe, un ſimple Moine entreprit de réformer tant d'abus. Il rendit aux hommes par ſon exemple l'uſage de la Raiſon, qui leur avoit été interdit pendant tant de Siécles, & l'eſprit humain enhardi par le recouvrement de ſa liberté, étendit de tous côtés la ſphére de ſes connoiſſances.

ARTICLE III.

De la Religion ſous la Réforme.

Je ne conſidérerai point l'Ouvrage de la Réforme du coté de la

la Theologie & de l'Hiſtoire ; les Dogmes de cette Religion, & les évenemens qu'elle fit naître, ſont ſi connus que ce n'eſt pas la peine de les répeter. Une Révolution ſi grande & ſi ſinguliere, qui changea presque tout le Syſtême de l'Europe, mérite d'être examinée avec des yeux philoſophiques.

La Religion Catholique, qui s'étoit élevée ſur la ruïne de celle des Juifs & des Payens, ſubſiſtoit depuis XV. Siécles: humble & douce ſous les perſécutions, mais fiere aprés ſon Etabliſſement, elle perſécuta à ſon tour. Tous les Chrêtiens étoient ſoumis au Pape, qu'ils croyoient infaillible ; ce qui rendoit ſon pouvoir plus étendu que celui du Souverain le plus deſpotique. Un miſerable Moine s'éleva contre une Puiſſance ſi ſolidement établie, & la moitié de l'Europe ſecoüa le joug de Rome.

Toutes les raiſons qui contribuerent à ce grand changement extraordinaire, ſubſiſtant longtems avant qu'il vint à éclorre, préparoient d'avance les eſprits à ce dénouëment. La Religion Chrêtienne étoit ſi dégénérée, qu'on n'y reconnoiſſoit plus les Caractéres de ſon Inſtitution. Rien ne ſurpaſſoit dans ſon origine la ſainteté de ſa Morale, mais la pente du Coeur humain à la corruption en pervertit bientôt l'uſage. Ainſi les ſources les plus pures du bien ſont devenuës des principes de toutes ſortes de maux pour les hommes. Cette Religion qui enſeignoit l'humilité, la charité & la patience, s'établit par le fer & par le feu. Les Prêtres des Autels dont la ſainteté & la pauvreté devoit être le partage, menerent une vie ſcandaleuſe ; ils acquirent des richeſſes, ils devinrent ambitieux, quelques uns furent des Princes puiſſans. Le Pape, qui originairement relevoit des Empereurs, s'arrogea le pouvoir de les faire, & de les dépoſer, il fulmina des Excommunications, il mit des Royaumes en interdit, & il outra ſi prodigieuſement les choſes que, de quelque maniére que ce fut, il falloit à la fin que le Monde ſe revoltât contre tant d'abus.

La Religion changea ainſi que les moeurs, elle perdit de ſiécle en ſiécle ſa ſimplicité naturelle, & à force de fard, elle devint méconnoiſſable. Tout ce qu'on y ajouta, n'étoit que l'Ouvrage des hom-

mes, il devoit périr comme eux. Au Concile de * Nicée, la Divinité † du Fils fut déclarée égale à celle du Pére, & le St. Eſprit annexé à ces deux perſonnes, forma la Trinité. On défendit aux Prêtres de ſe marier, par les Ordonnances du Concile de Tolède. * Cependant ils ne ſe ſoumirent à la volonté de l'Egliſe que dans le XIII. Siécle. Le Purgatoire prit naiſſance dans le VI. Siécle. Le Concile de Trente en fit un dogme. Le Culte des Images fut autoriſé par le ſecond Concile de Nicée, † & la Tranſſubſtantiation fut établie par les Péres du Concile de Trente. * Les Ecoles de Theologie ſoutenoient déjà l'Infaillibilité du Pape, depuis que les Evêchés de Rome & de Conſtantinople ſe trouverent en oppoſition. Quelques ſolitaires fonderent des Ordres Religieux, & rendirent toute ſpéculative une vie, qui doit ſe paſſer en action pour le bien de la ſocieté; les Couvens ſe multiplierent à l'infini, & une grande partie du Genre humain y fut enſéveli. Enfin toutes ſortes de ſupercheries s'inventerent pour ſurprendre la bonne foi du Vulgaire, & les faux miracles devinrent presque communs.

Ce n'étoit pas cependant par ces changemens qui regardoient l'objet de la foi, que la Réforme pouvoit venir dans la Religion. Du nombre des gens qui penſent, la plûpart tournent toute la ſagacité de leur eſprit du côté de l'interêt & de l'ambition; peu combinent des idées abſtraites, & encore moins réfléchiſſent profondément ſur des matieres auſſi importantes; & le peuple, la plus reſpectable, la plus nombreuſe & la plus infortunée partie de la Societé, ſuit les impreſſions qu'on lui donne.

Il n'en étoit pas ainſi du pouvoir tyrannique que le Clérgé exerçoit ſur les conſciences; les Prêtres dépouilloient les hommes de leurs biens & de leur liberté.

Cet eſclavage qui s'appéſantiſſoit chaque jour, excitoit déjà des murmures. L'homme le plus ſtupide, comme le plus ſpirituel, dés qu'il a de la ſenſibilité, s'apperçoit du mal qu'il ſouffre; tous tendent à leur bien-être, ils endurent un tems, mais à la fin la patience leur échape, & les véxations que tant de Peuples ſouffroient, auroient immanquablement donné lieu à quelque réforme, ſi le Clergé Romain forte-

* 311.

† Origene & St. Juſtin, n'étoient pas de ce ſentiment: le dernier dit dans ſon Dialogue p. 316. que la grandeur du Fils n'approche pas de celle du Pére.

* Tenu l'année 400.

† Tenu en 781.

* 1645.

fortement agité par des diſſenſions inteſtines, n'eut enfin donné lui-même le ſignal de la liberté, en arborant l'étendart de la révolte contre le Pape. Les Vaudois, les Wiclefites & les Huſſites avoient déjà commencé à remuër, mais Luther & Calvin auſſi audacieux, & nés dans des conjonctures plus favorables, conſommerent enfin ce grand Ouvrage.

Les Auguſtins étoient en poſſeſſion du trafic des Indulgences, le Pape chargea les Dominicains de les prêcher; ce qui excita une querelle furieuſe entre ces deux Ordres. Les Auguſtins déclamerent contre le Pape; Luther qui étoit de leur Ordre, attaqua avec vehémence les abus de l'Egliſe, il arracha d'une main hardie une partie du bandeau de la ſuperſtition, il devint bientôt Chef de parti: & comme ſa Doctrine dépouilloit les Evêques de leurs Bénéfices, & les Couvens de leurs Richeſſes, les Souverains ſuivirent en foule ce nouveau Convertiſſeur.

La Religion prit alors une forme nouvelle, & ſe rapprocha beaucoup de ſon ancienne ſimplicité. Ce n'eſt point ici le lieu d'examiner, s'il n'eut pas mieux valu lui laiſſer plus de pompe & d'exterieur pour qu'elle en impoſât davantage au Peuple, qui n'eſt frappé, & ne juge que par les ſens; il paroit qu'un Culte tout ſpirituel, & auſſi nud que l'eſt celui des Proteſtans, n'eſt pas fait pour des hommes materiels & groſſiers, incapables de s'élever par la penſée à l'adoration des plus ſublimes vérités.

La Réforme fut utile au monde, & ſur tout aux progrés de l'eſprit humain. Les Proteſtans, obligés de réfléchir ſur des matieres de la foi, ſe dépouillerent tout d'un coup des préjugés de l'Education, & ſe virent en liberté de ſe ſervir de leur raiſon, de ce guide qui eſt donné aux hommes pour les conduire, & dont au moins ils devroient faire uſage pour l'objet le plus important de leur vie. Les Catholiques vivement attaqués furent obligés de ſe défendre. Les Eccleſiaſtiques étudierent, & ils ſortirent de l'ignorance craſſe & honteuſe, dans laquelle ils croupiſſoient presque généralement.

S'il n'y avoit qu'une Religion dans le monde, elle ſeroit ſuperbe & deſpotique ſans retenuë; les Eccléſiaſtiques ſeroient autant de

Tyrans, qui, exerçant leur ſeverité ſur le peuple, n'auroient d'indulgence que pour leurs crimes. La Foi, l'Ambition & la Politique leur aſſerviroient l'Univers. A préſent qu'il y en a pluſieurs, aucune de ces Sectes ne ſort, ſans s'en repentir, des voyes de la modération. L'exemple de la Réforme eſt un frein qui empêche le Pape de ſe livrer à ſon ambition, & il craint avec raiſon la défection de ſes Membres, s'il abuſe de ſon pouvoir; auſſi devient-il ſobre d'excommunications, depuis qu'une pareille démarche lui enleva Henri VIII. & le Royaume d'Angleterre. Le Clergé Catholique & Proteſtant, qui s'obſerve avec une diſpoſition égale à la critique, eſt retenu des deux côtés à garder au moins une décence exterieure. Ainſi tout reſte en équilibre. Heureux, ſi l'eſprit de parti, le fanatisme, & un excés d'aveuglement, ne les précipitent jamais dans des guerres, dont la fureur eſt le partage, & que des Chrêtiens ne devroient jamais ſe faire. En regardant la Religion ſimplement du côté de la Politique, il paroit que la Proteſtante eſt la plus convenable aux Républiques & aux Monarchies. Elle s'accorde le mieux avec cet eſprit de liberté qui fait l'eſſence des premieres. Car dans un Etat, où il faut des Négocians, des Laboureurs, des Artiſans, des Soldats, des Sujets en un mot, il eſt ſûr que des Citoyens qui font voeu de laiſſer périr l'eſpèce humaine, deviennent pernicieux.

Dans les Monarchies la Religion Proteſtante, qui ne reléve de perſonne, eſt entierement ſoumiſe au Gouvernement; au lieu que la Catholique établit un Etat ſpirituel, tout-puiſſant, fecond en complots & en artifices, dans l'Etat temporel du Prince; que les Prêtres qui dirigent les conſciences, (& qui n'ont de ſuperieur que le Pape,) ſont plus maitres des Peuples, que le Souverain qui les gouverne, & que par une adreſſe à confondre les interêts de Dieu avec l'ambition des hommes, le Pape s'eſt vû ſouvent en oppoſition avec des Souverains, ſur des ſujets qui n'étoient aucunement du reſſort de l'Egliſe.

Dans le Brandebourg, & dans la plupart des Provinces de l'Allemagne, le peuple portoit impatiemment le joug du Clergé Romain. C'étoit une Religion trop onéreuſe pour des païs auſſi peu opulens. Le Purgatoire, la Meſſe des morts & des vivans, le Jubilé, les Annates

tes, les Indulgences, les Péchés véniels & mortels, les Pénitences changées en Amendes pécuniaires, les Affaires marrimoniales, les Voeux, les Offrandes, étoient autant d'impôts que le Pape levoit sur la crédulité, & qui lui donnoient des revenus aussi solides que le Méxique en fournit à l'Espagne. Ceux qui les payoient, étoient épuisés & mécontens. Il n'étoit donc pas même nécessaire d'employer l'évidence des argumens pour disposer ces esprits à recevoir la Réforme; ils crioient contre le Clergé qui les opprimoit: un homme vint, qui promit de les en délivrer, & ils le suivirent.

Joachim II. fut le premier Electeur qui embrassa la Religion Lutherienne. Sa Mère, qui étoit une Princesse de Dannemarc, lui communiqua ses sentimens. Car la nouvelle Doctrine avoit penétré en Dannemarc, avant que d'être reçuë dans le Brandebourg. Le Païs suivit l'exemple du Prince, & tout le Brandebourg se fit Protestant. Matthieu Jagow, Evêque de Brandebourg, administra le Sacrement sous les deux espéces dans le Couvent des Moines noirs. Ce Couvent devint ensuite la Cathédrale de Berlin. Joachim II. se distingua dans le parti, tant par les Lettres de Controverse qu'il écrivit au Roi de Pologne, que par les discours éloquens, (* à ce que disent les Auteurs,) que ce Prince prononça à la Diéte d'Augsbourg en faveur des Protestans.

* Lockelius, Annales de Brandebourg.

La Réforme ne put point détruire toutes les erreurs: quoiqu'elle eut ouvert les yeux du Peuple sur une infinité de superstitions, il s'en conserva encore beaucoup d'autres; tant la pente de l'esprit humain pour l'erreur est inconcevable. Luther, qui ne croyoit point au Purgatoire, admettoit les Revenans & les Démons dans son Systême; il soutint même que Satan lui apparut à Wittemberg, & qu'il l'éxorcisa en lui jettant un Cornet d'encre à la tête. Il n'y avoit alors presqu'aucune Nation qui ne fut imbuë de pareils préjugés. La Cour, & à plus forte raison le peuple, avoient l'esprit rempli de Sortileges, de Divinations, de Revenans & de Démons. En 1553. deux vieilles femmes passerent par l'épreuve du feu pour se purger de l'accusation de sorcellerie. La Cour avoit son Astrologue. L'un prédit à la naissance de Jean Sigismond, que ce Prince seroit heureux, à cause qu'au-

même tems on avoit découvert au Ciel une Etoile nouvelle dans la Conſtellation de Caſſiopée. L'Aſtrologue n'avoit pas prédit cependant, que Jean Sigismond ſe feroit Reformé, pour gagner les Hollandois, dont les ſecours lui devinrent utiles dans la pourſuite de ſes droits ſur le Duché de Cleves.

Depuis que le Schisme de Luther ſéparoit l'Egliſe, les Papes & les Empereurs firent toutes ſortes d'efforts pour amener les eſprits à la réünion. Les Théologiens des deux partis tinrent des Conférences, tantôt à Thorn, tantôt à Augsbourg. On agitoit les matieres de Religion à toutes les Diétes de l'Empire, mais toutes ces tentatives furent inutiles. Il s'enſuivit enfin une Guerre cruelle & ſanglante, qui s'appaiſa & ſe ranima à differentes repriſes. L'ambition des Empereurs qui vouloient opprimer la Liberté des Princes & la Conſcience des Peuples, l'alluma ſouvent. Mais la rivalité de la France & l'ambition de Guſtave Adolphe, Roi de Suéde, ſauverent l'Allemagne & la Religion du Deſpotisme de la maiſon d'Autriche.

Les Electeurs de Brandebourg ſe conduiſirent dans ces troubles avec ſageſſe. Ils furent moderés & tolerans. Frèderic Guillaume, qui avoit acquis par la paix de Weſtphalie des Provinces qui lui donnoient des ſujets Catholiques, ne les perſécuta point; il permit même à quelques familles Juives de s'établir dans ſes Etats, & leur accorda des Synagogues.

Frèderic I. fit quelque fois fermer les Egliſes Catholiques, par répréſailles des perſécutions que l'Electeur Palatin fit ſouffrir à ſes Sujets Proteſtans; mais le libre exercice de Religion fut toûjours rendu aux Catholiques. Les Reformés eſſayerent de perſécuter les Lutheriens dans le Brandebourg. Ils profiterent des diſpoſitions où le Roi étoit en leur faveur, pour établir des Prêtres Réformés dans des Villages où il y en avoit eu de Lutheriens. Ce qui prouve bien que la Religion ne détruit pas les paſſions dans les hommes, & que les Gens d'Egliſe, de quelque opinion qu'ils ſoyent, ſont toûjours prêts à opprimer leurs adverſaires, quand ils ſe croyent les plus forts.

Il

Il eſt honteux à l'eſprit humain d'avouër qu'au commencement d'un Siècle auſſi éclairé que l'eſt le XVIII. toutes ſortes de ſuperſtitions ridicules ſe ſoient encore conſervées. Les gens raiſonnables, comme les eſprits foibles, croyent encore aux Revenans. Je ne ſai quelle tradition populaire portoit qu'un ſpectre blanc ſe faiſoit voir à Berlin, toutes les fois qu'une Prince de la Maiſon devoit mourir. Le feu Roi fit ſaiſir & punir un malheureux qui avoit joüé le Revenant; les eſprits rebutés d'une auſſi mauvaiſe réception ne ſe montrerent plus, & le Public fut déſabuſé.

En 1708. une femme qui avoit le malheur d'être vieille, fut brulée comme ſorciere. Ces ſuites barbares de l'ignorance affecterent vivement Thomaſius, ſavant Profeſſeur de Halle; il couvrit de ridicule les Juges & les procés de ſorcellerie, il ſoutint des Theſes publiques ſur les cauſes phyſiques & naturelles des choſes, & déclama ſi fort qu'on eut honte de continuer l'uſage de ces procès: & depuis lui le Sexe put vieillir & mourir en paix.

De tous les Savans qui ont illuſtré l'Allemagne, Leibnitz & Thomaſius rendirent les plus grands ſervices à l'eſprit humain, ils enſeignerent les routes par leſquelles la Raiſon doit ſe conduire pour parvenir à la verité. Ils combattirent les préjugés de toute eſpece, ils en appellerent dans tous leurs Ouvrages à l'analogie, & à l'experience, qui ſont les deux Béquilles avec leſquelles nous nous traînons dans la carriere du raiſonnement, & ils firent nombre de Diſciples.

Les Réformés devinrent plus pacifiques ſous le Régne de Frèderic Guillaume, & les quérelles de Religion ceſſerent. Les Lutheriens profiterent de ce calme. Francke, Miniſtre de leur parti, établir par ſon induſtrie un College à Halle, où ſe formoient de jeunes Theologiens, & dont ſortirent dans la ſuite des eſſains de Prêtres, qui formerent une Secte de Lutheriens rigides, auxquels il ne manquoit que le Tombeau de Paris, & un Abbé Bécherand, pour gambader deſſus. Ce ſont des Janſeniſtes Proteſtans, qui ſe diſtinguent des autres par leurs rigidités myſtiques. Depuis parurent toutes ſortes de Quakers, les Zinzendorffiens, les Hychiliens, Sectes plus ridicules les unes

La Communauté des Biens, & l'égalité des Conditions. On dit même qu'ils uſent également des femmes dans leurs Aſſemblées.

unes que les autres, qui, outrant les principes de la primitive Egliſe, tomberent dans des abus criminels.

Toutes ces Sectes vivent ici en paix, & contribuënt également au bonheur de l'Etat, il n'y a aucune Religion qui ſur le ſujet de la Morale s'écarte beaucoup des autres; ainſi elles peuvent être toutes égales au Gouvernement, qui conſéquemment laiſſe à un chacun la liberté d'aller au Ciel par quel chemin il lui plaît. Qu'il ſoit bon Citoyen, c'eſt tout ce qu'on lui demande.

Le faux zéle eſt un Tyran qui dépeuple les Provinces. La Tolérance eſt une tendre Mère qui les rend floriſſantes.

DIS-

DISSERTATION
SUR L'ILE DE LA DE'ESSE HERTHAM,
OU ERDAMME, ET SUR LES ADORATEURS DE CETTE DIVINITE'.

PAR M. ELSNER.

Traduit du Latin.

NOus avons vu dans un Mémoire précedent, * quelle étoit cette *Hertha*, la plus ancienne & la principale Déeſſe des Germains, décrite par Tacite; & nous avons donné un Commentaire étendu ſur le paſſage de cet Auteur qui en parle, dans lequel nous avons expliqué tout l'appareil & toute la pompe des Cérémonies ſacrées de cette Divinité.

* Voy. Année 1747. p. 446. & *ſuiv.*

Cet examen nous a fait voir en même tems, que Tacite n'a uſé, à l'egard de cette Déeſſe & de ſon culte, d'aucune fiction accommodée à celles des Grecs ou des Romains, comme le prétend le célébre Mr. *Maſcow*, dans ſa belle *Hiſtoire des anciens Germains*. Nous avons vû clairement au contraire, que tout le culte que Tacite attribüe aux Germains eſt l'ouvrage de la raiſon & de la nature, ou du moins qu'il à plutôt été emprunté des Orientaux & des Hebreux, une Tradition trés ancienne l'ayant transmis à la poſterité la plus reculée.

Pour continuer à préſent ce ſujet, nous allons d'abord rechercher, quelle eſt cette Ile célèbre par l'ancien culte rendu à *Hertha*, & ſur laquelle les opinions des Savans ont été extrémement partagées.

C'eſt, dit Tacite, *une Ile de l'Ocean, où ſe trouve un bois ſacré, dans lequel ils adorent en commun Hertham*, Erdamm, *ou la Terre Mére.* Cette maniere ſi ſuccinte de déſigner ce lieu eſt également obſcure & incertaine; & c'eſt ce qui a fourni un ſi vaſte champ aux conjectures des Savans.

Il y a trois opinions principales ſur cette Ile de l'Ocean, où ſe trouvoit le bois ſacré, dans lequel Tacite place la demeure & le Temple de la Déeſſe *Erdamme.* La premiere entend par là une Ile de l'Ocean Septentrional, ou Germanique, dit vulgairement *Nord-See*, ſituée à l'embouchure de l'Elbe, & connüe ſous le nom d'Heiligeland; la ſeconde ſe détermine pour l'Ile de *Rügen*, adjacente à la Pomeranie Septentrionale, & la troiſieme pour l'Ile de Zelande, où eſt la Capitale du Royaume de Dannemarc. Commençons par les deux dernieres, pour revenir en ſuite à la premiere.

Il n'y a pas longtems que M. *Albert George Schwartz*, Savant trés verſé dans l'Hiſtoire de ſa Patrie, a cru devoir donner la préference à l'Ile de *Rügen*, & en a allegué les raiſons dans un de ſes Ouvrages. (*) Il prétend, que c'eſt dans cette Ile, & ſpecialement dans ſa Peninſule, nommée *Jasmund*, qu'eſt ce bois ſacré, qui couvre tout ſon promontoire dans l'etendüe d'une mille; qu'on apperçoit au milieu un rempart d'une hauteur immenſe, où exiſtent de vaſtes débris, qui ſont les maſures du Temple de la Déeſſe Hertha; qu'à coté ſe trouve un grand lac, d'une extréme profondeur, qu'on nomme *noir*, à cauſe des poiſſons noirs qu'il renferme, & que les habitans vénérent encore par une ancienne ſuperſtition; que du Temple il y a un chemin qui mene à ce lac, qui étoit le bain de la Déeſſe, & où l'on noyoit les eſclaves: enfin qu'on rencontre aux environs divers chemins, qui vont aboutir à un Autel trés eloigné, d'où il paroit qu'on amenoit la Déeſſe au Temple & au Lac. Voilà les fon-

de-

(*) Il eſt intitulé: *Brevis Introductio in Geographiam borealis Germaniæ.* 1745. Voyez la page 88.

demens ſur leſquels M. *Schwartz* appuye ſon ſentiment, & qui lui font regarder l'Ile de Rügen, comme le lieu, auquel appartient préferablement à tous les autres, la gloire d'avoir été le domicile de la Déeſſe *Hertham*.

Quelque attention que nous ayons apporté à l'expoſition de ces preuves, nous ne ſommes pas aſſez pénétrans pour découvrir la demeure de la Déeſſe dans cet endroit, plutôt que dans un grand nombre d'autres, auxquels les mêmes caracteres conviennent. S'il ſuffit de rencontrer un bois, un grand lac, & quelques débris, avec un ſentier, pour avoir trouvé le Temple de notre Divinité, il n'y aura presque point d'Ile, où nous ne faſſions cette découverte; & je ne doute point qu'on n'apperçut les mêmes indices dans toutes les autres qui ſont ſituées ſur la côte de Poméranie. On ſait que rien n'eſt plus commun, que de pareilles ſituations, ſurtout dans les lieux incultes; & par conſéquent cela ne peut nous conduire à rien de certain ſur le ſéjour de la Déeſſe.

Aprés cela je ne vois pas ce qui empêcheroit, qu'il n'y eut dans l'Ile de Rügen quelque monument ſacré plus recent, d'un Dieu, ou d'une Déeſſe des Slaves, qui ont occupé ces contrees au ſixieme ſiécle. Ce peut même être quelque Château, qui ſervoit de retraitte à des brigands, à des Pirates. D'ailleurs les rochers, ou cailloux, qu'il prend pour des maſures du Temple, annoncent un édifice ſacré d'une moindre antiquité. Les Temples des anciens Germains, dont parle Tacite, n'etoient point faits de ſemblables materiaux, & n'avoient point une ſi vaſte enceinte; c'étoit un *bocage*, ou *bois ſacré*, comme le paſſage que nous expliquons, & tant d'autres du même Auteur en font foi; on plaçoit quelque fois une Tente au milieu, & on l'environnoit de ſimples Cabanes, à l'uſage de la Déeſſe & de ſes Prêtres, ſuivant la coutume des Germains. Le mot de *nemus* ne convient point pour déſigner une forêt horrible, & d'une auſſi grande étendüe que celle de l'Ile de Rügen; ce terme reveille une idée d'agrément, plutôt que de grandeur.

Les expreſſions mêmes de Tacite ſont fort contraires à la penſée de M. *Schwartz*. *Il y a dans une Ile de l'Ocean un bois ſacré.* Il

ne peut entendre par là que l'Ocean Septentrional, ou Germanique, qu'il déſigne de même en pluſieurs endroits de ce Livre. Il dit, par exemple, au Chap. I. *L'Ocean environne tout le reſte*, c'eſt à dire, l'Allemagne. Et d'abord aprés : *Le Rhin ſe mêle à l'Ocean ſeptentrional.* Au Chap. 37. il dit que *les Cimbres ſont les plus proches de l'Ocean*, & ailleurs. Le même Tacite appelle cette Mer *l'Ocean*, au Chap 20. du ſecond Livre de ſes Annales; & on peut lui joindre *Ptolomée*, qui
* Liv. II. c. 11. employe le nom *d'Ocean Germanique*, * auſſi bien que *Marcien d'He-*
† p. 49 & 51. *raclée* dans ſon *Periple.* †

dans les *Geogr. Minor.* de *Hudſon.*

Or l'Ile de *Rügen* eſt ſituée ſur la Mer Orientale, qu'on nomme aujourdhui *Baltique.* Elle eſt adjacente, & presque adherente à la Pomeranie, en ſorte qu'elle paroit lui avoir été autrefois jointe ; & par conſéquent n'avoir pas été une Ile. C'eſt en vain que notre Savant ſe retranche ſur ce que la Mer Baltique a auſſi porté le nom d'Ocean, & que Tacite l'appelle ainſi dans ſes Chapitres 43 & 44 des *Moeurs des Germains.* Car au Chap. 43 il s'exprime ainſi : *Protinus deinde ab Oceano* Rugü ; ce qui ne favoriſe point l'idée de M. *Schwartz;* Tacite écarte au contraire les Rugiens de l'Ocean, & les conſidérant des Païs Bas, il les ſépare entierement, *protinus*, c'eſt à dire, en ſuivant la route à droite par devant, de l'Ocean Germanique.

De plus les Rugiens ont autrefois habité, non ſeulement l'Ile qui porte leur nom, mais encore une partie du Duché de Mecklembourg, & de la Pomeranie Citérieure, comme notre ſavant Auteur l'a fait voir lui même, p. 8. Ainſi ils s'approchoient davantage de cet Ocean, comme Tacite l'a fort bien dit.

Quant au paſſage du Chapitre 44. Tacite y met *les Villes des Suions dans l'Ocean même.* Il s'agit de la Scandinavie, que l'Ocean Germanique & Septentrional baigne effectivement. Ainſi dans le paſſage même, qui fait le ſujet de nos diſcuſſions, il ne peut avoir entendu par une *Ile de l'Ocean*, qu'une Ile qui ait été effectivement ſituée dans cet Ocean.

La ſeconde opinion place le Sanctuaire d'*Herthum* dans l'Ile de *Sélande*, ou *Sialand*, en Dannemarc, où eſt, comme nous l'avons dit, la Capitale de ce Royaume. On peut regarder comme auteur de ce ſenti-

ſentiment *Etienne Jean Stephanius*, autre fois Profeſſeur célébre dans l'Academie de *Soroë* en Dannemarc. Il l'a propoſé dans ſes Notes ſur *Saxon le Grammairien*, où p. 74. il a mis la peinture de *Lethra*, la plus ancienne réſidence des Rois de Dannemarc, & Château trés fort avec la Vallée de la Déeſſe *Hertham*, vulgairement dite *Ertedall*. *Reſenius* a même ajouté le paſſage de Tacite dans ſon *Atlas de Dannemarc*, dont la plus grande partie des Exemplaires fut conſumée dans le terrible incendie de Copenhague.

Enfin la même choſe ſe trouve developée avec etenduë, dans le bel Ouvrage de M. *Jean Pierre Anchersen*, Profeſſeur de Copenhague, intitulé *Origines Danicæ*. Dès l'entrée de la premiere Partie, il revendique la Deeſſe Hertham à la *Selande*, ou *Sialand*, il fait enviſager ce ſentiment comme étant hors de toute conteſtation, & il y bâtit même l'edifice de ſes Origines Danoiſes.

Je ſuis cependant ſi éloigné de trouver de la certitude dans tout cela, que je n'y vois pas même un degré conſiderable de vraiſemblance. Il s'agit de la *Vallée d'Ertedall*; & Tacite ne parle d'aucune Vallée, il n'indique qu'un *bois ſacré*. Ce n'eſt point non plus une choſe indubitable qu'*Erte* denote ici la Déeſſe *Hertham*: ce peu être auſſi bien toute autre choſe, par exemple, le nom d'un Cerf qu'on appelle *Ert*, (*) ou *Hert*, ou bien celui de quelque Seigneur, ou Dame, qui ont autre fois poſſedé cette contrée, ſuivant l'uſage trés fréquent de donner aux Terres & biens de campagne des noms compoſés de celui des Vallées où ils ſont ſitués, & de celui de leurs Maîtres. C'eſt ainſi que nous avons dans la Marche *Joachimsthal*, Terre autrefois de l'Electeur *Joachim*, dont on pourroit faire tout auſſi aiſément une vallée d'Hertha, puiſqu'on y trouve en effet une vallée, une montagne aſſez elevée, une forêt trés ancienne, un lac, des ſentiers, &c. C'eſt la ſeule affinité du mot *Erte* avec *Hertha*, qui a déterminé ces ingénieux Auteurs à penſer à la Déeſſe, dont parle Tacite;

(*) Il y auſſi dans le Golfe Baltique une Ile Danoiſe, nommée *Ertholm*, qui a tiré ce nom des Cerfs & de leur chaſſe, de même qu'un Château celebre, & Maiſon de plaiſance, dite *Hirſchholm*, ou colline des Cerfs. Il a pu en être de même de la vallée d'*Ertedall*.

cite ; tout comme dans nos contrées on s'amuſe à faire venir le nom de *Reimsberg* de *Remus*, Frere de *Romulus*, celui d'*Aremberg* des Aigles Romaines, celui de *Stendal* de la baſe d'un trophée, celui de *Triſtedt*, ou *Druſtedt*, de *Druſus*. Ce ſont des jeux d'eſprit, mais il ne faut pas y chercher la verité.

Si pourtant, par un effet de cette liberalité ordinaire aux Savans, nous voulions accorder que cette vallée voiſine de *Lethra* a tiré ſon nom de la Déeſſe Hertha, cela peut être venu de quelque reſſemblance avec ce bois ſacré, parce qu'on a eu coutume d'appeller les lieux agréables & élevés, *vallées* & *montagnes* de quelque Dieu, ou Déeſſe. C'eſt ainſi qu'on trouve aujourdhui par tout des *Vallées de Marie*, des *Monts de Marie*, des *Bois* & des *Lacs de Marie*, &c.

Enfin, quand même la Déeſſe Hertham auroit eu effectivement un lieu ſacré à Lethra, il ne ſeroit pas néceſſaire que ce fut ce Sanctuaire commmun des Nations dont parle Tacite ; cette Divinité ayant pu être adorée en pluſieurs lieux, ſurtout dans les derniers tems en conſervant néanmoins ſa premiere demeure, & ſon ſejour le plus auguſte dans une autre Ile ; comme nous trouvons dans les Auteurs qu'il y avoit pluſieurs Temples de la Diane d'Epheſe, ailleurs qu'à Epheſe. Auſſi M. *Schwartz* reconnoit-il en termes formels, dans l'endroit déjà cité, qu'on a rendu auſſi un culte à Hertha dans d'autres lieux.

Tacite n'eſt pas moins contraire à M. *Ancherſen* qu'à M. *Schwartz*, en ce qu'il met le Sanctuaire de la Terre Mere *dans une Ile de l'Ocean*. Perſonne aſſurément n'appellera jamais la *Sélande* une Ile de l'Ocean, puisqu'elle eſt ſituée dans la Mer Baltique, & même à ſon embouchure, & qu'elle eſt ſéparée par de petits détroits de diverſes Iles voiſines, & de la Scandie. M. *Ancherſen* veut à la verité que ce ſoient ces détroits que Tacite appelle des *fleuves* ; mais *Pomponius Mela* les nomme expreſſément *aquas interfluentes*, & *freta*. * Qui eſt-ce, je vous prie, qui pourroit dire d'une ſemblable Ile, ſituée dans l'Archipel Danois, comme l'appelle notre Savant, que c'eſt une Ile de l'Ocean. Sans contredit les mots de Mer, ou Golfe Baltique, d'Archipel, & d'Ocean, ſont tout à fait differens, ſur tout pour Tacite dans ce Livre, où il entend

* Liv. III c. 3.

entend conſtamment par *Ocean*, l'Océan *Septentrional* & *Germanique*. Nous ne croyons donc pas pouvoir adopter cette opinion, quoique nous laiſſions à ſes Auteurs & à ſes défenſeurs la gloire de l'avoir ſoutenuë avec beaucoup d'eſprit & de ſavoir.

Le troiſieme ſentiment, que nous avions indiqué le premier, donne & aſſigne à la Déeſſe *Herthum* une Ile de l'Ocean Germanique, ſituée vers l'embouchure de l'Elbe, & vulgairement nommée *Heiligland*, *Hilligland*, & *Helgeland*. Cette Ile eſt ſituée dans la Mer, à ſix milles de l'Elbe, & à pareille diſtance du Duché de Sleswick. Elle a été autre fois beaucoup plus grande qu'elle ne le paroit aujourdhui ; les flots de l'Ocean en ont couvert la plus grande partie, de ſorte que quand le vent d'Orient les repouſſe avec vehemence, il reparoit plus d'un mille d'etendüe de terrain. Elle paſſe auſſi pour avoir été fort célébre par un Temple de *Veſta*, dite en langage vulgaire *Foſta*, qui s'y trouvoit avant l'Ere Chrêtienne. On la nommoit encore *Farria*, ou plutot *Pharia*, à cauſe de ſa reſſemblance avec l'Ile ſi connuë de *Pharos* en Egypte, ayant comme elle, ſur une de ſes Montagnes, *Bredeberg*, un fanal deſtiné à guider ler navigateurs. Enfin la Tradition porte qu'elle a ſervi de retraitte à *Radbod*, Roi des Friſiens, qui aima mieux ſuivre ſes Ancêtres dans la route de l'erreur, que de recevoir le S. Batême, & embraſſer le Chriſtianisme. * Divers Auteurs ont cru que c'etoit cette Ile qu'indique nôtre paſſage de Tacite ; tels ſont *Pontanus*, † *Petrus Saxius*, * & d'autres. Tout bien peſé, ce ſentiment me paroit préferables aux autres, & je vais l'appuyer ſur de nouvelles preuves.

L'Ile d' *Heiligland* a de la maniere la plus ſenſible tous les caracteres fournis par Tacite. C'eſt une Ile de cet Ocean Germanique, & Septentrional, que cet Auteur a coutume de nommer l'Ocean. Elle eſt en pleine Mer, & à ſix milles du Continent. Cet Ocean étoit connu dés ce tems là des Romains ; on y avoit vû les flottes de Tibere & de Druſus, comme le témoignent Tacite, *Velleius Paterculus*, *Suetone*, & d'autres Auteurs. Au contraire, dans ce même tems, les flottes Romaines ne s'étoient pas avancées au delà du Promontoire Cimbrique, & par conſequent ne pouvoient avoir fait la découverte de

* Voy. *Dankwerth Deſcr Sleswici* p. 152.

† Dans ſes *Origines Danicæ*.

* Dans ſon Livre *de priscipuis rebus geſtis Friſiorum Septentrionalium*, qui a été inſeré dans les *Monumenta Cimbrica* de l'illuſtre M. de *Weſtphal*, Tom. I. p. 1343

de la *Sélonde*, ſituée à l'embouchure de la Mer Baltique, ou de l'Ile de *Rügen*, presque adhérente au Continent de Pomeranie.

Cette Ile, ainſi placée dans l'Ocean, étoit regardée comme une demeure digne de la Déeſſe, non ſeulement parce que ce morceau de terre, planté, pour ainſi dire, au milieu du vaſte Ocean, paroiſſoit quelque choſe d'admirable, mais auſſi qu'on le jugeoit un domicile tout à fait convenable à la Déeſſe Hartham, Epouſe de l'Ocean. Il eſt en effet conſtant par une Tradition de l'Antiquité la plus reculée, que toutes choſes tirent leur origine de l'Ocean & de Tethys. *Platon* le témoigne, * & il le tenoit d'*Homere*, cette ſource de toutes les Antiquites. *Orphée* dépoſe la même choſe, & célébre l'Ocean Pére, & Tethys Mére des Dieux. † *Platon* repete cette idée dans ſon *Cratylus*, p. 265. & le Philoſophe *Crates* l'inculque dans *Plutarque*. * C'eſt ce qui fait dire à *Ovide* ; †

* Dans le *Theætetes*, p 130.

† *Hymn. in Ocean.* p. 178.

* *De facie in orbe Lunæ.* p. 938.

† *Metamorph.* L. II. v. 509.

——— *Ad canam deſcendit in æquora Tethyn*
Oceanumque ſenem, quorum reverentia movit
Sæpe Deos.

Quelquefois même *Tethys* ſe prend pour l'Ocean, ſuivant la remarque d'*Euſtathius*. * Cette même *Tethys* étoit la Terre, τήθη, Nourrice commune des mortels, encore ſuivant les obſervations d'*Euſtathius*, & des *Scoliaſtes*, ſur le même paſſage d'Homere. Ainſi la Déeſſe *Hertham*, ou *Erdamme*, étoit parfaitement la même que *Tethys*, qu'on appelloit *Tutte*, comme l'a fait voir au long l'ingenieux *Olaüs Rudbeck*, que j'ai cité dans mon Mémoire précedent. C'eſt pour cela que cette Ile, ſortant des flots de l'Ocean, parut merveilleuſement propre à être la demeure de la Terre Mére, à cauſe de ſa ſituation ſinguliere, qui faiſoit que l'Ocean l'embraſſoit plus etroitement, & de la même maniere qu'il ceint & embraſſe toute la Terre ; doctrine déjà admirée dans Homere par *Hipparque*, comme *Strabon* le rapporte au commencement de ſon Livre, en y joignant ſon propre ſuffrage.

* Sur l'*Iliad.* Ξ. v. 201. p. 978.

D'abord, cette Ile ſe trouve dans cet Ocean qu'on découvre du Rhin, où Tacite étoit placé ; car ces Iles oppoſées aux Païs Bas, & à la Friſe, que nous appellons Orientale, n'etoient pas encore détachées du

du Continent, & actuellement même elles en ſont ſi proches qu'elles ne meritent pas le nom d'Iles de l'Ocean. Ce ne peut donc être que cette premiere Ile que Tacite a eu en vuë, & il n'eſt nullement vraiſemblable que laiſſant là la principale Ile de l'Ocean Germanique, il air été chercher des Iles qui en ſont ſéparées par un auſſi grand intervalle, ſavoir celles de Dannemarc, ou de Rügen, qui placées dans l'enceinte étroite du Golfe Baltique, & tout environnées des Terres voiſines, ne ſont, ni ne peuvent être appellées des *Iles de l'Ocean.*

L'Ile d'*Heiligland* ſatisfait également à tous les autres caracteres indiqués par Tacite. *Petrus Saxius* rapporte * qu'on y voit encore un bois; & quand il ne s'y rencontreroit pas, perſonne n'auroit lieu de s'etonner qu'il ait diſparu d'une Ile ſi ſouvent ravagée par les incurſions des Ennemis, & en grande partie ſubmergée ſous les flots de l'Ocean.

* Dans l'endroit déjà cité.

Adam de Breme rapporte que cette Ile eſt toute bordée de rochers & d'ecueils, & qu'il n'y a qu'un ſeul endroit acceſſible: bienfait de la nature, qui la met à l'abri des Ennemis. De là vient que *Radbod* l'avoit choiſie pour en faire ſa retraitte, & y avoit outre cela bâti une ſortereſſe ſur une fort haute montagne.

Une Ile revêtuë de tous ces avantages méritoit bien d'etre le Sanctuaire de la principale Déeſſe des Germains. C'etoit en effet une coutume religieuſe trés ancienne de placer les ſimulacres & les Temples des Dieux dans des lieux élevés, & fortifiés par la Nature, ou par l'Art. Quoique les Perſes, auſſi bien que les anciens Germains, déteſtaſſent les Edifices, & les Temples, deſtinés à renfermer les Dieux; cependant ils avoient coutume d'offrir des victimes ſur des montagnes trés élevées, où ils croyoient que les Dieux faiſoient leur demeure, comme on en trouve des témoignages très abondans dans *Herodote*, & dans Xenophon. Il s'étoit auſſi introduit une trés ancienne ſuperſtition parmi le peuple d'Iſraël, c'étoit celle de ſacrifier ſur les hauts lieux; & elle y avoit jetté de ſi profondes racines, que les ordres de Dieu les plus exprés, & les plus fréquemment reïterés, ne purent l'extirper. C'eſt par la même raiſon qu'une vieille opinion a aſſigné les lieux élevés pour demeure aux Dieux, comme moins aſſujettis à l'uſage, com-

mun, & plus inacceſſibles. De là vient enfin que les domiciles des Dieux étoient autant de bonnes forteresſes, également propres à écarter les profanes & les ennemis, & qui laiſſoient à peine un paſſage fort étroit aux adorateurs.

Le Capitole, ce Temple ſi magnifique de Jupiter, & de toutes les autres Divinités des Romains, & qui étoit comme un autre Ciel, placé au ſommet de la haute roche Tarpéienne, étoit un vrai Fort, inexpugnable même à de grandes armées, au jugement de notre pro-
* *Tacit. Hiſt.* Lib. III. c. 78. pre Auteur. *

Il en étoit de même de l'Oracle de Delphes, qui étoit autrefois
† *Pauſan.* Cap. 5. p. 805. celui de la Terre Mére, comme le témoigne *Pauſanias*. † Il étoit placé dans la partie la plus haute de la Ville, qui alloit de tous cotés en pente roide & ceinte de rochers, de ſorte qu'on pouvoit difficilement arriver à ce lieu, & le forcer, comme les Gaulois, ſous la conduite de Brennus, l'éprouverent à leur dommage. *
* *Ibid.* cap. 8. p. 818. & cap. 23. p. 853.

Le *Palladium*, ce gage de l'Empire & du Salut de Troye, dont la vuë étoit interdite aux mortels, auſſi bien que celle de la Déeſſe *Hertham*, ſe conſervoit dans la Citadelle, d'où les Grecs l'enleverent
† *Æneid.* Lib. II. v. 162. par un crime atroce, que Virgile déteſte ainſi ; †

Omnis ſpes Danaum & cœpti fiducia belli
Palladis auxiliis ſemper ſtetit : impius ex quo
Tydides, ſed enim ſcelerumque inventor Ulyſſes,
Fatale aggreſſi ſacrato avellere templo,
Palladium cæſis ſummæ *cuſtodibus* arcis.

A Athenes, Minerve, Déeſſe tutelaire de la Ville, reſidoit à *l'Acropole*, qui étoit le lieu le plus élevé ; auquel on n'arrivoit que par une ſeule avenuë, bordée de toutes parts de rochers eſcarpés, & ceinte
* *Pauſan.* Lib. c. 22. p. 51. d'un fort mur. *

Enfin *Velleda*, cette Propheteſſe ſi célébre des Germains, qui a tenu le rang de Déeſſe, demeuroit dans une tour, ou au haut d'un rocher eſcarpé, comme Tacite nous l'apprend. En général la Terre Mére paſſoit pour aimer les pierres & les rochers ; c'étoit ſes enfans & ſes
† Metam. Lib. I. v. 383. os, ſuivant l'expreſſion d'*Ovide*. †

Oſſa-

Oſſaque poſt tergum magnæ jactate parentis,

& un peu plus bas, **.* v. 395.

Magna parens terra eſt : lapides in corpore terræ
Oſſa reor dici.

De là vient ce que Pauſanias rapporte, que ſa Statuë & ſon Thrône étoient faits de pierre. Et n'avons nous pas même vu dans le Mémoire précedent, que la Mère des Dieux paſſoit pour être née d'un grand rocher, ſur lequel on avoit placé ſa Statuë?

On avoit auſſi conſacré les lieux les plus élevés aux Dieux, & ſurtout aux Divinités tutelaires, comme à la Minerve d'Athenes, à l'Apollon de Delphes, afin que ces Divinités puſſent étendre leurs regards, veiller à la conſervation de leurs adorateurs, & repouſſer les maux qui pourroient les menacer. Les Dieux tutelaires portoient à cauſe de cela les noms d'Ἐπόψιοι, Σκοποὶ & Ἐπίσκοποι, comme ayant les yeux percans, & ſe tenant toujours à portée de ſecourir. M. *de Spanheim* a expliqué tout cela avec étenduë dans *les* Notes ſur *Callimaque.* †

† In *Hymnum ad Jovem* v. 82.

Ainſi l'Ile d'*Heiligland*, qui étoit toute bordée d'ecueils, & où ſe trouvoit une trés haute Montagne, étoit une trés digne demeure, un Sanctuaire trés convenable, de la Terre Mére, Déeſſe gardienne & tutelaire, un lieu d'où elle pouvoit également exclurre les profanes & les ennemis, & veiller en même tems de toutes parts ſur ceux qu'elle protégeoit. On peut joindre à cela cette Tradition qui porte que dans des tems moins éloignés, mais encore anterieurs au Chriſtianiſme, il y a eu dans cette Ile un Temple de Veſta, dont la prononciation barbare de Friſiens avoit changé le nom en celui de *Foſta.* Or Veſta étoit la même que la Terre Mére, ayant comme elle pour ſymbole un foyer conſtruit de terre, où bruloit le feu qui lui étoit conſacré; d'où vient encore le mot Allemand *Herd, foyer*, d'*Erde*, *la terre*, comme étant fait de terre, comme nous l'avons déjà remarqué dans notre premier Mémoire. Pour la Déeſſe *Erdamm*, elle paroit avoir reçu le nom de Veſta, depuis que les Germains eurent appris que la Veſta des Romains étoit la même que leur Terre Mére; car alors, afin de ne pas

paroître inferieurs aux Romains, & de pouvoir ſe vanter qu'ils adoroient la même Divinité, ils ajouterent le nom de Veſta au premier, ou l'y ſubſtituerent tout a fait. De cette maniere le lieu que les Germains avoient d'abord appellé la demeure d'*Hertham*, & veneré en cette qualité, devint dans la ſuite celle de Veſta.

Une nouvelle & conſidérable preuve de notre aſſertion ſe tire du nom de l'Ile, que les Germains, dés les tems les plus reculés, ont nommé *Hetligland*, *Hilligland*, & *Helgeland*; indice frappant que cette Ile de l'Ocean avoit été ſpecialement & ſolemnellement conſacrée au culte de la Déeſſe *Hertham*. *Heiligland* veut dire, *Terre*, ou *Contrée ſainte*, ſans doute à cauſe de la demeure de cette grande Divinité, & du bois ſacré qu'elle y avoit. De ſemblables contrées, célébres par le domicile de quelques Dieux, ou Déeſſes, ont toujours porté le nom de ſaintes, ἱεραί. La Ville ſeule d'Athenes n'etoit pas ſainte, à cauſe du ſéjour de Minerve, cela s'etendoit à toute l'Attique; (*) & Ariſtophane l'appelle ἱερωτάτη χώρα. * De même Diane par ſa préſence rendoit ſacrée & inviolable la Ville d'Epheſe, & tout ſon territoire. Delos par une ſemblable raiſon étoit dite ἱερὰ & ἁγιώτατη, comme l'a prouvé M. de *Spanheim*, dans ſes Remarques ſur le commencement de l'Hymne de *Callimaque* ſur Delos.

* In *Equit.* v. 578.

C'eſt ſeurtout à cauſe de cela que le nom de *ſacrée* a été donné d'une façon ſinguliere à l'Ile de *Samothrace*, où la Mere des Dieux ſe plaiſoit, y ayant placé ſes fils les Corybantes, & dans laquelle on lui avoit conſacré des Autels, & un bois, τεμένος, ſacré & inviolable. † Tout cela fait aſſez voir qu'en vertu de cette ancienne & conſtante ſuperſtition, cette Ile a reçu à bon droit des Germains la nom d'*Heiligland*, à cauſe du ſéjour qu'y faiſoit la Déeſſe *Erdamme*, laquelle étoit réputée la même que la Mere des Dieux, & réſidoit dans ce bois ſacré, d'où elle protégeoit ces anciens Germains, qui étoient nés d'elle, & les habitans des environs.

† *Diod. Sicul.* L. III. p. 214. Edit. nov.

Le

(*) Ἱερὰ μὲν τῆς Ἀθηνᾶς ἐστιν ἥτε ἄλλη πόλις, καὶ ἡ πᾶσα ὁμοίως γῆ. *Pauſan.* L. I. c. 26. p. 63.

Le nom de cette Ile prononcé d'une autre maniere, nous découvre encore plus évidement celle dont Tacite a voulu parler. On a pu dire *Heiligland*, & il paroit que c'eſt ainſi qu'ont prononcé ces anciens Peuples Septentrionaux. D'abord cependant on diſoit *Heilig*, *Hillig*, ou *Helgo-lund*, mais dans la ſuite le mot *land* s'etant introduit, & la coutume etant venüe de l'ajouter au nom de pluſieurs contrées, on a changé *lund*, en *land* (*). Or dans les Langues Septentrionales un *bois*, une *forêt*, ſe nomment *Lund*, *Lundur*, comme on le trouve auſſi dans le *Lexicon Islandique d'Hickeſius*, que contient le *Theſaurus Septentrionalis*. La même ſignification a encore lieu en Suede & en Dannemarc. *Jean Loccenius* rapporte * ces paroles tirées des plus anciennes Loix : *Engin ſkal á lunda euer ſteena tro*, c'eſt à dire, *perſonne ne doit ſe fier à un bois ou à un rocher*. C'eſt de cette ancienne langue qu'eſt reſté un mot, dont nous nous ſervons encore, *Hollunder*, de *Hol* & *lund*, ou *lunder*, *un arbre*, ou *bois creux*. On dit auſſi *bois* pour *forêt* ; les Germains & les Hollandois appellent une forêt, das Holtz, *Het Hout*. Le Dictionaire de notre défunt Confrère *Friſch* nomme *Lunden* une ſorte particuliere de bois. *Hilliglund* ſeroit donc le bois conſacré à la Déeſſe ; & les Peuples Septentrionaux ont pluſieurs bois ſemblables, qu'ils appelloient *Hilgolundar*, ou *Lundar*. Le bois conſacré à Odin auprès d'Upſal, portoit le nom d'*Odenslund*, au rapport de *Loccenius*. † Si donc notre Ile a été conſacrée par les Nations Septentrionales à la Déeſſe, dont ils prétendoient tirer leur origine, ils auront nommé cette Ile dans leur Dialecte accoutumée *Hilgolund* ; nom que Tacite nous a rendu avec la derniere exactitude par *caſtum nemus*, & l'Ile de la Déeſſe *Erdamme*, ſituée dans l'Ocean, & dite *Hilgolunde*, s'eſt conſervée aſſez heureuſement juſqu'à nos jours.

* *Antiq. Sueo-Gothic.* L. I. c. 3 p. 20.

† l. c. p. 18.

Il s'agit préſentement de parler des Peuples, qui rendoient un culte religieux à cette Divinité. Nous allons paſſer en revüe ceux

(*) De même l'Ile capitale du Dannemarc, *Sialand*, a été dite autrefois *Saelundur*, *bois de la mer*, ſuivant le témoignage de *Stephanius*, dans ſes notes ſur *Sax. Gramm.* p. 20.

que Tacite indique, & répandre autant de jour sur eux, que le permet une matiere aussi abstruse, & éloignée de tant de siecles des tems où nous vivons.

Tacite nomme sept peuples Sueves, adorateurs de la Déesse, & les range dans l'ordre suivant. „Aprés (les Lombards) viennent les „Reudigniens, Avions, Anglois, Ovarins, Eudoses, Suardons, & „Nuithons, qui sont remparés par des forêts, ou par des fleuves. „Ceux-là n'ont rien de particulier, sinon qu'ils adorent la Terre, „comme nôtre Mére commune, qu'ils appellent *Herthe*, & croyent „qu'elle se promene par le Monde, & qu'elle se mêle des affaires des „hommes." (*). Voilà donc les noms des Peuples de la Germanie Septentrionale, issus, à ce qu'ils prétendoient, d'une origine commune; mais ces noms ont vieilli, on ne les connoit plus, la plupart ne se trouvent que dans Tacite, & n'existent même que dans ce passage. De plus, la négligence des Copistes, & les fautes qu'ils ont coutume de commettre, surtout à l'egard des mots étrangers, a defiguré ces noms, au point que les plus savans Interprêtes, partagés en mille opinions toutes differentes, n'ont pu s'en demêler, & ont au contraire épaissi les ténébres dont ce passage est envelopé. Je vais essayer si je serai plus heureux à déterrer ces Peuples inconnus, & à les rendre reconnoissables par quelques caracteres certains.

D'abord, il est évident que ce sont des Peuples de la Germanie Septentrionale que Tacite a ici en vüe, & en particulier ceux qui habitoient la côte maritime, puisque la Déesse tutelaire de la Nation résidoit dans une Ile de l'Ocean Germanique Septentrional, comme nous l'avons vû ci-dessus. On ne sauroit avec raison trop éloigner de cette Ile *d'Helgeland*, ou *Helgelund*, des Peuples, qui dans certains tems marqués de l'année devoient venir y rendre un culte solemnel à la Déesse, des peuples des affaires desquels la Deesse devoit se mêler,

(*) *Reudigni deinde, & Aviones, & Angli, & Varini, & Eudoses, & Suardones, & Nuithones, fluminibus aut silvis muniuntur. Nec quicquam notabile in singulis, nisi quod in commune Herthum, id est, Terram matrem colunt, eamque intervenire rebus hominum, invehi populis arbitrantur.*

ſer, & parmi leſquels elle ſe promenoit, ſuivant les expreſſions de Tacite. C'eſt donc dans le voiſinage de la Déeſſe qu'il faut chercher ſes adorateurs, ceux qui vivoient ſous ſa garde & ſa protection, la révérant comme leur Mère & le principe de leur origine.

Enſuite, Tacite place ces Peuples *après les* Lombards, qui occupoient les regions interieures de la Germanie ſur l'Elbe, & dit au Chap. XII. qu'ils s'etendoient encore plus avant dans le fonds de la Germanie, *qui in ſecretiora Germaniæ porriguntur.* Or il faut toujours ſe ſouvenir que c'eſt des Païs-Bas que Tacite regardoit la Germanie, & chercher par conſéquent ces Peuples autour de l'embouchure de l'Elbe, où la Germanie va en quelque ſorte en s'enfonçant, dans le Duché de Brême, dont la partie poſtérieure confine à l'Elbe, dans les Duchés de *Holſtein* & de *Sleswick*, & dans le *Jutland*. Je penſe au moins que c'eſt ainſi qu'en jugeront tous ceux qui examineront la choſe d'une maniere attentive & impartiale. Je vais donc, en ſuivant Tacite, paſſer à l'examen des Noms de ces Peuples, & de leurs demeures.

A la tête ſe préſentent les REUDIGNIENS, ou comme d'autres liſent, les *Reudingiens*, les *Rediguiens*, & ils tiennent auſſi le premier rang en fait d'obſcurité. *Cluvier* * & *Bucherius* † entendent par là les *Thuringiens*, ou *Deuringiens*, mais cette conjecture n'eſt appuyée ſur rien ; car non ſeulement il y a une grande différence entre *Reudigniens* & *Thuringiens*, (pour *Deuringiens*, perſonne ne ſe ſert de ce nom,) mais il eſt auſſi conſtant que les Thuringiens occupoient la partie interieure de la Germanie Auſtrale ; au lieu que les Reudigniens doivent ſe trouver ſur les bords de la Germanie Septentrionale, & que Tacite les place dans le voiſinage d'une Ile de l'Ocean, & même à la gauche des Lombards. Le célébre Leibnitz, ſi habile & ſi heureux dans la découverte des choſes les plus cachées, avoüe *qu'il ne connoit point* les Reudigniens.

* *Germ. Ant.* L. III. c. 27.

† Dans ſon *Belgium.*

M. *Ancherſen* * met les Reudigniens dans les Iles de Dannemarc, qui portent le nom de *Lolland*, *Falſter* & *Moen*, mais ſans donner la moindre preuve qu'elles ayent été autre fois habitées par un Peuple connu ſous ce nom. Il ne fait cette ſuppoſition que pour ſoutenir

* *Orig. Dan.* Part. I. p. 165.

ſoutenir celle, par laquelle il donne l'Ile de Sialand pour la demeure de la Déeſſe *Herthum* ; & comme nous avons déjà détruit celle-ci, il ſeroit ſuperflu de nous arrêter à l'autre.

S'il n'y a pas une pleine évidence, il y a du moins une grande apparence de verité dans l'idée où je ſuis, que les Reudigniens ſont les KEIDINSIENS, dont la contrée eſt dans le Duché de Breme, ſur l'Elbe. C'eſt un Canton des plus anciens Saxons, dont les habitans s'appellent Kädinger, Kedinger, Kaidinger, und Keidinger. La grande reſſemblance entre les Lettres K & R rend le changement de l'une en l'autre très facile. Soit donc qu'on liſe dans Tacite *Keidigni*, *Keidingi*, ou *Kedingi*, cela s'accordera aſſez avec mon ſyſtéme. La ſituation de l'Ile d'Helgeland, où étoit le Sanctuaire de la Déeſſe Erdamme, convient merveilleuſement à ce peuple ; & peut-être même les Keidingiens étoient-ils venus du Holſtein au lieu qu'ils habitoient, afin que les adorateurs de la Déeſſe occupaſſent l'une & l'autre rive de l'Elbe, dont le cours va aboutir à l'Ile, où réſidoit la Déeſſe.

Viennent enſuite dans Tacite les AVIONS, mot que Cluvier remarque * ne ſe trouver nulle part ailleurs, & qu'il conjecture, ſans aucun fondement, devoir être le même que celui de *Cavions*, dont *Mamertinus* fait mention dans le Panegyrique de Maximien. M. *Anchersen* † derive le nom des *Avions* de la *Fionie*, Ile du Dannemarc ; en quoi il ſuit *Althamer*. La dérivaiſon paroit heureuſe, quand on ne fait attention qu'au ſon des mots ; mais elle enleve aux Avions la Lettre A, qui en eſt la tête, & M. *Anchersen* n'eſt ſi ardent à ſaiſir cette idée, qu'à cauſe du voiſinage entre la Fionie, & ſa chere Sialand. Pour moi, je crois qu'il faut tirer le nom d'Avions de la nature & des proprietés du païs que ce Peuple habitoit. Les Allemans appellent *Auen*, *Awer*, *Auer*, les vallées, les plaines arroſées de ruiſſeaux, qui en ſont des prairies fertiles, & ils donnent le même nom à leurs habitans. Les mots *Au* & *Auen*, ſont ſeurtout d'un uſage extrémement fréquent dans les Duchés de Holſtein & de Sleswick, où on appelle ainſi & les fleuves, & les lieux qui les environnent, comme *Pinneberger au*, *Schodburger au*, *Coldinger au*, & quantité d'autres qu'on peut voir

* *Loc. cit.*

† *l. c.* p. 134.

voir dans *Dankwerth.* (*) Je mettrois donc les Avions dans les campagnes voiſines de Hambourg, ſur ce qu'on appelle les *quatre terres*, qui ſont communes entre cette Ville & celle de Lubec, & qui s'etendent dans le Comté de Pinneberg jusqu'à l'Elbe. Les Avions peuvent avoir tiré leur nom de la nature de la contrée, *Auer*, à auſſi bon droit que les *Bructeres* de leurs marais, *Brücher*, & les *Marſes* de leur terre graſſe & marêcageuſe, *Marſch* & *Maſch*. Le nom le plus ancien de cette région unie, & abondante en ruiſſeaux, paroit avoir été *Auen*; car on ſait que les noms de *Pinneberg* & de *Holſtein*, uſités aujourdhuy, ſont récens. Si quelcun vouloit pourtant faire attention au fleuve *Hewer*, ou *Ewer*, qui eſt le plus conſiderable de cette contrée, on pourroit en tirer les *Evions*, & de là par le changement de l'E en A, les Avions, comme cela eſt arrivé aux noms, *Albis*, *Anglia*, *Aliſo*, *Angria*, &c.

Les ANGLI ſont des Peuples trés connus du Duché de Sleswick, qui s'etant aſſociés aux Saxons dans le V. Siécle, paſſerent avec eux en Bretagne, & lui donnerent le nom d'*Angleterre*. L'ancienne *Anglia* étoit ſituée entre les Saxons & les *Giotes*, dits vulgairement *Jutes*. Elle avoit pour Capitale la Ville qui en Saxon ſe nomme *Sleswick*, & en Danois *Haitby*. C'eſt que nous apprend *Leibnitz*, en ſe fondant ſur l'autorité d'*Ethelred*, Roi des Anglo-Saxons. Il y a encore aujourdhui une contrée entre *Flensbourg* & *Slesvick*, qu'on appelle *Angeln*. *

* *Dankwerth.* cap. 10.

On met ordinairement les VARINI dans le Duché de Mecklembourg, auprès du fleuve *Varne*, dont ils doivent emprunter leur nom ; mais de cette maniere on les éloigne trop, & la *Warne* ſemble plutot être ainſi dite des *Venedes*, qui ont auſſi été appellés *Warne. Venedes.* Il eſt plus vraiſemblable que ces *Varins* ſont les habitans de la *Wagrie*, excellente contrée du Holſtein ; qui s'etant autrefois nommés *Wagri* & *Vairi*, ont été changés, en adouciſſant la prononciation, en *Vari* & *Varini*.

Les

(*) Dans ſa *Deſcr. Holſ. & Sleſw.* *Keyſler* rapporte auſſi pluſiers noms de contrées de Villes, & de Villages, qui dérivent d'*au*, & *d'auem. Antiq. Septent.* p. 428.

Les EUDOSES ſont regardés comme un des Noms les plus difficiles à expliquer. *Cluvier* les relegue * dans la Pomeranie autour de Stralſund, fort mal à propos, & ſans la moindre apparence de verité ; & pour M. de *Leibnitz*, il avoüe ſon ignorance ſans détour. Je m'accommode fort de la dérivaiſon tirée du fleuve remarquable *Eudora*, qu'on appelloit autre fois *Eut*, *Eit*, ſuivant le témoignage de *Dankwerth* ; † d'où eſt venu EUDONES, comme de *Teut*, TEUTONES. Cela veut dire, ceux qui habitent les bords de l'*Eudt*. Le rivage ulterieur nous fournit encore aujourdhui la contrée d'*Euderſtede*, dont les habitans s'appellent Eidermänner, c'eſt à dire, *Eudons*. En deçà du fleuve il y a une grande contrée occupée par les *Ditmarſes*, que ce même fleuve environne auſſi du coté Oriental. Je croirois que le nom de *Ditmarſen* vient encore du même *Eudt*, ou *Eut*, précedé de l'article prépoſitif des anciens Germains *de*, qui a fait *Deut marſe* ; d'où par le changement fréquent d'*eut* en *it*, & par l'eliſion de l'article *de*, à cauſe de la voyelle ſuivante, s'eſt formé *Ditmarſen*. *Marſch* ſignifie une région baſſe, marêcageuſe, & graſſe, où l'on ne voit point de hauteurs, dite vulgairement *Maſchland*. On rencontre dans le voiſinage le diſtrit de *Wilſtermarſch*.

* *Loc. lic.*

† c. 16.

Venons aux SUARDONS. *Spener* conjecture * que leur nom vient de *Swerd*, & *Sward*, c'eſt à dire, des *larges épées* qu'ils portoient, comme celui des *Saxons*, de leurs *courtes epées*. Cette opinion n'a pas la moindre ombre de vraiſemblance. *Cluvier* croit que ce ſont les mêmes que *Ptolomée* a nommés Φαρόδηνες, qu'il change en σΦαρόδηνες, & les place auprés de Stettin en Pomeranie. M. *Anchersen* les renvoye plus loin, mais ſans fondement, dans la partie Occidentale de la Scanie. J'entens ici par *Suardons*, les *Svandons*, habitans les plus anciens de la contrée de *Swanten*, ou *Svanten*, dans le Duché de Sleswik, qui conſervent encore aujourdhuy leur nom, & qu'on trouve ſouvent aſſociés avec les *Angli*. Les Critiques n'ignorent pas que R ſe met quelque fois pour N. Il y a auſſi dans le Holſtein un fleuve, nommé *Swartow*, † dont les *Suardons* auroient pu recevoir

* *Germ. Ant.* c. 4 §. 1.

† *Danckwarth*, c. 5. p. 197.

voir le nom ; mais je ſoupçonne que le nom de ce fleuve eſt plus récent, & je préfere la premiere Etymologie.

Les derniers Peuples ſont les NUITHONS, nom encore trés obſcur, que *Conringius* a changé en celui de *Vitbons*, c'eſt à dire, *blancs*, pour les oppoſer aux *Svardons*, ou *noirs*. M. *Ancherſen* fait de grands efforts pour amener ici les Teutons, déſignés ſous le nom de THUITONS, & il prétend * que cette correction eſt la plus aiſée du monde, puiſqu'elle ne demande, que la changement trés ſimple de la Lettre N en T ; changement d'ailleurs tout à fait néceſſaire, puiſque ſans cela on auroit une extreme négligence à reprocher à Tacite, d'avoir omis le nom des *Teutons* dans ſa Germanie. † Cet Auteur agit en tout cela conſéquemment à l'hypothèſe, par laquelle il veut placer les THUITONS avec le Sanctuaire de Hertha dans la *Sialand ;* & autour de cette *Sialand*, ou *Codanonie*, toutes les autres Nations rapportées ci deſſus, dans le voiſinage, & formant une eſpece de cercle. Cette correction lui plait infiniment, & il s'en applaudit un peu plus que de raiſon. Pour moi je dirai, avec la permiſſion de cet habile homme, que je ne vois dans cette correction, ni la facilité, ni la verité, ni la néceſſité qu'il y trouve. Je dis d'abord la facilité ; car il ne s'agit pas, comme il le prétend, du changement d'une Lettre en une autre, mais d'une Lettre en deux ; pour écrire THUITONES, il faut au lieu de N, inſerer T & H. En ſecond lieu la verité y manque ; car Tacite appelle ces Peuples *Teutones*, & non *Thuitones*, au chap. 73. du IV. Livre de ſon *Hiſtoire*, où il parle expréſſément des *combats contre les Cimbres & les TEUTONS ;* & tous les Auteurs écrivent de même, *Ceſar*, *Pline*, *Pomponius Mela*, *Florus*, * & même les Grecs, *Ptolomée* & *Plutarque*. Qui eſt-ce donc qui ſe perſuadera que Tacite ait voulu employer ici le nom nouveau & inuſité de *Thuitones*, aprés s'etre conformé ailleurs à l'uſage reçu par tous les Auteurs. De ce qu'il a nommé, au premier Chapitre de la Germanie, l'Auteur de la Nation *Thuiſton*, ou *Tuiscon*, on n'eſt pas en droit de conclurre qu'il ait du écrire ici *Thuitons*, comme le veut M. *Ancherſen* † car, comme on

* p. 152.

† p. 166.

* Lib. III. 37.

† p. 166.

vient de le remarquer, leur vrai nom de *Teutons* étoit un mot très connu. Et d'ailleurs ſi leur nom devoit dériver de celui de leur Fondateur, ils devroient s'appeller *Tuiſtons*, ou *Tuiſcons*, plutot que *Thuitons*. Mais de cette maniere, ce ſeroit moins déſigner la poſterité de *Tuiſton*, qu'autant de *Tuiſtons* & de *Tuiſcons*, Fondateurs de la Nation. Quant à la derniere difficulté de notre ſavant Auteur, ſavoir qu'il y auroit une négligence impardonnable de la part de Tacite, d'avoir oublié dans ſa Germanie le nom des *Teutons*, ou *Thuitons*, cela n'eſt pas aſſez conſiderable pour autoriſer une pareille correction. Ce n'etoit point au Chap. XL. que ſe trouvoit l'occaſion de parler des Teutons ; il y fait l'enumeration des ſept Peuples des Sueves, il y décrit *partem Suevorum*, comme il le dit au Chap. XLI. Or les Teutons n'etoient point une partie des Sueves, encore moins la derniere, ou une eſpece d'appendice, comme Tacite a placé les *Nuitons ;* ils étoient au contraire les premiers, & les plus grands Peuples de l'Allemagne, ceux qui tenoient immediatement à *Thuiſton*, l'Auteur de la Nation. Aprés cela que M. *Ancherſen* voye lui-même de quel droit il mêle parmi les Sueves, & place à leur extremité, les Teutons, qui de ſon propre aveu ſont les plus conſiderables Peuples de Germanie. Enſuite, ſi l'on admet la ſuppoſition qui place les Thuitons en Sialand, où ils habitoient, & avoient le Sanctuaire d'*Hertha*, & qui diſpoſe les autres Peuples indiqués par Tacite, en forme de cercle autour de la Sialand & des Thuitons, comment Tacite a-t-il pu mettre au dernier rang les *Nuitons*, ou ſuivant l'hypotheſe *les Thuitons*, eux à qui le premier appartenoit, tant à cauſe de la dignité de la Nation, & du Sanctuaire d'Hertha, que par la ſituation même du lieu, qui en faiſoit une eſpece de centre, qu'il auroit falu d'abord indiquer, pour paſſer de là à l'enumération des autres Peuples, qui en formoient la circonference. Pour ne pas ajouter, que malgré toute la peine que le ſavant *Ancherſen* a priſe, il n'a point produit d'argumens ſuffiſans pour établir que la *Codanonie*, & les *Teutons*, appartiennent uniquement à l'Ile de Sialand.

Je ne ſuis pas au reſte fort ſurpris que le nom des Teutons ne

ſe

ſe trouve, ni dans ce Chapitre de Tacite, ni dans les ſuivans. Ce nom, auſſi bien que celui des Cimbres, dont il avoit parlé ailleurs, *, étoit devenu plus obſcur de ſon tems, comme M. *Ancherſen* l'avoüe lui-même. Cependant Tacite, quoique ſans les nommer, paroit avoir compris les Teutons, dans cette Germanie, dont il dit, *qu'elle revient par un grand détour au Septentrion*, (*) par où il entend non ſeulement la Cherſoneſe Cimbrique, la Norwege & la Suede, qui revient ſe joindre au reſte de l'Allemagne vers le Midi, en faiſant effectivement un grand détour par la Finlande, la Livonie & la Pruſſe. C'eſt en vain que notre Savant veut reſtreindre cette Germanie, qui revient par un grand détour, à la ſeule Cherſoneſe Cimbrique avec les Iles du Dannemarc. Le circuit de la Cimbrie ne merite pas le nom de grand; & l'on ne peut pas dire non plus, que la Germanie vienne ſe rejoindre de la ſorte au reſte de la Germanie, puiſqu'aprés les Iles du Dannemarc, elle retourne plutot à la Mer Baltique, & va ſe terminer dans ſes flots.

* c. 37.

Je trouverois donc un moyen plus facile & plus vrai de faire connoitre les *Nuitones* de Tacite; ce ſeroit de les changer en *Guthones*, comme Pline les appelle, † en les joignant auſſi aux *Varins*, dont Tacite a fait mention. Ce ſont les mêmes que les GIOTHONES, JUTONES, *Juti*, *Jutæ*, ou *Vitæ*, comme *Beda* les a nommés. * Ils habitoient la même Cherſoneſe, & s'etendoient juſqu'aux Cimbres, qu'ils comprirent à la fin dans leur nom. Ces *Guthons* ſe ſont changés bien aiſément en *Nuitons*, car le G & l'N ſe mettent ſouvent l'un pour l'autre, comme les Latins ſubſtituënt leur N pour le Γ des Grecs; & l'I avant THONES devient ſans peine un T. Ou bien, ſi vous omettez la premiere lettre N dans NUITHONES, vous aurez UITHONES, ou VITHONES, c'eſt à dire, les *Vitæ* de *Beda*. C'eſt de la même maniere qu'on dit *Friſii* & *Friſones*, *Santi* & *Santones*, *Swanti* & *Swantones*, &c. Cette explication eſt préférable par quantité d'endroits. En la recevant, les peuples indiqués par Tacite ſe trouvent placés de la maniere la

† *Hiſt. Nat.* L. IV. c. 28.

* *Hiſt. Eccl. Angl.* L. I. c. 15.

(*) *In Septentrionem ingenti flexu redit.* Cap. 35.

plus convenable dans le voiſinage de l'Ile de l'Ocean, *Helgeland*, & ceignent en quelque ſorte le Sanctuaire de la Deeſſe. Tacite dans ſa deſcription paſſe d'un peuple à l'autre à peu près dans l'ordre, où chacun deux avoit fixé ſa demeure; quoiqu'il ait pu arriver que quelcun de ces peuples ſe ſoit autrefois étendu plus loin.

Ces mêmes Peuples ſont *remparés de fleuves & de forêts*, au rapport de Tacite; & en effet les fleuves, les ruiſſeaux, les étangs, les lacs & les bois, ſont trés fréquens dans ces contrées du Holſtein, de Sleswick & de Jutland, & y ſervent encore à les défendre: les forêts ſurtout y étoient beaucoup plus abondantes dans ces anciens tems. Enfin toute l'etendüe de païs occupée par ces Peuples eſt comme à l'ecart, *ſecreta*, vers le Septentrion, & s'etend juſqu'à l'Ocean Septentrional; ſituation, que chaque Carte Geographique peut mettre ſous les yeux. Ce ſont donc là viſiblement les Peuples, desquels Tacite ajoute, au commencement du Chap. XLI. *pars Suevorum in ſecretiora Germaniæ porrigitur.* Tous les caracteres qu'il leur attribüe, conviennent aux Peuples, que nous avons propoſés, & ſemblent les montrer au doit.

Ces Peuples, ſuivant le témoignage de Tacite, avoient un tems marqué dans l'année, auquel ils s'aſſembloient pour aller célébrer leur culte en commun dans une Ile de l'Ocean. Là ils adoroient *Herthum*, c'eſt à dire, la Terre Mére, *croyant qu'elle ſe mêloit des affaires des hommes, & qu'elle ſe promenoit par le monde.* M. *Ancherſen* eſt encore ici d'un ſentiment tout oppoſé, il penſe que cette Déeſſe ſe rendoit chez ces Peuples, & qu'elle y venoit par mer. Voici ſes propres termes. * „Il n'eſt pas raiſonnable de croire que la Déeſſe Her„tha ait fait un long chemin par terre avec ſes Vaches, & quelle ait „pu aller au delà d'un mille d'Allemagne, ſans crainte de verſer &c. „Ces raiſons jointes à ce qu' Hertha avoit choiſi une Ile pour demeu„re, & que l'expreſſion, *invehi populis*, peut s'appliquer également à „un Vaiſſeau, & à un Char; ces raiſons, dis je, donnent beaucoup de „vraiſemblance à l'opinion que la Déeſſe alloit & revenoit le plus ſou„vent par mer, & à la rame plutot qu'à la voile, pour courir d'au„tant moins de risques."

* p. 151.

Mais

Mais ces paroles répugnent en pluſieurs manieres à la coutume trés ancienne de ces Peuples, & au récit de Tacite. Les Peuples de la plus haute antiquité, qui étoient attachés au culte du même Dieu, ou de la même Déeſſe, & lui rendoient un culte commun, alloient s'en aquitter au ſejour & dans le Temple de la Divinité ; ce n'étoit point les Dieux, qui venoient trouver les Peuples, & parcourir leurs païs ; beaucoup moins paſſoient-ils les Mers, & s'embarquoient-ils pour de longs voyages chez leurs Adorateurs. Il eſt plus conforme à la raiſon que les inferieurs aillent chez leurs Superieurs, les hommes chez les Dieux immortels, comme ils les appelloient, & que des Nations unies par une Alliance commune euſſent un lieu fixe, où elles vaquaſſent en commun à leurs Cérémonies religieuſes. C'eſt ainſi que celles d'Ionie avoient pour lieu commun *Mycale*, dite à cauſe de cela, Πανιώνιον, où *Herodote* * nous apprend que les Ioniens ſe rendoient de toutes leurs Villes à un tems marqué pour célébrer un culte commun. Les Peuples de la Grece, ſurtout les Atheniens, & même les Hyperboréens, avoient pareillement coutume d'envoyer tous les ans des députations à l'Ile de Delos, pour y faire des ſacrifices en leur nom, comme M. *de Spanheim* l'a fait voir avec une riche érudition. † Tous ces peuples ſemblent avoir imité les Iſraëlites, qui dans leurs Fêtes ſolemnelles quittoient les Villes & la Campagne, pour ſe rendre à ce Temple commun & unique de toute la Nation, qui étoit à Jeruſalem, ſuivant l'obligation expreſſe que leur en impoſoit la Loi Divine. Mais pourquoi vais-je chercher bien loin les exemples de cette coutume ? Tacite lui-même l'attribüe aux *Sueves*, dits *Semnons*, dans ce paſſage formel du Chapitre XXXIX. „La fidelité eſt confirmée „par d'anciennes pratiques de Religion. Dans un tems marqué tous „les Peuples qui ſont du même ſang ſe raſſemblent par Députés, (les „Grecs nomment ces députations Θεωρίας,) dans une forêt conſa„crée par les augures de leurs péres, & par une ancienne frayeur, & „après avoir publiquement égorgé un homme, commencent ainſi la „ celebration de leurs barbares rites.“

* L. I. c. 148.

† Ad *Callimachi Hymnum in Delum*, p. 279.

J'eſtime que ces exemples ſuffiſent pour détruire entierement la penſée de M. *Anchersen*, ſur les voyages de la Déeſſe *Hertham* chez

chez les Peuples qui l'adoroient, & pour faire voir que ces Nations Sueves qui ont été indiquées, ſuivoient plutot la coutume univerſelle des Nations, dictée par la raiſon même, en ſe rendant à certains tems marqués dans l'Ile ſacrée, où réſidoit la Divinité.

Enfin Tacite eſt entierement contraire au Voyage par mer, que notre Savant croit avoir été fait par la Déeſſe, pour aller viſiter ſes Peuples. L'expreſſion, *invebi populis*, & le *vehiculum* de la Déeſſe dont il parle auſſi-tot aprés, peuvent-ils réveiller à quelcun l'idée d'une navigation, & perſuader que c'etoit ſur un *vaiſſeau*, que la Déeſſe faiſoit ſon voyage. *Le Sacrificateur*, continüe Tacite, *ſuivoit avec beaucoup de vénération la Déeſſe traînée par des vaches.* Peut-on entendre ces paroles que d'un chemin par terre, & le Sacrificateur pouvoit-il ſuivre autrement qu'à pied un char traîné par des Vaches? Quant à ce que M. *Ancherſen* ajoute des *risques de verſer*, on ne ſauroit s'y arrêter, dés qu'on ſait que la route de la Déeſſe étoit tracée d'avance, qu'elle étoit cenſée conduire elle même le char, & qu'il arrivoit fréquemment dans les pompes, que les ſimulacres des Dieux faiſoient de longues routes ſur leurs chars, ſans qu'il y ait d'exemple que ces chars ayent verſé; tant leurs religieux conducteurs y apportoient de précautions.

Voici comment j'eſtime que toute la Cérémonie ſe paſſoit. Dans un tems marqué de l'année, les Peuples nommés par Tacite envoyoient des Députations ſacrées à l'Ile d'Helgeland, ou d'Helgelund, Sanctuaire de la Déeſſe Hertha, pour y adorer au nom de tous ces Peuples cette Divinité, qu'ils regardoient comme leur Mére, & la ſource auguſte de leur origine. La Déeſſe, pour témoigner que ce culte lui étoit agréable, ſortoit de chez elle en pompe ſur ſon char, pour aller viſiter les Députés de chaque Peuple, & les honorer de ſa préſence; *adventu, hoſpitioque dignata eſt*, dit Tacite. Elle étoit reçuë par tout avec les plus grandes démonſtrations de joye, & au bruit des acclamations; on faiſoit des Jeux & des Danſes ſacrées. Pendant ce tems là, ni les Députés, ni les Peuples qui les envoyoient, ne pouvoient prendre les armes, ni ſe mêler d'aucune guerre; il n'y avoit que paix & tranquillité, comme Tacite nous l'apprend, & comme nous l'avons ſuffiſamment prouvé dans notre premier Mémoire.

RE-

RECHERCHES

SUR L'ABROGATION DU DROIT D'ELIRE UN ROI DES ROMAINS, FAUSSEMENT IMPUTÉE A L'EMPEREUR HENRI VI.

PAR M. LE COMTE DE KEYSERLING.

Traduit du Latin.

I.

Il paſſe aujourdhui pour certain parmi les Savans, que l'Empereur Henri VI. s'eſt occupé pendant ſon Règne à rendre héréditaire pour ſa poſterité l'Empire, qui dépendoit de la libre élection des Princes. Cette opinion a même eu tant de force au jugement de M. *Gundling*, qu'il n'a pas balancé d'en inferer * que la puiſſance d'elire les Empereurs, appartenoit dés ce tems-là aux Electeurs. Et *Meibomius*, dans ſon Apologie pour Otton IV. † l'a ſoutenu avec autant de chaleur, que ſi la cauſe d'Otton qu'il défend, ou le ſalut de la République, euſſent dépendu de cette créance.

* *Gundlingian.* P. XVII. P. 169.

† *Rer Germ.* Tom. III.

II. L'un & l'autre de ces Auteurs s'appuyent ſur le Compilateur de la grande Chronique Belgique, qui a cité un certain Moine *Jean Gobelinus Perſona*, & la Chronique de Halberſtadt. Pour répandre du jour ſur ce fait, & faire voir s'il doit être regardé comme certain, ou dou-

douteux, il ſera néceſſaire d'examiner avec attention le degré de foi que méritent les Témoins allegués, & leurs témoignages. Mais avant que de nous mettre à cet examen, rapportons les témoignages mêmes.

III. Voici ce que nous liſons dans la grande Chronique Belgique. * „Cet Empereur Henri, voyant que l'Empire d'Allemagne avoit „ſouffert pluſieurs maux, de même qu'autrefois l'Empire Romain, à „cauſe des fréquens changemens d'Empereurs, avant que les ſuffrages „des Princes ſe réüniſſent pour une nouvelle Election, il ordonna qu'il „ne ſe feroit plus à l'avenir d'Election, mais que l'Empire ſeroit dé„volu par la ſeule ſucceſſion du ſang, en ſorte que celui qui ſe trouveroit le „plus proche parent de l'Empereur défunt, parviendroit à cette di„gnité par droit héréditaire. Et pour commencer par ſon fils Frèderic, „qu'il avoit eu de ſa femme Conſtance, Henri réünit à l'Empire Ro„main le Royaume de Sicile & de Calabre, le Duché de la Poüille, & „la Principauté de Capoüe, que ſon Fils tenoit hèréditairement de ſes „Ancêtres, afin qu'il devint Seigneur unique & perpetuel de tous „ces Etats. Il ordonna auſſi que les Femmes ſuccederoient au défaut „des Mâles, & que l'Empereur ne prétendroit plus à l'avenir aux droits „de main morte ſur les biens des Eccleſiaſtiques. Cette Conſtitution, „qui auroit été ſi utile, fut approuvée par la Cour de Rome, & par „LII. Princes, qui avoient coutume d'elire, & qui appoſerent leurs „Sceaux aux Lettres Patentes qui en furent dreſſées."

* Ap. *Pistorium in Scriptor.* VI. d. 203.

IV. Le recit de *Gobelinus Perſona* † eſt conçu en ces termes. „Henri fit un accord avec les Princes de l'Empire, que ſes Enfans lui „ſuccederoient par droit hereditaire, mais les Princes de Saxe s'y op„poſerent. A cauſe dequoi l'Empereur dégagea lui-même ces Princes „de leur promeſſe, & du ſerment qu'ils avoient prêté dans cette „occaſion."

† Ap. *Meibom*, Tom. I. *Rer. Germ.* p. 275.

V. Paſſons à la Chronique de Halberſtadt. * „Conrad Archevêque de Mayence avoit conſpiré avec les Princes de Saxe contre „l'Empereur Henri VI. parce qu'il leur avoit demandé que la Succeſ„ſion de l'Empire paſſât à ſes heritiers. On venoit d'elire alors pour „Evêque d'Halberſtadt Gardolffe, dont l'ordination fut differée de „quel-

* Ap. *Leibnit. Script. Brunſw.* Tom. II. p. 138.

„quelque tems à cauſe de cette affaire. Mais ce même Gardolffe ar-
„réta le meſſager qui portoit aux Princes les Lettres de la conjuration,
„& intercepta ces Lettres. Les ayant enſuite communiquées à l'Em-
„pereur, ce Prince, en homme ſage & prudent, ſe déſiſta de la de-
„mande qu'il avoit faite.

VI. Si nous faiſons attention au tems où a vécu le Compilateur de la Chronique Belgique, il eſt conſtant qu'il étoit contemporain de Charles le Hardi, Duc de Bourgogne. Car à la fin de cette Chronique il parle du Siege de Nuis formé par ce Prince, comme y ayant aſſiſté; „Le bruit des Bombes, dit il, * rétentiſſoit dans l'air avec „un tel fracas, qu'à peine pouvois je le ſoutenir, en me bouchant les „oreilles." Or ce Siege tombant ſur l'année 1447. comme le témoigne *Pontus Heuterus*, † il en réſulte que notre Chroniqueur floriſſoit vers la fin du XV. Siecle. Mais l'Empereur Henri VI. n'ayant pouſſé ſon Regne que juſqu'à l'an 1197. il en réſulte clairement qu'il y a un intervalle de près de trois Siecles entre le tems où Henri a régné, & celui auquel le Compilateur a écrit ſa Chronique Belgique. C'eſt ce qui fait que je ſuis ſurpris qu'on ajoute foi à cet Ecrivain ſur des choſes ſi éloignées de ſon tems. Il eſt vrai qu'il en appelle à l'autorité d'un certain Moine *Jean*; mais ſans dire, ni ſi ce Moine étoit un Auteur contemporain, ni où ſes Ecrits exiſtent, & peuvent ſe lire.

* l. c. p. 410.

† *Rerum Burg.* L. V. c. X. p. 178.

VII. *D' Achery* a inſeré dans ſon *Spicilegium* * quelques Ecrits d'un Moine *Jean*, Ecrivain du XII. Siecle; mais leur contenu ne s'etend pas juſqu'au tems d'Henri VI. Il y auſſi dans *Muratori* † une *Chronique de Vulturne* par un Moine *Jean*, mais elle n'embraſſe que depuis DCCIII. juſqu'à MLXXI. & par conſéquent ne va point juſqu'à Henri VI. Et dans les fragmens qu'on y a ajoutés, il ne ſe trouve pareillement rien qui ait du rapport à ce que le Compilateur de la Chronique Belgique nous dit d'Henri VI. *Gundling* prétend * que ce *Jean* étoit un Moine de S. Vincent, & Auteur contemporain. Mais puiſque *Jean Vincentius*, Moine de l'ordre des Prédicateurs, dont *Leibnitz* fait mention, n'a aucun caractere qui puiſſe faire croire que c'eſt celui dont il s'agit ici; & que d'un autre coté *Jean*, Moine

* Tom. III. p. 234.

† *Scriptor. Rer. Italic.* Tom I. P. 2. P. 325.

* l. cit.

de *S. Vincent*, prés de la ſource du Vulturne en Campanie, n'a fleuri qu'aprés le milieu du XV. Siécle, ſans que parmi tous les autres Compilateurs de vieux monumens il exiſte, que je ſache, un autre Moine *Jean*, ni que *Gundling* ait pu montrer aucune trace, ou veſtige de cet Auteur, & du paſſage qu'on cherche ; il eſt evident que cet Ecrivain & ſon témoignage ſont enſévelis dans une profonde obſcurité, & qu'ainſi il eſt tout à fait douteux, s'il eſt digne qu'on y ajoute la moindre foi. A' quoi je pourrois ajouter que les vrais Ecrivains de ce tems-là, comme *Conrad d'Urſperg*, *Arnold de Lubec*, *Otton de S. Blaiſe*, n'ont point entrelacé cette circonſtance dans le fil de leur hiſtoire.

VIII. Quant au fonds même du témoignage, il s'y trouve pluſieurs choſes, qui ſont entierement éloignées de la Verité. Premierement, ce qui eſt dit, que l'Empereur ordonna qu'on ne feroit plus d'Election, mais que l'Empire écheoiroit par la ſeule ſucceſſion du ſang : au lieu que les Auteurs contemporains, déjà nommés plus d'une fois, déclarent poſitivement, qu'Henri prit ſoin de faire élire ſon Fils par les Grands du Royaume, & qu'il reçut d'eux les Lettres néceſſaires pour donner de la validité à cet acte. Ces Lettres ont dû contenir l'abrogation des Elections pour l'avenir, ou non. Si elles l'ont contenüe, il eſt incroyable que les Ecrivains qui ont parlé de ces Lettres, ayent paſſé ſous ſilence un changement auſſi conſiderable, & il ne l'eſt pas moins que l'Empereur ait demandé aux Princes un ſemblable acte, qui leur mettoit tout à la fois ſous les yeux le Droit d'Election dont ils avoient joui, avec l'exercice qu'ils en avoient fait, & l'abrogation de ce même droit. Si ces Lettres n'ont rien exprimé ſur ce ſujet, la fauſſeté du témoignage que nous attaquons, eſt démontrée.

IX. Ce que le Pape Innocent III. dit dans ſa *déliberation ſur le fait des trois elûs à l'Empire*, s'accorde avec notre raiſonnement. „Depuis cependant, dit-il, * ſon Pére, (Henri Pére de Frèderic) „s'appercevant qu'il avoit fait une fauſſe démarche, dégagea les Prin„ces de leur ſerment, & leur rendit les Lettres d'Election ; mais en„ſuite

* *Epiſt.* Tom. I. p. 697.

„ſuite les mêmes Princes l'élurent, quoiqu'à peine ſorti de l'enfance, „en l'abſence de ſon Pere, de leur propre mouvement, & d'une ma„niere unanime.“ Aſſurément ſi Henri, outre l'élection de ſon fils, s'étoit propoſé l'introduction d'un Droit purement héréditaire, ce Pontife extremement acharné contre tous les Empereurs de cette famille, ne l'auroit pas épargné là deſſus, & lui auroit amérement reproché cet attentat aux Droits & à la Liberté de l'Empire. Ainſi ne l'ayant pas fait, cela prouve aſſez que cette prétendüe entrepriſe étoit une choſe inconnüe dans ce tems-là.

X. Il y a à la verité un paſſage dans la Lettre d'Innocent, * qui pourroit faire ſoupçonner Henri d'avoir fait quelques tentatives contre la liberté des Elections. Il eſt conçu en ces termes. „Ils avan„çoient auſſi que ce qui ne faiſoit pas peu contre lui, c'eſt qu'il s'ef„forçoit d'uſurper le Royaume par un droit héréditaire contre la li„berté de l'Empire. D'où arriveroit que, ſi comme autrefois le frere „avoit ſuccedé au pére, le frère préſentement ſuccedoit au frere, la „liberté des Princes ſeroit détruite, puiſqu'il parviendroit à la Cou„ronne, non par leur élection, mais plutot par ſucceſſion.

XI. Mais cette difficulté eſt aiſée à réſoudre, ſi l'on fait les remarques ſuivantes ;

1. Que cette Lettre ne traitte que de la controverſe qui étoit agitée entre Philippe, & Othon, & par conſéquent qu'elle n'a aucun rapport aux fauſſes imputations, dont Henri a été chargé.

2. Que le Pape rapportant ſimplement les Objections faites contre Philippe par le parti contraire, ce n'eſt point là où il faut chercher la verité des faits, dont un ennemi ne ſe met pas ordinairement fort en peine.

3. Que l'Objection rapportée contient plutot l'interprétation fournie par les ennemis de Philippe, que les faits réels : car le Pape parle de la crainte, vraye ou feinte, qu'ils avoient conçüe que l'Empire ne demeurât dans la Famille de Stauffen ; & il ne dit point que la raiſon en fut priſe de l'abolition du Droit d'Election : on ne crai-

gnoit que cette continuation de l'Empire dans la même Famille, qui ne pouvoit s'accorder avec la liberté d'election.

4. Que ces mêmes adverſaires de Philippe n'ont point allegué l'action de l'Empereur Henri, telle qu'on la lui attribuë ordinairement, quoique les raiſons de leur crainte euſſent paru beaucoup plus conſiderables & plus ſolides, s'ils avoient été en état de produire quelque entrepriſe déjà formée contre la liberté.

XII. A tout cela on peut ajouter les paroles ſuivantes, qui ſe liſent dans les *Geſtes d'Innocent III.* * „Depuis donc que l'Empereur „Henri eut acquis la poſſeſſion du Royaume de Sicile tout entier, „après l'avoir dépouillé de l'or, de l'argent & des pierres précieuſes „qui s'y trouvoient, il revint en Allemagne avec un grand triomphe, „& obtint des Princes, qu'ils éluſſent pour Roi des Romains ſon fils „Frèderic, enfant de deux ans, & qui n'avoit pas encore été bâtiſé, „& quils lui prêtaſſent ſerment de fidelité ; & parmi ces Princes, Phi„lippe dont on a parlé ci-deſſus, prêta auſſi le même ſerment.“ On voit par ces paroles, que l'Auteur d'où elles ſont tirées n'a pas eu deſſein de depeindre la conduite de Henri du beau coté, mais qu'il a plutôt cherché a lui attirer la haine & le blâme, en diſant que cet Empereur avoit pillé la Sicile, & avoit fait élire ſon fils Frèderic, avant même qu'il fut baptiſé. Si donc ce même Empereur avoit travaillé à détruire la liberté des elections pour y ſubſtituër le droit héréditaire; aſſurément un Ecrivain devoüé à la Cour de Rome n'auroit pas laiſſé échaper cette occaſion de le noircir. Car cet attentat pouvoit le rendre beaucoup plus odieux que les dépoüilles qu'il avoit emportées de la Sicile ; ſes prédeceſſeurs dans l'Empire d'Allemagne rendoient cette derniere action en quelque ſorte legitime, l'ayant autoriſée par leur exemple, au lieu qu'il n'y avoit point d'exemple du deſſein de rendre l'Empire patrimonial, & de faire elire comme Succeſſeur à l'Empire un enfant, qui n'avoit pas encore reçu le S. Bâteme.

* *Epiſt.* Tom. I. C. XIX. p. 5.

XIII. Une ſeconde choſe qui ſe préſente à remarquer contre la foi düe au temoignage, que nous avons tiré de la Chronique Belgique ; c'eſt ce qu'elle avance, que l'Empereur Henri, pour arriver plus aiſement à ſes fins, unit à l'Empire Romain le Royaume de Sicile & de Calabre, le Du-

ché

ché de la Pouïlle, & la Principauté de Capoüe, qui avoient été transmis à ſon Fils par ſes Ancêtres. Si pareille choſe étoit arrivée, pourquoi, je vous prie, ne demeureroit-il pas le moindre veſtige d'une union auſſi mémorable ? Pourquoi tous les Ecrivains auroient-ils gardé là deſſus le ſilence le plus profond ? Pourquoi le Pape, dans l'Ecrit que nous avons déjà cité, * en parlant de l'union du Royaume de Sicile, dont il prétendoit avoir le Domaine Souverain, & de la confuſion qui en réſulteroit entre l'Egliſe & l'Empire, auroit-il propoſé cet évenement comme une choſe à craindre, à cauſe de l'accord fait entre les Princes de l'Empire à ce ſujet, & n'auroit pas plutot fondé ſes craintes ſur la ſeule promotion de Frèderic, ſi elle avoit déjà exiſté ? Ignoroit-il la grande difference qu'il y a entre des choſes déjà réellement paſſées, & celles qui n'ont qu'une poſſibilité à venir ? Il eſt au contraire de la derniere vraiſemblance, que ſi cette union avoit été miſe ſur le tapis par Henri, pour faciliter à ſon Fils l'acquiſition du droit héréditaire à l'Empire, le Pape ne ſe ſeroit pas tû ſur une pareille choſe.

* p. 698.

XIV. Paſſons en troiſieme lieu au droit de ſucceder, accordé aux femmes, au défaut des Mâles, & au droit de dépoüilles, dont la Chronique Belgique fait mention, depuis ces mots, *Il ordonna auſſi*, &c. juſqu'à la fin du paſſage cité. On y voit manifeſtement, que l'extenſion du droit de ſucceder aux Fiefs, accordé au ſexe feminin, & le renoncement aux droits de main morte ſur les biens Eccleſiaſtiques en Italie & en Allemagne, devoient être des choſes dont la connoiſſance étoit univerſellement répanduë dans ce tems-là, puiſqu'on prétend que la Cour de Rome, & LII. Princes avoient accordé leur conſentement à cette Conſtitution, dont l'Allemagne auroit retiré de grands avantages. Je ſais bien que le ſilence d'un, ou de deux Ecrivains, ne donnent pas le droit de conclurre contre l'exiſtence d'une choſe, dont il y auroit d'autres preuves. Mais il s'agit du ſilence univerſel de tous les Hiſtoriens de ce tems-là, tant d'Italie que d'Allemagne, qui n'ont fait aucune mention d'une choſe cependant ſi importante, & qui doit s'être paſſée de la maniere la plus publique. On ne

ne produit qu'une narration faite au bout de prés de trois Siecles, & appuyée ſur l'autorité de je ne ſçai quel Moine *Jean*, dont la perſonne & les ouvrages ſont tout à fait inconnus. C'eſt donc à bon droit qu'une telle narration eſt ſuſpecte.

XV. Voyons auſſi un peu, comment cette rélation s'accorde avec les expreſſions qui ſe trouvent dans les Lettres des Princes, qui élurent Otton IV. pour Empereur, aprés la mort de Henri. Voici ce qu'on y lit, * Lettre IX. „Il s'eſt auſſi libéralement déſiſté en faveur „de nous & des autres E. êques de la mauvaiſe coutume qu'avoient les „Empereurs precedens de s'emparer de tous les biens meubles, qui ſe „trouvoient au decés des Evêques & Abbés Princes." Et dans la Lettre X. „De plus detruiſant entiérement la mauvaiſe coutume „qu'avoient conſervée juſqu'à préſent ſes Prédeceſſeurs à l'Empire, de „s'emparer des biens meubles, qui ſe trouvoient au decés des Evêques & „Abbés Princes, il nous a delivrés, nous Princes Eccleſiaſtiques, avec une „beneficence Royale, de cette injuſte vexation, & a libéralement ſtatué que „les biens de ceux qui décederoient, paſſeroient à leurs heritiers. Nous „avons donc cru devoir ſupplier Votre paternité, comme nous fondant „ſur la fidelité & le devouëment de notre Seigneur Roi &c.

* *Epiſt. Innocent. III.* Tom. I. p. 689.

XVI. Ces paſſages nous enſeignent ouvertement, 1. qu' Otton eſt le premier, qui ait renoncé à ce droit de dépouïlles, puiſqu'on y dit que cette mauvaiſe coutume avoit ſubſiſté juſqu'à ſon tems.

2. Que cette renonciation lui étoit imputée comme un merite tout à fait nouveau, auquel le Pontife eſt ſupplié d'avoir égard, comme à une preuve marquée de la fidelité & du devouëment d'Otton.

S'il étoit vrai, comme le prétend la Chronique Belgique, que Henri VI. eut déjà reglé que le droit de dépouïlles ne s'exigeroit plus à l'avenir, aſſurément, on ne ſauroit concevoir, comment les Lettres qui viennent d'être alleguées, peuvent porter, que cette mauvaiſe coutume avoit duré juſqu'au tems d'Otton IV. & que c'étoit lui qui l'avoit enfin détruite. On dira peut-être que le renoncement à ce droit peut être également attribué à Henri & à Otton, de maniere que le premier en ait fait la déclaration, mais ſans l'executer, ce qui aura

aura fourni au ſecond l'occaſion de proceder réellement à cette renonciation. Mais alors nous demandons, comment cette ordonnance de l'Empereur Henri, les raiſons qui l'engagerent à la faire, & celles qui en empêcherent l'execution, ont échapé aux Ecrivains de ce tems, qui n'étoient pas moins revêtus de la qualité de témoins oculaires, que ceux du tems d'Otton ? Pourquoi les Archives de la Cour de Rome, ni celles de l'Empire, n'en ont-elles pas conſervé la moindre mémoire, puiſqu'on prétend que ces choſes ont été réglées du conſentement commun de ces deux Cours, & que la connoiſſance s'en eſt répanduë dans le Public ? Le Clergé ordinairement ſi attentif à tous les Droits & Benefices qu'on lui accorde, auroit-il pu mettre en oubli une choſe qui lui procuroit de ſi grands avantages, en ſorte qu'un Moine Jean, caché dans une profonde obſcurité, ſoit le ſeul qui en ait parlé ? Pourquoi l'Archevêque de Cologne, & les Princes, dans les Lettres que nous avons alleguées, ne diſent-ils pas un mot de la renonciation de Henri, ſe bornant à citer celle d'Otton, comme une preuve ſinguliere de ſa fidelité & de ſon devoüement. Aſſurément, ſi Henri avoit fait une pareille renonciation, nous trouverions bien un autre nombre d'Ecrits, ou d'Actes de ces tems là, & des ſuivans, que ceux dont la Chronique Belgique fait mention. Nous ſommes donc obligés d'avoüer que le paſſage de cette Chronique que nous avons rapporté, nous eſt encore fort ſuſpect par cet endroit là.

Toutes les particularités rapportées par le Moine Jean, étant donc telles qu'on ne peut les accorder avec celles que nous ont tranſmiſes les Ecrivains les plus dignes de foi de ce tems-là ; cela nous fournit de juſtes raiſons de revoquer en doute le contenu du paſſage en queſtion de la Chronique Belgique, & cela nous détermine à lui refuſer entierement notre créance.

XVII. Un autre témoin, ſur le ſuffrage duquel Meibomius cherche à s'appuyer, c'eſt *Gobelinus Perſona*; dont on ſait, qu'il fleuriſſoit au commencement du XV. Siécle, puiſqu'il a pouſſé ſon Ouvrage, intitulé *Cosmodromium*, juſqu'à l'an 1418. Mais c'eſt inutilement qu'on voudroit recourir à ce témoignage ; la diſtance des tems eſt beaucoup trop conſiderable, pour qu'on puiſſe en admettre la validité, d'autant

plus que *Gobelinus Perſona* ne cite point d'autres témoins contemporains, & dignes de foi. Il eſt clair par conſéquent, qu'on doit lui appliquer ce que nous avons dit du Compilateur de la Chronique Belgique, & il ſeroit ſuperflu de le répeter ici.

XVIII. Enfin la Chronique de Halberſtadt ſert auſſi de baſe au témoignage de *Meibomius*; & cette Chronique paroit avoir été écrite, lorsque le XIII. Siécle n'etoit pas fort avancé, puisqu'elle s'arrête à l'Evêque Conrad, qui renonça à l'Evêché en 1209. * Il eſt donc conſtant que le Compilateur de cette Chronique vivoit en même tems que Henri, qui a tenu les rênes de l'Empire jusqu'en 1197. Cet avantage du tems, joint à celui du merite, lui doivent donc faire donner une entiere préference, par rapport au témoignage dont il s'agit, ſur le Compilateur de la Chronique Belgique, & ſur *Gobelinus Perſona*, Ecrivains fort poſterieurs à ces tems-la. Mais comme la Chronique de Halberſtadt ne parle point de l'abolition des Elections libres, & de l'introduction du droit héréditaire, mais qu'on y lit ſimplement, que l'Empereur Henri demanda aux Princes, que la Succeſſion de l'Empire paſſât à ſes heritiers; il a plu à *Meibomius* de faire préceder des témoins beaucoup plus modernes, croyant donner par là une certaine force à ſon opinion. Or il eſt manifeſte que l'ordre ne ſauroit être renverſé de cette maniere, & que des Ecrivains plus récens, qui n'ont point vêcu, lorsque les faits ſont arrivés, ne ſauroient ſervir à répandre du jour ſur de plus anciens, ſans quoi on tombe dans le défaut de raiſonnement, qui ſe nomme *vitium obreptionis*. Si quelcun croyoit neanmoins pouvoir inferer de la teneur du témoignage, qui ſe trouve dans la Chronique de Halberſtadt, que Henri VI. voulut effectivement abroger la coutume d'elire les Empereurs, pour faire paſſer la ſucceſſion de l'Empire à ſes héritiers, il nous paroit qu'il tomberoit dans une grande erreur, en tirant du ſeul mot d'*heritiers*, employé au plurier par ces Ecrivains, l'abrogation du droit d'elire, & l'introduction du droit héréditaire. Cela eſt d'autant moins ſupportable, que l'Auteur ne dit rien du tout d'approchant, mais ſe borne à rapporter que Henri ſe déſiſta de la demande qu'il avoit faite aux Princes. Or cette demande dont il ſe déſiſta, n'avoit d'autre objet que

* Voy. *Leibnitz, Script. Rer Brunſw.* Tom. II. p. 15.

que l'election de ſon fils Frèderic, comme ces paroles, tirées des Lettres d'Innocent III. le mettent dans une pleine evidence. * „Depuis „cependant, ſon Pere s'appercevant qu'il avoit fait une fauſſe démar„che, dégagea les Princes de leur ſerment, & leur rendit les Lettres „d'election de Frèderic.“ Si les Lettres qui furent renduës aux Princes par Henri, ne concernoient que l'election de ſon Fils, il faut néceſſairement qu'elles n'ayent pas contenu l'abrogation des Elections; autrement ceux qui en parlent, feroient mention de l'un & l'autre de ces deux chefs, le ſecond étant pour le moins auſſi remarquable que le premier. Tout cela montre clairement que *Meibomius*, pour établir ce qu'il avance, travaille inutilement à ſe munir de l'autorité du paſſage en queſtion, qui ne renferme rien de nouveau, ni d'etranger aux uſages de l'Empire, mais qui rapporte ſeulement un fait commun aux Empereurs précedens, qui n'avoient jamais manqué de faire tous leurs efforts, pour procurer de leur vivant l'election de leurs Fils en qualité de Rois des Romains, & pour leur laiſſer une eſperance aſſurée de ſucceder à l'Empire.

* Tom. I. p. 698.

XIX. J'ai envie d'ajouter à tout ceci un paſſage qui vient de tomber fortuitement ſous mes yeux. Il ſe trouve dans *Gervaiſe Tilberienſis*, † & en voici la teneur. „Il (*Henri*) inſtitua cette Loi chez „les Allemands, que ſuivant la coutume des François & des Anglois, „les Fiefs (*militiæ*) ſervient dévolus par droit de Succeſſion, & ſe „transmettroient ſuivant les degrés des générations, au lieu qu'auparavant ils ne dependoient presque que de la faveur du Prince. Mais „pour faire tourner à ſon propre avantage le bienfait qu'il avoit ac„corde, il obtint de ſes ſujets que l'ancienne forme d'election des „Seigneurs (*Palatinorum*) ceſſeroit, & que l'Empire demeureroit à ſes „deſcendans, par un ordre de Succeſſion fondé ſur la proximité, en „ſorte qu'il ſeroit le dernier des Empereurs élus, & la tige de cette „dignité renduë ſucceſſive.“

† Dans ſes *Otia Imper.* p. 66. Edit. de *Madrus*, inſer. dans les *Script. Brunſw.* de *Leibnitz*. Tom. I. p. 943.

XX. Nous n'avons aucun ſujet de douter que cet Auteur n'ait fleuri du tems de Henri VI. Car il rapporte * qu'il a vu lui-même au Concile de Veniſe Frèderic I. père d'Henri VI. faiſant ſa pénitence. A cet égard nous n'avons donc rien à objecter contre lui. Cependant la fauſſeté manifeſte de ſon témoignage découle, non ſeulement

* Ioc. cit. p. 64. & 65.

des mêmes raiſons que nous avons alleguées ci-deſſus contre la ſuppoſition, que Henri ait voulu abolir le droit des Elections, & établir le droit héréditaire ; mais encore de ce qu'il rapporte, qu'à cauſe de cela Henri fit une Loi ſur la dévolution des Fiefs aux heritiers, pour fortifier l'acquiſition du droit de ſucceſſion héréditaire à l'Empire qu'il avoit acquis à ſes deſcendans.

XXI. Mais, puisque les Empereurs qui ont régné avant Henri VI. avoient déjà établi des Loix publiques ſur la ſucceſſion des Enfans aux Fiefs, on ne ſauroit aſſurément attribuër à Henri d'etre l'Auteur de cette Loi en Allemagne, & d'avoir réglé le premier que les Fiefs ſeroient dévolus par droit de Succeſſion, ſuivant la proximité des degrés dans les générations. En voici la preuve dans ces paroles de la Conſtitution de l'Empereur Conrad. * „Nous ordonnons auſſi que lorsque „quelque noble, (*miles*) ſoit d'entre les principaux, ſoit d'entre les moin„dres, viendra à ſortir de cette vie, ſes fils obtiendront ſon benefice ; que „s'il n'a point de fils, mais qu'il reſte quelque fils d'un de ſes fils, il en joui„ra de même, en conſervant l'uſage où ſont les grands Vaſſaux de fournir „des Armes & des Chevaux à leurs Seigneurs." Et dans la Conſtitution de Frèderic I. † „De plus ſi le fils d'un Vaſſal vient à offenſer ſon „Seigneur, le pére en étant requis par le Seigneur, amenera ſon fils „pour lui faire ſatisfaction, ou bien il ſe ſéparera de ſon Fils; autre„ment il ſera privé du Fief. Et ſi le Pére ayant voulu mener le Fils, „pour faire ſatisfaction, celui-ci n'en a tenu aucun compte ; à la mort „du Pére il ne ſuccedera point au Fief." *Guntherus* fait ſur cette Conſtitution de Frèderic I. la Remarque ſuivante. * „Lorsque le ſuc„ceſſeur, ou heritier d'un Fief, qui a déjà atteint l'adoleſcence, laiſſe „écouler un an & un jour, ſoit par dol, ſoit par négligence, ou par orgueil, „ſans demander à ſon Seigneur les droits feodaux, il eſt déchu du Fief, „& le Seigneur peut le convertir à ſon propre uſage."

* *De benef. Feud.* 5. Tit. I.

† *Feud. II.* Tit. LV. §. 2.

* In *Liguvino* apud *Reuberum. V. Script. Rer. Germ.* L. VIII. p. 419.

XXII. Mais avant ces tems mêmes, la Succeſſion héréditaire avoit lieu dans les Fiefs, comme cela paroit clairement par la vie de *Conrad le Salique* écrite par *Wippon*, où cet Auteur a mis formellement ces paroles. † „L'Empereur Conrad le Salique ſe concilia beau„coup l'eſprit des Nobles, en ce qu'il ne permit pas qu'aucun des-

† Ap. *Pistor. Script.* VI. p. 430.

cendant

„cendant perdit quoi que ce ſoit des anciens benefices de ſes Ancêtres.“ Et le Continuateur de *Reginon* * rapporte le fait ſuivant, au ſujet du Comte *Uton*, Seigneur illuſtre à la Cour de l'Empereur Otton le Grand: „Le Comte Uton venant à mourir, partagea avec la permiſſion „de l'Empereur tout ce qu'il poſſedoit de benefices & de Gouverne„mens entre ſes Fils, comme un heritage.“ La même choſe ſe démontre par la Loi ſuivante de Lothaire le Saxon, publiée le 26. Août 1127. „Pour terminer ces altercations nous ordonnons, que ce qu'un „Frere a fait, (ſavoir en donnant ſimplement,) ne pourra préjudicier „à un Frere qui ſurvit; même ſi le bien avoit paſſé à la ſeconde géné„ration, à la troiſieme, & jusqu'à l'infini.“ Si donc ce qu'un Frere avoit fait en donnant ſimplement, ne devoit point prejudicier au Frere qui ſurvit, quand même le bien ſeroit paſſé à la ſeconde, ou troiſieme génération, & jusqu'à l'infini, il en réſulte néceſſairement que la Succeſſion par générations s'etendoit auſſi alors jusqu'à l'infini, & qu'ainſi l'inſtitution de ce droit eſt d'une Epoque fort anterieure au tems de Henri VI.

* p. 77.

XXIII. Cette rélation de *Gervaiſe* renferme donc tant de choſes contraires à la verité, que nous n'avons aucun lieu de regarder comme digne de foi, & veritablement faite par Henri, l'introduction du droit héréditaire à l'Empire, qu'on voudroit y fonder; ſurtout ſi nous faiſons réfléxion que cet Ecrivain étoit attaché au parti & au ſervice d'Otton, qui étoit en guerre avec la famille de *Stauffen*; & qu'ainſi c'eſt un témoin domeſtique, dont les paroles ne meritent aucune créance, & ne ſauroient être alleguées en preuve. Tout nous conduit plutôt à conclurre, que cette abrogation du droit d'elire, & cette introduction du droit héréditaire, ſont des fictions inventées en haine des Princes de la Maiſon de *Stauffen*, & nées de l'interpretation ſiniſtre, donnée à un fait qui n'avoit rien de blâmable, & divulguée comme vraye par une multitude d'Ennemis.

XXIV. Si je ne me trompe beaucoup, je vais prouver la même choſe par une autre rélation. Il exiſte, ſuivant le témoignage des Savans de Goettingen, qui nous ont donné une Deſcription de l'état préſent de la Litterature, † une Chronique qui n'a point encore été publiée

† *Delineatio nupperrimi Status Eruditionis* P. II.

publiée, du Monaſtere de *Reinersbrunn*, ou, ſous l'an 1096. l'Auteur, aprés avoir parlé au long des diverſes réſolutions priſes par les Princes d'Allemagne, au ſujet de l'expedition de la Terre Sainte, ajoute ces paroles ſouverainement dignes d'attention.

XXV. „L'illuſtre Empereur Henri voyant les Archevêques, les „Evêques, les Ducs, les Marquis, & le Landgrave Hermann lui-même, „avec ſes autres Enfans & Officiers, qui ne reſpiroient que le ſigne de „la Croix, & qui ſe portoient avec la plus vive ardeur à cette ſainte „entrepriſe, il voulut ſatisfaire à leurs deſirs, & publia un Edit géné„ral, pour former une Aſſemblée de tous les Princes dans la Ville de „Mayence ; *voulant accorder une licence privilegiée dans le Conſiſtoire „Imperial, à tous ceux qui iroient à la Guerre ſainte, par rapport à l'he„ritage de leurs poſſeſſions, en ſorte que quiconque n'auroit point de fils „d'une perſonne libre, pourroit leguer ſon heritage à une fille, ou à l'he„ritier quelconque le plus prochain dans la Généalogie :* par où il ſe pro„poſoit d'augmenter encore leur zele & leur dévotion. Il ſe trouva néan„moins peu de perſonnes à cette Aſſemblée, & ceux qui y aſſiſterent, „*s'obligerent par promeſſe à l'Empereur de garder d'un conſentement „volontaire une fidelité inviolable à ſa poſterité, qui lui ſuccederoit here„ditairement à l'Empire.* Mais aſſurément, s'ils n'avoient pas voulu „contracter cette obligation, ils auroient été arrêtés, & mis dans les „priſons publiques, comme Priſonniers d'Etat. Ceux donc qui étoient „préſens, dans la crainte d'être dépouillés de leurs biens, deman„derent un délai interlocutoire, & promirent, que dans l'Aſſemblée „prochaine, qui devoit ſe tenir à Würtzbourg, ils appuyeroient cette „demande de l'Empereur auprés de tous les Princes, & qu'ils les en„gageroient par toutes les voyes qui dépendroient d'eux, à donner leur „conſentement à ce que l'Empire devint hereditaire ; en ſorte que ſi „leurs conſeils étoient écoutés, l'affaire auroit une heureuſe iſſüe, „mais que s'il en arrivoit autrement, ils ne ſeroient reſponſables de „rien auprés de l'Empereur. Enſuite ſe rendant promtement à Würtz„burg, ils y donnerent leur conſentement aux propoſitions de l'Empe„reur, mais d'une maniere fort foible. Car quelques Princes, ſaiſis „par la crainte, accorderent leurs ſeaux à l'Empereur, d'autres y fu-

„rent

„rent engagés par toutes ſortes de voyes ; d'autres refuſerent de don-
„ner aucune reſolution déciſive, proteſtant qu'ils n'avoient aucune
„diſpoſition à traitter cette affaire. Il fut donc aiſé à l'Empereur de
„comprendre par cette conduite des Princes, quels étoient leurs veri-
„tables ſentimens. Hermann, Landgrawe de Thuringe, préſenta ſa
„fille encore en bas âge à l'Empire, & obtint qu'en vertu du ſuffrage
„des Princes, l'Empereur lui conſentiroit le droit à ſes Principautés.
„ . . . . . Cependant l'Empereur étant appellé par ſes affaires en Ita-
„lie, ... crut devoir agir par ſes Ambaſſadeurs en Allemagne,
„pour amener les eſprits au point qu'il deſiroit. . . . . Pour cet
„effet il fit partir le Bourgrave Burchard (de Quernſorde) qui ſe trou-
„voit alors par hazard auprés de lui, & le chargea de Lettres pour
„l'Allemagne . . . . . lequel étant arrivé à Erſord, ... renou-
„vella devant tous les Princes la propoſition de l'Empereur, & pro-
„duiſit les Lettres, par leſquelles il continuoit à demander que la ſuc-
„ceſſion à l'Empire fut renduë hèréditaire dans ſa famille, & que cela
„fut reglé d'une maniere irrevocable dans cette Aſſemblée. Mais pre-
„mierement, il n'y eut rien du tout de conclu à cet égard, & tout ce
„qui en arriva fut, que les Princes fatigués des dépenſes onereuſes
„qu'ils étoient obligés de faire, commencerent à ſe refroidir dans l'at-
„tachement qu'ils portoient à l'Empereur . . . . . qui voyant les dif-
„ficultés que les Princes d'Allemagne oppoſoient à la Succeſſion hé-
„réditaire, prit auſſi-tot une autre route, & diſſimulant adroitement
„ſes intentions, employa les ruſes ordinaires à ſes Ancêtres, pour
„effectuer ce dont il ne pouvoit venir à bout par autorité; auſſi parut-
„il bien clairement qu'il n'avoit point changé de volonté, lorsqu'il ſem-
„bla s'offrir une occaſion trés favorable d'obtenir ce qu'il avoit ſou-
„haité. Car ayant declaré aux Princes qu'il vouloit ſe déſiſter du pri-
„vilege qui lui avoit été accordé à cet égard, leur eſprit changea telle-
„ment tout à coup, que ceux qui peu auparavant ne faiſoient que plain-
„tes & menaces, aimant mieux être proſcrits & bannis que de ſouſcri-
„re, ſe rendirent à l'Aſſemblée qui fut indiquée à Francfort, & y élu-
„rent pour Succeſſeur à l'Empire Conſtantin (Frèderic) fils de l'Em-
„pereur encore en bas âge ; & ramenés à ſi peu de fraix de leur éloi-
gnement

„gnement, ils s'epuiſerent à combler l'Empereur de loüanges. C'eſt „ainſi que la paix ſucceda à la diviſion qui régnoit auparavant entre „l'Empereur & les Princes."

XXVI. Quoique tout ce recit ſemble établir l'imputation faite à Henri d'avoir voulu abolir le droit d'election à l'Empire, nous ne le croyons pourtant pas aſſez authentique, pour qu'on puiſſe y faire un fonds aſſuré. Le Compilateur de cette Chronique n'eſt point un Auteur contemporain, ni même d'un tems voiſin du règne de Henri, puiſqu'il va juſqu'à celui de Charles IV. & que le caractere du MS. ſe rapporte aux tems de l'Empereur Sigismond. * De plus, l'endroit de *Gervaiſe Tilberienſis* que nous avons cité ci-deſſus §. XIX. ne s'accorde point entierement avec celui de l'Auteur de cette Chronique, le premier aſſurant que la cauſe pour laquelle Henri étendit le droit de ſucceder aux fiefs de l'Empire, en l'accordant aux parens ſuivant les degrés de proximité, c'étoit pour obtenir la même choſe à l'egard de l'Empire en faveur de ſa poſterité ; au lieu que l'autre, comme nous l'avons vu, rapporte la choſe en ces termes : „Que le Landgrawe „Hermann, avec ſes autres Enfans & Officiers, ne reſpirant que le Signe „de la Croix . . . . . (l'Empereur) voulant accorder une licence pri„vilegiée dans le Conſiſtoire Imperial à tous ceux qui iroient à la Guer„re Sainte, par rapport à l'heritage de leurs poſſeſſions, en ſorte que „quiconque n'auroit point de fils d'une perſonne libre, pourroit le„guer ſon heritage à une fille, ou à l'heritier quelconque le plus pro„chain dans la Genealogie ; ſe propoſa d'augmenter encore par ce „moyen leur zele & leur dévotion." Peut-on s'empêcher de voir, que les accuſateurs de Henri accumulent pluſieurs choſes qui ne ſauroient ſubſiſter enſemble ; tandis qu'au contraire ceux qui ont écrit l'Hiſtoire de ces tems-là, gardent le plus profond ſilence ſur ces prétenduës entrepriſes de l'Empereur Henri VI. ſuivant la remarque que nous avons déjà faite §. VII.

* V. l. c. p. 159.

XXVII. Pour conclurre, nous nous rappellons encore ces paroles fort remarquables de *Felix Faber*, Moiné d'Ulm. † „Quoique la „mémoire des Empereurs de Soüabe ſoit demeurée en execration, & que

† Dans *Goldaſt Haiminsfeld, Script. Rer. Suev.* p. 110.

„que cela ſoit fondé ſur l'autorité des Saints Canons, auxquels il n'eſt „pas permis de contredire, il paroit cependant que ſi les Princes de „cette Maiſon avoient rencontré autant d'Apologiſtes que d'Accuſa„teurs, autant d'Ecrivains favorablement diſpoſés pour eux, que de „laches détracteurs, on verroit ſans contredit éclater bien des choſes „à leur avantage, & l'injuſtice de l'état où ils ont été réduits, ſe mani„feſteroit. Mais comme les ennemis de ces Princes ont été en même „tems leurs Juges, un ennemi ne ſauroit ſervir de témoin contre ſon „ennemi, & la ſimple négative ſuffit pour le réfuter dans les régles. „*Ut de teſt. quotiens.* La même choſe ſe prouve par ce qu'on lit *in c.* „*veniens 2 de teſte in fi.* Les Soüabes donc, vaincus par les témoigna„ges des Italiens leurs ennemis, gardent le ſilence, n'oppoſant aucune „contradiction aux diſcours, ni aux cris de leurs ennemis, & ne vou„lant point, pour la paix de l'Egliſe, ſe défendre, comme ils le pour„roient. C'eſt ce qui fait que la haine demeure ſur leur mémoire, & „cela verifie ce qui eſt dit dans les Paradoxes des Stoïciens; *Qu'il n'y „a rien de ſi incroyable, que les diſcours ne ſachent rendre probable.*

DISSERTATION
SUR HIPPOCRATE DE CHIO,
PAR M. CRAMER.

Hippocrate le Mathematicien étoit de Chio. Sa patrie le diſtingue du fameux Medecin qui étoit de Cos. *Plutarque* * nous dit qu'il avoit été Marchand. Mais le commerce ne lui réüſſit pas. Sans prudence, ſans génie pour les affaires, il perdit, par ſa ſottiſe, une ſomme conſiderable avec les Receveurs du 50. à Byzance. C'eſt d'*Ariſtote* † que nous tenons ce caractére d'*Hippocrate*, & ce trait de ſa vie. *Philoponus* * nous en aprend un autre, qui nous intereſſe d'avantage. Notre Marchand eut le malheur de tomber entre les mains des Pirates, & d'y perdre tout ſon bien. Apparemment, que ces Corſaires ſe réfugierent à Athenes, puiſqu'il vint les y pourſuivre. Mais le procés trainant en longueur, il s'amuſa, dans ſon loiſir, à écouter les Philoſophes, & il prit tant de goût pour la Géometrie, qu'il y fit des progrés admirables. Cette Etude developa chez lui un talent ſans pareil, † & qu'on n'auroit jamais crû trouver dans un Eſprit d'ailleurs lent & bouché. On aſſure que *Clavius*, bon Géometre du XVI. Siécle, avoit un génie de la même trempe.

* Vie de Solon, p. 413. Trad. de Dacier. 1735. 12.

† Eudemior. L. VIII. c. 14.

* Joh. Gramm. in Ariſtol. Phyſ. L. I. p. 13. Edit. Aldi. Ven. 1535.

† Proclus in Euc. Liv. III. p. 59.

Je ne ſais ſi les Mathematiques détournerent *Hippocrate* du commerce; mais du moins il en conſerva l'eſprit. Si l'on en croit *Jamblique*, * il ſe fit chaſſer de l'Ecole de *Pythagore*, pour avoir

* Apud Fabr. Bib. Gr. II. 13. p. 505.

avoir voulu trafiquer de ſa Géometrie. Ce procedé ne paſſoit pas pour honnête, & il marquoit peu de jugement. Car les Pythagoriciens faiſoient alors grande figure, & il n'y avoit point de meilleure compagnie que la leur.

Je n'enfle pas mes Eloges, & je ne me pique pas de peindre mon Heros uniquement par ſes beaux côtés. Qu'on ne ſe laiſſe pourtant pas trop prévenir contre lui. Ce qui me reſte à en dire eſt mieux. Il eſt rare qu'un Géometre ne païe tribut à la Phyſique. *Ariſtote* * nous a conſervé un morceau de celle d'*Hippocrate*, qui marque quelque génie. C'eſt un Syſtème ſur les queües des Cometes. Notre Philoſophe qui les regardoit, avec tous les Pythagoriciens, comme des Aſtres errants, ſouvent cachés ſous les raions du Soleil, & ſouvent perdus dans l'immenſité des Cieux, jugea fort bien que la queuë ne leur eſt pas eſſentielle. Il l'atribue à des Vapeurs dont elles ſe chargent, & dans leſquelles les raions du Soleil venant à ſe rompre, font paroitre un trait de lumiére, lors que la Comete eſt dans une poſition qui permet à ces raions rompus de venir à nos yeux. Il prétend expliquer par ce Syſtême, d'ou vient que les Cometes ne paroiſſent que dans la partie Septentrionale des Cieux, & rarement ou jamais, entre les Tropiques & au delà, du côté du Midi. Il faut croire qu'on regardoit cela comme un Fait, puis qu'*Hippocrate* cherche à l'expliquer. Des obſervations poſterieures contrediſent ce Principe. Au reſte dans le même endroit où *Ariſtote* cite notre Philoſophe, il nous aprend le nom d'un de ſes Diſciples, qui penſoit ſur les Cometes comme ſon Maitre. Il s'appelloit *Eſchyle*.

* *Meteorol.* l. 6.

Mais le côté brillant d'*Hippocrate*, c'eſt la Géometrie. C'eſt lui, dit *Proclus*, † qui en a le premier compoſé des Elémens. C'eſt donc lui, qui a ouvert à ſon Siecle & aux Siecles ſuivants les portes de la Géometrie, en ramaſſant les découvértes conſiderables de ſes Prédéceſſeurs, les rédigeant en bon ordre, & y ajoutant ce qui étoit néceſſaire pour en faire un corps bien lié. C'eſt donc notre Géometre, pour le dire en paſſant, qui a jetté les premiers fondemens de l'admirable Ouvrage d'*Euclide*. Car le même *Proclus* témoi-

† *In Eucl.* l. 1. p. 19.

gne qu'aprés *Hippocrate*, *Leon*, puis *Theudius*, & enſuite *Hermotime*, travaillerent à perfectioner les Elémens de la Géometrie, jusqu'à ce qu' *Euclide* vint & y mit la derniére main, avec tant de ſuccès que la Poſterité n'y a rien trouvé à changer. Revenons à *Hippocrate*.

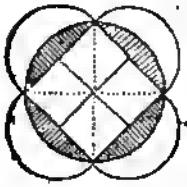
* p. 20. Edit. Hervag. 1544.

Eutocius, dans ſes Comment. ſur *Archimede*, * nous a conſervé une lettre d'*Eratoſthene* au Roi *Ptolomée*, dans laquelle il lui fait l'Hiſtoire d'un Problême fameux dans la Géometrie. Un ancien Auteur Tragique, dit-il, introduit le Roi *Minos*, qui fait élever un Tombeau à *Glaucus*. On lui vient raporter qu'on avoit donné 100. pieds en tout ſens à cet édifice : mais il le trouve trop petit, & ordonne qu'on le faſſe double. Si l'on donnoit 200. pieds à chacun de ſes côtés, on le feroit huit fois plus grand. C'étoit donc un Problême à réſoudre, que de doubler un Corps donné, en lui conſervant la même figure. Et comme il n'eſt point de Corps plus ſimple que le Cube, ce Problême s'appelloit la Duplication du Cube. Longtems, dit *Eratoſthene*, les Géometres y furent embaraſſés, lors qu'enfin *Hippocrate* de Chio s'aviſa le premier, qu'il faloit chercher deux moiennes proportionelles entre deux droites données, dont l'une ſoit double de l'autre, parce qu'alors le cube de la plus petite des deux moiennes eſt juſtement le double du cube de la plus petite des deux données. En démontrant cette Propoſition, il réduiſit le Problême de la Duplication du Cube au Problême de l'invention de deux moiennes proportionelles. Cette réduction n'eſt pas indifferente. Car encore que ce ſecond Problême ſoit, tout comme le premier, inacceſſible à la Géometrie Elementaire, il eſt bien plus facile d'en venir à bout par des tentatives, ou des voies mechaniques : & c'eſt beaucoup que d'avoir ſu réduire deux difficultés à une ſeule. C'eſt ainſi qu'on loüe *Archimede* d'avoir réduit le Problême de la Quadrature du Cercle au Problême de la rectification de ſa Circonference, & d'avoir réduit à la quadrature du Cercle la meſure des Cones, des Cylindres, de la Sphère, & de leurs ſurfaces. Et c'eſt ainſi qu'aujourdui pluſieurs beaux Problêmes ne ſont réſolus que *conceſſis figurarum quadraturis*, c'eſt à dire, que la ſolution de ces Problêmes eſt réduite à la quadrature de quelques eſpaces terminés par des lignes courbes. L'utilité de ces réductions eſt trés grande dans

la

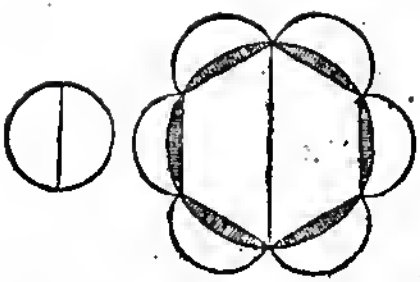
la Pratique. Auſſi *Proclus*, qui attribuë * à *Hippocrate* l'invention de cette Méthode, lui donne à ce ſujet les plus grands Eloges, & en parle comme d'un génie auſſi heureux dans la Géometrie que qui que ce ſoit. * In Euclid. L. III. p. 59.

Mais la découverte d'*Hippocrate*, qui l'a fait le plus connoître à la Poſterité, c'eſt la quadrature de la Lunule. Quoique ce ſoit une choſe fort connuë, il ne ſera pas inutile d'en dire ici un mot. On apelle Lunule [Μήνισκος] une figure de Croiſſant terminée par deux arcs de Cercles. Figurez-vous donc un Cercle; avec un quarré inſcrit, dont les Diagonales ſont des diamétres de ce Cercle. Imaginez de plus, quatre demi-cercles décrits ſur les quatre côtés du Quarré,



qui ſont avec les quatre arcs du grand Cercle quatre Lunules. Puiſqu'un quarré n'eſt que la moitié du quarré de ſa Diagonale, & que les Cercles ſont entr'eux comme les quarrés de leurs diametres, le Cercle auquel le quarré eſt inſcrit, & qui a pour diametre ſa diagonale, eſt double d'un Cercle qui auroit pour diametre le côté; il eſt donc égal aux quatre demi-cercles décrits ſur les côtés de ce quarré. Ainſi ôtant, & du grand Cercle, & des quatre demi-cercles, qui lui ſont égaux, les ſegments qui ſont communs à ces Figures, il y aura égalité entre les reſtes, qui ſont, d'une part le quarré inſcrit au Cercle, & de l'autre part les quatre Lunules. Chaque Lunule eſt donc égale au quart du Quarré, qui eſt lui-même un Quarré.

Voilà le premier eſpace circulaire qui ait été quarré, & cette quadrature, indépendamment de ce qu'elle a de curieux, ſert à prévenir une erreur où l'on pourroit tomber, & qu'il ſemble que *Des-Cartes* † même n'a pas évitée. C'eſt de croire que les Lignes droites & les Courbes ſont d'une nature ſi diſſemblable qu'il eſt impoſſible de les comparer. *Hippocrate* avoit donc lieu de s'aplaudir de ſa découverte, & il meriteroit toutes ſortes d'eloges, s'il s'en fut tenu là. Mais quelques pas qu'il voulut faire plus loin, le firent tomber dans un Sophiſme, que je ne ſais ſi l'on trouvera ingenieux ou groſſier. Le voici. Concevez deux Cercles, dont l'un ait un diametre double de † Geomet. Lib. II. p. 59. Edit. 1659 4.



l'autre : il ſera donc quatre fois plus grand. Inſcrivez lui un Hexagone régulier, dont chaque côté, égal au demi-diamétre de ce grand Cercle, ſera égal au diametre entier du petit Cercle. Sur les ſix côtés de cet Hexagone décrivez ſix demi-cercles, qui avec les ſix arcs du grand Cercle ſont ſix Lunules. Chacun de ces ſix demi-cercles étant égal à la moitié du petit Cercle, on aura, en comptant ces deux moitiés, huit demi-cercles, égaux enſemble à quatre Cercles tels que le petit, égaux par conſéquent au grand Cercle, qui eſt quadruple du petit. Donc ſi on ôte les ſegments, qui ſont communs au grand Cercle & aux huit petits demi-cercles, les reſtes ſont égaux. De la part du grand Cercle, il reſte l'Hexagone, & de la part des huit demi-cercles, il reſte le petit Cercle & les ſix Lunules. Si donc on retranche de l'Hexagone, figure rectiligne & quarrable, les ſix Lunules, qui ſont auſſi quarrables, il reſtera un eſpace quarrable égal au petit Cercle. On a donc trouvé la quadrature du Cercle, cherchée avec tant d'ardeur dés lors comme aujourdui.

C'eſt grand dommage qu'un raiſonnement qui débute fort bien, & qui aboutit à une Concluſion ſi deſirée, ſe tourne en Sophiſme à la derniere ligne. L'erreur conſiſte en ce qu'on affirme que les ſix Lunules ſont quarrables. Quoi, direz, vous, ne le ſont-elles pas ? Non. Celles qu'*Hippocrate* a quarrées, ne ſont pas celles qu'il emploie ici. Les premieres étoient compriſes entre une demi-circonference & un quart de circonference. Les autres ſont bien terminées d'un côté par une demi-circonference, mais l'arc qui les termine de l'autre côté n'eſt que la ſixieme partie de ſa circonférence. Il ſemble que ce n'eſt rien que la différence de ces deux ſortes de Lunules : mais dans le point dont il s'agit, c'eſt tout. Les unes ſont quarrables. Les autres ne le ſont pas, comme elles devroient l'être pour donner la quadrature du Cercle. On a peine à croire qu'*Hippocrate* ait pû s'y tromper, lui qui étoit ſi bon Geometre. Auſſi *Blancanus* * plein de zéle

* Loca Mathem. Ariſtot. §. 16.

zéle pour l'honneur de nôtre Mathematicien, prétend-il qu'il n'étoit pas lui même la dupe de ſon Sophisme, & qu'il le propoſoit ſeulement pour ſe divertir, & pour tenter l'habileté des autres Géométres. Il faut avoir bien de la pénétration pour lire ſi avant dans les penſées. Je ne ſaurois voir les choſes de ſi loin. Il me ſuffit qu'*Hippocrate* ait cru, on ait paru croire, avoir trouvé la quadrature du Cercle par le moien des Lunules. Il faut vous nommer mes garants. Le premier, c'eſt *Ariſtote* qui parle en pluſieurs endroits du Sophisme des Lunules *, ou, comme il l'apelle quelque fois, de la Quadrature par les ſegments. † Au I. Livre *de Sophiſt. Elench.* * il attribue nommément à *Hippocrate* ce Paralogisme (ψευδογραφήμα, expreſſion heureuſe, puisque l'erreur ne vient que d'une fauſſe figure,) & il l'oppoſe aux Sophismes d'*Antiphon* & *Bryſon*, leſquels, dit-il, péchant contre les Principes de la Géometrie, ne meritent point d'être réfutés par un Géometre, au lieu que celui d'*Hippocrate* retient les principes & demande une réfutation Géométrique. Ce qu'*Ariſtote* n'indique qu'en deux mots, ſes Commentateurs l'expliquent au long. Je ne parle pas des Commentateurs modernes, auxquels on ſeroit en droit de demander de qui ils l'ont apris. Je parle des anciens, *Alexandre* d'Aphrodiſée, *Themiſtius*, *Simplicius*, *Jean* le Grammairien, &c. qui ont écrit aux V. VI. & VII. Siécle, c'eſt à dire, dans des tems où il ſubſiſtoit encore des monuments, que, dans la ſuite, la faux du tems, l'ignorance des Chrêtiens, & l'aveugle piété des Arabes, ont conſumés. Ils ne manquent point à nous dire, dans leurs Commentaires ſur les endroits cités d'*Ariſtote*, que le Sophisme des Lunules eſt d'*Hippocrate* de Chio, qui a le premier conſideré & quarré cette figure. Leur témoignage n'eſt pas une ſimple tradition, & il eſt reſpectable par leur unanimité.

* Anal. prior. II. 25.

† Phyſic. I. 2. * Cap. 10.

On ne peut guéres douter que ce ne ſoit à ce même Sophisme que fait alluſion *Eutocius*, dans la Préface de ſon Commentaire ſur la meſure du Cercle par *Archimede*. † Il y dit que ce grand Homme a recherché une choſe, ſur laquelle *Hippocrate* de Chio & *Antiphon* s'étant fort exercés n'ont produit que les Paralogismes connus de ceux qui

† Pag. 40. Edit. Herval. 1544.

qui ont lû l'Hiſtoire de la Geometrie par *Eudemus*, & les Κήρια d'*Ariſtote*. Je laiſſe ce Titre en Grec, ne ſachant comment le rendre en François. Κήριον ſignifie un gateau de Cire, un Raion de miel. Mais quel raport de ce mot avec le Titre d'un Livre ? Il eſt vrai que les Titres ſingûliers peuvent être bien anciens, puisqu'ils ont leur origine dans la bizarrerie de l'Eſprit humain & dans l'envie de mettre de l'eſprit par tout.

A cette nuée de temoins, M. *Heinius* oppoſe uniquement *Proclus*, qui, dans le II. Livre de ſon Comment. ſur *Euclide*, attribue la quadrature de la Lunule à *Oenopide*. Il ſeroit pourtant juſte de balancer ſon témoignage avec celui des autres, & de diſcuter lequel mérite la préference. Mais ſans nous arrêter à cette comparaiſon, j'oppoſe à *Proclus Proclus* lui-même. Au III. Livre du Commentaire * cité, parlant d'*Hippocrate* de Chio, à l'occaſion de ſa Méthode des réductions, il dit poſitivement, qu'il a quarré la Lunule, ὃς καὶ Μηνίσκον τετραγώνισεν. A'qui croirons-nous donc, ſi *Proclus* eſt notre ſeul Oracle ? Sera-ce à *Proclus*, qui affirme qu'*Hippocrate* a quarré la Lunule, ou à *Proclus* qui donne cette Invention à un autre. Je ne crois pas que ce Problême ſoit fort difficile à réſoudre.

* Pag. 59

Je ne penſe pas même que c'en ſoit un. Dans l'endroit où on veut que *Proclus* parle d'*Oenopide*, comme de celui qui a quarré la Lunule, je prétends au contraire que c'eſt à *Hippocrate* qu'il en attribuë l'invention. Comme le ſentiment oppoſé eſt celui de M. *Heinius* & *Fabricius*, † deux Savants dont les lumieres ſont infiniment au deſſus des miennes, je n'oſerois penſer autrement qu'eux, ſans les plus fortes preuves. Je vais tacher de les développer, & pour cet effet, je préſente d'abord le Texte de *Proclus*, tel qu'il ſe trouve dans l'édition unique, à ce que je penſe, de cet Auteur. C'eſt celle d'*Hervagius*, à Baſle 1533. On y lit pag. 19. Μετὰ δὲ τοῦτον [Πυθάγοραν] Ἀναξαγόρας ὁ Κλαζομένιος πολλῶν ἐφήψατο καὶ τὰ Γεωμετρίαν· καὶ Οἰνοπίδης ὁ Χῖος, ὁ τὸν τοῦ Μηνίσκου τετραγωνισμὸν εὑρών, καὶ Θεώδωρος ὁ Κυρηναῖος ὀλίγῳ νεώτερος ὢν τοῦ Ἀναξαγόρᾳ, ὧν καὶ ὁ Πλάτων ἐν τοῖς Ἀνθεμιοῦσαις

† Bibl. Græc. l ib. II. cap. 14. §. 18.

Ἱερασαῖς ἐμημώνευσεν, ὡς ἐπὶ τοῖς μαθήμασι δόξαν λαβόντων. Ἐφ' οἷς Ἱπποκράτης ὁ Χῖος, ὁ τοῦ τῶ Μηνίσκε τετραγώνισμον εὑρών, καὶ Θεόδωρος ὁ Κυρηναῖος ἐγένοντο περὶ Γεωμετρίαν ἐπιφανεῖς. Πρῶτος γὰρ ὁ Ἱπποκράτης τῶν μνημονευομένων καὶ στοιχεῖα συνέγραψε. Πλάτων δὲ ἐπὶ τούτε γενόμενος καὶ τ. λ.

Je conviens enſuite avec ces deux Meſſieurs que cette phraſe repetée, ὁ τὸν τῶ Μηνίσκε τετραγώνισμον εὑρών, καὶ Θεόδωρος ὁ Κυρηναῖος doit être retranchée dans l'un des deux endroits où elle ſe trouve. Il n'eſt point croiable qu'*Oenopide* & *Hippocrate* aient tous deux trouvé la Lunule. La répetition de *Theodore* de Cyrene eſt viſiblement vicieuſe, & le mot Χῖος, qui précede la phraſe dans l'un & l'autre endroit, a pu facilement donner lieu au Copiſte, ou à l'Imprimeur, de repeter cette ligne par erreur. Mais au lieu que M. *Heinius* & *Fabricius* la retranchent de la ſeconde place, je crois qu'il faut plûtôt l'oter de la premiere, & voici mes raiſons.

1. Ces Meſſieurs font dire à *Proclus* que c'eſt *Oenopide*, & non *Hippocrate*, qui a quarré la Lunule : ce qui eſt contraire au témoignage d'*Ariſtote*, de tous ſes Commentateurs, & de *Proclus* même.

2. Selon eux, *Proclus*, aprés avoir nommé *Anaxagoras*, *Oenopide*, & *Theodore*, dit que *Platon* en a fait mention dans ſon Dialogue *des Amants*. Cette citation ſeroit fauſſe. *Platon* dans cet Ouvrage ne parle que d'*Anaxagoras* & d'*Oenopide*. Il ne dit pas un mot de *Theodore*.

3. Ils font faire quelques ſolécismes à *Proclus*. Car aiant effacé ce qu'ils veulent qu'on ſupprime, il reſteroit Ἐφ' οἷς Ἱπποκράτης ὁ Χῖος ἐγένοντο περὶ Γεωμετρίαν ἐπιφανεῖς. Qui pourroit ſupporter ces pluriels aprés le ſingulier ? Auſſi M. *Fabricius* change-t-il, de ſon autorité, ἐγένοντο en ἐγένετο, & ἐπιφανεῖς en ἐπιφανῆς.

4. Malgré cette correction, il reſte quelque incongruïté, en ce que *Proclus* repete le nom d'*Hippocrate* dans la même ligne ſans néceſſité. Ces Mrs. lui font dire, Ἐφ' οἷς Ἱπποκράτης ὁ Χῖος ἐγένετο περὶ

ἐν Γεωμετρίαν ἐπιφανῆς. Πρῶτος γαρ ὁ Ἱπποκράτης τῶν μνημονευομένων καὶ στοιχεῖα συνέγραψε. C'eſt au moins un défaut de ſtyle, dont on ne trouvera guéres d'exemples dans cet Auteur.

5. Un peu plus haut, *Proclus* diroit, Ἀναξαγόρας . . . καὶ Οἰνοπίδης . . . Καὶ Θεόδωρος ὁ Κυρηναῖος ὠλίγῳ νεώτερος ὢν τῦ Ἀναξαγόρᾳ, Veut-il dire de *Theodore* ſeul, qu'il étoit un peu plus jeune qu'*Anaxagoras*? Mais alors, pourquoi placer *Oenopide* entre deux, & le joindre à *Theodore* plûtôt qu'à *Anaxagoras*? Veut-il dire d'*Oenopide* & de *Theodore*, qu'ils ont été un peu plus jeunes qu'*Anaxagoras*? Mais alors pourquoi νεώτερος, & non pas νεώτεροι?

6. J'evite tous ces inconvenients, ſans faire aucun changement au Texte que celui d'effacer de la premiere place cette phraſe, dont on convient qu'elle doit être retranchée quelque part. De cette maniere, *Proclus* dit, qu'*aprés* Pythagore, Anaxagoras *de Clazoméne s'attacha extrémement à la Géometrie, auſſi bien qu'*Oenopide *de Chio, un peu plus jeune qu'*Anaxagoras, *desquels* Platon *parle dans* ſes Amants, *comme aiant acquis de la réputation dans les Mathematiques. Aprés eux,* Hippocrate *de Chio, celui qui a trouvé la quadrature de la Lunule, &* Theodore *de Cyrene, ſe ſont rendus illuſtres dans la Geometrie. Car* Hippocrate *eſt le premier qui en a compoſé les Elémens,* & Platon *formé ſur celui-là*, &c.

7. Ce narré s'acorde parfaitement avec ce que nous ſavons d'ailleurs de la Chronologie de ces Mathematiciens. *Anaxagoras* eſt né, ſelon *Diogene Laërce*, la 1. année de la 70. Olympiade. *Oenopide*, un peu plus jeune que lui, ſera né vers la 72. *Hippocrate* & *Theodore*, qui ſont venus aprés, auront paru vers la 80: de ſorte que *Platon*, né dans la 88. Olymp. aura fort bien pu être diſciple de *Theodore*, comme nous l'aprend *Diogene Laërce*, III. 6. & comme *Proclus* ſemble l'inſinuer.

Il eſt difficile de s'arranger auſſi bien dans le Syſtème de M. *Heinius* & *Fabricius*. Si *Theodore* eſt ſeulement un peu plus jeune qu'*Anaxagoras*, il faut qu'il ſoit né vers la 72. ou au plus, la 75. Olymp.

&

& qu'il ait eu 60. ans à la naiſſance de *Platon*. Il auroit donc été bien vieux, lorſque *Platon*, agé d'environ 30. ans, alla étudier ſous lui à Cyrène.

8. Ces preuves ſe fortifient par cette conſidération. C'eſt qu'il y a un ordre dans les verités Géometriques qui ne permet pas d'entendre, moins encore d'inventer, celles qui ſuivent ſans connoitre celles qui précedent. La quadrature de la Lunule ſuppoſe néceſſairement, ce me ſemble, ces deux Propoſitions; qu'un quarré n'eſt que la moitié du quarré de ſa diagonale, & que les Cercles ſont entr'eux comme les quarrés de leurs diamétres. Je crois volontiers que la premiere a été connuë d'*Oenopide*, & avant lui de *Pythagore*, parce que c'eſt une conſéquence fort ſimple de la Propoſition trouvée par ce grand Philoſophe, que le quarré de l'hypotenuſe eſt égal à ceux des deux autres côtés. Mais je ne penſe pas de même de la ſeconde. Du moins la demonſtration qu'en donne *Euclide*, Liv. XII. Prop. 2. ſuppoſe une Géometrie aſſez avancée. J'aurois donc peine à croire qu'*Oenopide* en fut venu là, lui dont les principales découvertes ont été, ſelon *Proclus* * la 12. & la 23. Prop. du I. Livre des Elémens: *Abaiſſer une perpendiculaire*, & *Faire un angle égal à un angle*. Il y a loin de là à la Lunule. Mais dans les 30. ou 40. ans, qui ſe ſont écoulés d'*Oenopide* à *Hippocrate*, la Géometrie, cultivée avec ardeur par les plus beaux Génies, a fait ſans doute de grands progrés, & celui-ci, qui avoit eſſaié & avancé juſqu'à un certain point le Problême de la Duplication du Cube, a pu fort naturellement être tenté de travailler ſur la quadrature du Cercle, & a du avoir les principes néceſſaires pour la quadrature de la Lunule.

* Libr. cit. pag. 75. & 87.

Si j'ai réüſſi à réhabiliter *Hippocrate* dans la gloire de l'invention de la Lunule, il ſera aſſez inutile d'écarter les reſſemblances que M. *Heinius* trouve entre *Oenopide* & *Hippocrate*, & desquelles il ſemble vouloir inferer qu' *Hippocrate* n'eſt qu'un perſonage imaginaire copié d'aprés *Oenopide*.

Ils ont, dit-il, tous deux fleuri pendant les mêmes années. Mais, au contraire, *Proclus*, de quelque maniere qu'on le liſe, dit qu' *Hippocrate*

pocrate n'eſt venu qu'après *Oenopide*. Il ſe peut bien que les années de la vieilleſſe de l'un aient été celles de la jeuneſſe de l'autre. Mais cela même les diſtingue aſſez.

Ils ont été, continue M. *Heinius*, tous deux peu eſtimables en Phyſique. Je conviens qu'il le prouve aſſez bien d'*Oenopide*, quoiqu'il ſoit vrai de dire que les Phyſiciens de cette datte-là méritent quelque indulgence. Mais je ne vois pas qu'il ait montré qu'*Hippocrate* étoit un mauvais Phyſicien. Son opinion ſur les queües des Cometes, qui eſt tout ce qui nous reſte de ſa Phyſique, peut bien être fauſſe, mais elle n'eſt pas ſi fort à mépriſer que pluſieurs Modernes ne l'aient fait revivre. Voiez *Riccioli Almag.* L. VIII. Sect. II. chap. 25. Il ſemble même qu'on en peut conclurre que notre Philoſophe avoit déjà obſervé que les queües des Comètes s'étendent toujours du côté oppoſé au Soleil, obſervation dont les Modernes ſe ſont fait honneur.

Il eſt vrai que Mr. *Heinius* trouve le caractère d'un Phyſicien ignorant dans la ſimplicité d'*Hippocrate*, qui lui fit perdre une groſſe ſomme avec les Reçeveurs de Byſance. Mais je crois que de très habiles Phyſiciens peuvent être la dupe des Fermiers, & que ceux qui n'ont aucune teinture de Phyſique n'en ſont pas moins propres à éviter les piéges de ces gens-là.

Mr. *Heinius* ajoute qu'*Hippocrate*, auſſi bien qu'*Oenopide*, a été en Egypte. Il ſe fonde ſur le paſſage de *Plutarque*, qui parlant des Philoſophes qui ont fait le commerce, nomme *Thales*, *Hippocrate* & *Platon*. Mais quoique le premier & le dernier aient fait le voiage d'Egypte, je ne vois pas que Mr. *Heinius* ſoit en droit d'inferer qu'il en eſt de même d'*Hippocrate*. *Plutarque* ne le joint aux deux autres que comme aiant fait le commerce. Ne pouvoit on pas commercer, ſans voyager en Egypte?

Je ne ſens pas, comme Mr. *Heinius*, que le trafic que faiſoit *Hippocrate* de ſa Géometrie, ſoit dans le caractère d'*Oenopide*. Il n'a point établi que ce Philoſophe fut avare & intéreſſé.

Enfin

Enfin, comme il n'eſt plus vraiſemblable qu'*Oenopide* ait part à la quadrature de la Lunule, on peut bien me permettre de conclure qu'*Oenopide* & *Hippocrate* ont été deux hommes differens; quoique tous deux de Chio, tous deux Mathématiciens, tous deux de la Secte de Pythagore.

Je finis par quelques Réflexions mathematiques que la Lunule d'*Hippocrate* m'a occaſionées. Les voici.

Trouver une infinité de Lunules quarrables.

La Lunule CEDFC (Fig. 1.) ſera quarrable, ſi le Secteur ACED compris entre l'arc CED & ſes raions AC, AD, eſt égal au Secteur BCFD, compris entre l'arc CFD & ſes raions BC, BD. Car ôtant, de l'un & de l'autre de ces deux Secteurs égaux, la partie commune BCED, il y aura égalité entre les reſtes, qui ſont, d'un côté, le quadrilatére ACBD, & de l'autre la Lunule CEDFC.

Or les Secteurs ACED, BCFD ſont égaux, ſi les angles CAD, CBD, ou leurs moitiés CAF, CBF ſont entr'eux en raiſon doublée inverſe des raions AC, BC. Car ſi l'on mene par le centre B le raion BG parallèle à AC, le Secteur GBF, eſt au Secteur CBF du même Cercle, comme l'angle GBF ou ſon égal CAE, à l'angle CBF. Mais le même ſecteur GBF eſt au ſecteur ſemblable CAE en raiſon doublée des raions BG ou BC & AC. Donc ſi les angles CAE, CBF ſont en raiſon doublée inverſe des raions AC, BC, le ſecteur GBF a la même raiſon aux ſecteurs CBF, CAE. Ils ſont donc égaux, auſſi bien que leurs doubles CBDF, CADE, & conſéquemment la Lunule CEDFC eſt quarrable.

Pour avoir donc tant de Lunules quarrables qu'on voudra, il ne s'agit que de décrire ſur une même corde CD deux arcs CED, CFD tels que les angles au Centre CAD, CBD, ſoient en raiſon doublée inverſe des raions AC, BC.

La Solution générale de ce Problême eſt transcendente, & ſuppoſe la multiſection indéfinie de l'angle. Il faut donc recourir à des

Courbes transcendentes. Par ex. ſi aprés avoir diviſé la demi-circonference ADB (Fig. 2.) en tant de parties égales qu'on voudra, on diviſe le diamétre AB en un pareil nombre de parties égales, & que prenant les points de diviſion correſpondants, E ſur la circonférence, & F ſur le diamétre on mene les droites EG, FG paralleles aux raions perpendiculaires CA, CD; que du point G où ces droites ſe coupent, on mene la droite GA & ſa perpendiculaire AH, qui coupe en H la droite GE prolongée, on pourra avoir une infinité de points H de la Courbe ALHKA, qui donne fort ſimplement une infinité de Lunules quarrables. On voit que ſa nature conſiſte en ce que AF ou IG troiſieme proportionelle de l'ordonnée HI à l'abſciſſe AI a une raiſon donnée à l'arc correſpondant AE ſavoir, celle du diamétre AB à la demi-circonf. ADB.

Donc, ſi on mene une droite quelconque CL parallele à CD, qui coupe cette Courbe aux points K & L, desquels on mene KM, LN, paralleles à AB, & qui rencontrent la circonference en M & N, qu'on tire le raion NC & par le point M une droite MO parallele à NC, qui coupe en O la droite AB prolongée s'il le faut; qu'enfin du centre O ou decrive par le point M l'arc de Cercle MTV; Je dis que cet arc comptendra avec l'arc MAV une Lunule MAVTM, qui ſera quarrable.

Car, par la nature de la Courbe, l'arc AM eſt à la 3e. proportionelle de KR à RA, qui eſt $AR^2 : KR$ comme l'arc AN à la 3e. proportionelle de LS à AS, qui eſt $AS^2 : LS$. Donc, *alternando*, l'arc AM eſt à l'arc AN, ou l'angle ACM à l'angle ACN, ou TOM, comme AR^2, KR eſt à $AS^2 : LS$, ſoit AR^2 à AS^2, puiſque KR & LS ſont égales, ou comme PM^2 à QN^2, ou enfin comme OM^2 à CN^2, puiſque les triangles POM, QCN ſont ſemblables. Ainſi les ſecteurs ACM, TOM ont leurs angles en raiſon doublée inverſe de leurs raions. Ils ſont donc égaux, auſſi bien que les ſecteurs doubles MAVCM, MTVOM. La Lunule MAVTM eſt donc égale au quadrilatére MOVC, & par conſéquent quatrable.

Mais

Mais laiſſant cette Conſtruction générale, qui doit paſſer pour méchanique, puiſque la Courbe AKHLA eſt transcendante, & qui ne peut proprement ſervir qu'à trouver des Solutions approchées: Si l'on veut ſe renfermer dans les bornes des ſolutions algebriques, on pourra conçevoir la Courbe KCL (Fig. 1.) dont la nature ſoit telle que menant d'un de ſes points quelconque C, aux deux points donnés A, B, les droites CA, CB, les angles CAF, CBF ſoient entr'eux en raiſon donnée de m à n; & le Cercle ICH, dont la nature eſt telle, que menant d'un de ſes points quelconque C les droites CA, CB, elles ſoient entr'elles en raiſon de $\sqrt{m}$ à $\sqrt{n}$. Le point C, où ces deux Courbes ſe coupent, ſera celui par lequel décrivant, des centres A & B, les arcs CED, CFD, les ſecteurs ACEDA, BCFDB ſeront égaux, & la Lunule CEDFC ſera quarrable.

Quand la raiſon de m à n eſt rationelle, la Courbe KCL eſt algébrique. On peut en trouver facilement une infinité de points par les Sections angulaires, & même par la Géométrie élémentaire, toutes les fois qu'un des deux nombres, m ou n, ait ou l'unité, ou une puiſſance de 2. Il ſeroit même aiſé de conſtruire un Inſtrument qui feroit tourner deux droites AC, BC, autour des points A, B, deſorte que leurs viteſſes angulaires fuſſent en raiſon de m à n; & alors l'interſection C de ces deux droites décriroit la Courbe KCE.

L'équation générale de cette Courbe, en nommant AB, 1; AP, x; BP, z; PC, y; eſt $\pm \left(\frac{y - z\sqrt{-1}}{y + z\sqrt{-1}}\right)^m = \left(\frac{y - x\sqrt{-1}}{y + x\sqrt{-1}}\right)^n$, où le ſigne + doit ſervir, quand les deux nombres m & n ſont impairs, & le ſigne —, quand l'un des deux eſt pair. Si on développe ces Puiſſances, qu'on ôte les termes communs de part & d'autre, & qu'on diviſe par les communs diviſeurs, il en réſultera cette équation

$$x^{n-1}z^m - \frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}x^{n-3}z^m yy + \frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}\times\frac{n-3}{4}\times\frac{n-4}{5}x^{n-5}z^m y^4 \&c. = 0.$$

$$mx^n z^{m-1} + \frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{m}{1}x^{n-2}z^{m-1}yy - \frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}\times\frac{n-3}{4}\times\frac{m}{1}x^{n-4}z^{m-1}y^4$$

$$- \frac{n}{1}\times\frac{m}{1}\times\frac{m-2}{2}x^{n-1}z^{m-2}yy + \frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}\times\frac{m}{1}\times\frac{m-1}{2}x^{n-3}z^{m-2}y^4$$

$$+ \frac{m}{1}\times\frac{m-1}{2}\times\frac{m-2}{3}x^n z^{m-3}yy - \frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{m}{1}\times\frac{m-1}{2}\times\frac{m-2}{3}x^{n-2}z^{m-3}y^4$$

$$+ \frac{n}{1}\times\frac{m}{1}\times\frac{m-1}{2}\times\frac{m-2}{3}\times\frac{m-3}{4}x^{n-1}z^{m-4}y^4$$

$$- \frac{m}{1}\times\frac{m-1}{2}\times\frac{m-2}{3}\times\frac{m-3}{4}\times\frac{m-4}{5}x^n z^{m-5}y^4$$

dans laquelle, quoiqu'il paroiſſe trois inconnuës, il eſt pourtant aiſé de les réduire à deux, puiſque $z = x - 1$, ou $x = z + 1$. Cette équation eſt ordonnée ſelon les puiſſances paires de y, y^0, y^2, y^4, y^6, y^8, &c. & l'on en trouvera ſans peine les coëfficients par cette Régle, quoique d'ailleurs la Loy de continuation ſoit aſſez manifeſte.

Qu'on éleve $z + 1$ à la puiſſance m, & $x + 1$ à la puiſſance n, & ſoient ces puiſſances $z^m + az^{m-1} + bz^{m-2} + cz^{m-3}$ &c. $x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3}$ &c. Qu'on change, de deux en deux, les ſignes des termes de ces ſeries, deſorte qu'alternativement les termes correſpondants aient même ſigne & differents ſignes, comme on le voit-ici,

$$\begin{array}{l|l|l|l} z^m - az^{m-1} & -bz^{m-2} + cz^{m-3} & +dz^{m-4} - ez^{m-5} & \&c. \\ x^n + Ax^{n-1} & -Bx^{n-2} - Cx^{n-3} & +Dx^{n-4} + Ex^{n-5} & \&c. \end{array}$$

Aprés quoi, pour avoir le coëfficient de y^0, on prendra les deux premiers termes de chaque ſerie, & les multipliant en croïx, on aura $Ax^{n-1}z^m - ax^n z^{m-1}$. Pour avoir le coëfficient de yy, on prendra les quatre premiers termes de chaque ſerie & les multipliant les uns par les autres dans un ordre retrograde, on aura $-Cx^{n-3}z^m + Bax^{n-2}z^{m-1} - Abx^{n-1}z^{m-2} + cx^n z^{m-3}$. De même, prenant les ſix premiers termes de chaque ſérie, & les multipliant en ordre retrograde, on aura $Ex^{n-5}z^m - Dax^{n-4}z^{m-1} + Cbx^{n-3}z^{m-2} - Bcx^{n-2}z^{m-3} + Adx^{n-1}z^{m-4} - ex^n z^{m-5}$, pour le coëfficient de y^4, & ainſi de ſuite. C'eſt ainſi qu'on a calculé ces équations,

ſi $m=1, n=2$ .... $(xx-2x)+yy=0$. Equation au Cercle, conformément à Eucl. III. 20

ſi $m=1, n=3$ .... $(2x^3-3xx)+(2x+1)yy=0$... Equat. à une Courbe du 3e. Ordre, Eſpéce 41e. de Mr. Newton.

ſi $m=2, n=3$ .... $(x^4-4x^3+3xx)+(2xx-4x-1)yy+y^4=0$.

ſi $m=1, n=4$ .... $(3x^4-4x^3)+(2xx-4x)yy-y^4=0$.

ſi $m=3, n=4$ .... $(x^6-6x^5+9x^4-4x^3)+(3x^4-12x^3+6xx+4x)yy+(3xx-6x-3)y^4+3y^5=0$.

ſi $m=1, n=5$ .... $(4x^5-5x^4)+(10x^2)yy-(4x+1)y^4=0$.

ſi $m=2, n=5$ .... $(3x^6-8x^5+5x^4)+(5x^4-10xx)yy+(xx+8x+1)y^4-y^6=0$.

ſi $m=3, n=5$ .... $(2x^7-9x^6+12x^5-5x^4)+(6x^5-15x^4+10x^2)yy+(6x^3-3xx-12x+1)y^4+(2x+3)y^6=0$.

ſi $m=4, n=5$ .... $(x^8-8x^7+18x^5-16x^4+5x^3)+(4x^6-24x^5+30x^4+20x^2-40x)yy-(4x^4+24x^3-6xx-16x-1)y^4+(4xx-8x-6)y^6=0$.

On peut auſſi, & cela eſt ſouvent plus court & plus ſimple, ſubſtituer dans ces équations au lieu de yy ſa valeur $-xx + \frac{2n}{n-m}x - \frac{.n}{n-m}$, ce qui donnera une équation en x, d'où l'on tirera la valeur de cette inconnuë, qui fera enſuite connoitre y. Ainſi quand $m = 1$ & $n = 2$, ou a $x = 1$, & $y = 1$, ce qui eſt le cas de la Lunule d'*Hippocrate*; quand $m = 1$ & $n = 3$, on a $xx = \frac{3}{4}$ & $yy = \frac{3}{4}\sqrt{3} - \frac{9}{4}$; quand $m = 2$ & $n = 3$, ou a $7xx - 15x + 6 = 0$, ou $x = \frac{15-\sqrt{57}}{14}$, & $y = \frac{\sqrt{(390 - 54\sqrt{57})}}{14}$. Ainſi ces deux Cas, qui ſembloient dependre de la triſection de l'angle, donnent pourtant géometriquement des Lunules quarrables. Je ne dis rien des Quadratures partiales de ces Lunules. Cela me meneroit trop loin.

TABLE.

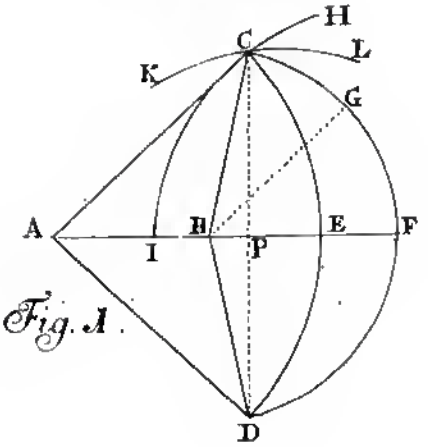


Fig. 1.

Fig. 2.

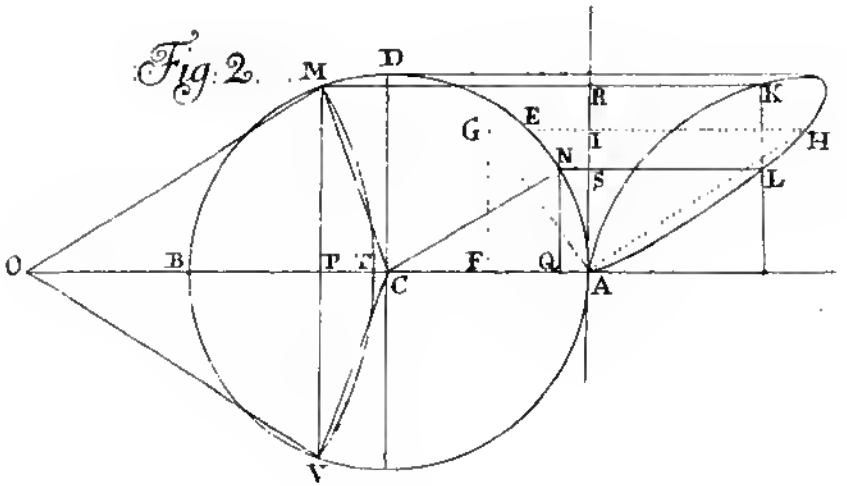


TABLE.

CLASSE de Philoſophie Experimentale.

Eſſai *ſur la formation des Corps en général, par M.* ELLER. pag. 3.
Recherches *ſur la nature & les proprietés du Fiel de Verre, par M.* POTT. p. 16.
Sur les moyens propres à découvrir la conſtruction des viſceres, par M. LIEBERKUHN. p. 28.
Obſervations *ſur la veritable Oſteocolle de la Marche de Brandebourg, par M.* GLEDITSCH. p. 32.
Experiences Chymiques, *faites ſur l'Oſteocolle de la Marche, par M.* MARGGRAF. p. 52.
Conjecture *ſur l'uſage des Corps diaphanes de* Michelius, *dans les Champignons à lame, par M.* GLEDITSCH. p. 60.

CLASSE de Mathematique.

Sur la vibration des Cordes, par M. EULER. p. 69.
Sur l'accord des deux dernieres Eclipſes du Soleil & de la Lune avec mes Tables, pour trouver les vrais momens des Pleni-Lunes & Novi-Lunes, par M. EULER. p. 86.
Obſervation *de l'Eclipſe Annulaire du Soleil le 25. Juillet 1748. ſelon le nouveau ſtile, à Berlin, par M.* KIES. p. 99.
Sur l'Atmoſphere de la Lune, prouvée par la derniere Eclipſe du Soleil, par M. EULER. p. 103.
Sur le frottement des Corps ſolides, par M. EULER. p. 122.
Sur la diminution de la réſiſtance du frottement, par M. EULER. p. 133.
Recherches *ſur les plus grands & plus petits qui ſe trouvent dans les actions des forces, par M.* EULER. p 149.

Réfléxions *ſur quelques Loix générales de de la Nature qui s'obſervent dans les effets des forces quelconques, par M.* EULER. p. 189.
Sur une Contradiction apparente dans la doctrine des Lignes Courbes, par M. EULER. p. 219.
Démonſtration *ſur le nombre de points, où deux lignes des ordres quelconques peuvent ſe couper, par M.* EULER. p. 234.
Suite des *Recherches ſur le Calcul integral, par M.* d'Alembert. p. 249.
Obſervation *de l'Eclipſe partiale de Lune du 8. Aout 1748. par M.* KIES. p. 292.

CLASSE de Philoſophie Speculative.

Diſſertation *ſur le Philoſophe* Clitomachus, *Succeſſeur de* Carneade *dans l'Academie, par M.* HEINIUS. p. 295.
Réfléxions *ſur l'Eſpace & le Tems, par M.* EULER. p. 324.
Reſléxions *ſur la Liberté, par M.* FORMEY. p. 334.
Remarques *ſur le principe de la conſervation des forces vives, pris dans un ſens général, par M.* D. BERNOULLI. p. 356.

CLASSE de Belles Lettres.

FREDERIC III. premier Roi de Pruſſe. p. 367.
DES MŒURS, des Coutumes, de l'Induſtrie, des Progrés de l'Eſprit humain dans les Arts & dans les Sciences. p. 395.
REPONSE de M. *de Maupertuis.* p. 423.
DE LA Superſtition & de la Religion. p. 425.
Diſſertation *ſur l'Ile de la Déeſſe* Hertham, *ou* Erdamme, *& ſur les Adorateurs de cette Divinité,* par M. ELSNER. p. 441.
Recherches *ſur l'abrogation du droit d'elire un Roi des Romains, fauſſement imputée à l'Empereur HENRI VI. par* M. le Comte DE KEYSERLING. p. 465.
Diſſertation *ſur Hippocrate de Chio, par* M. CRAMER. p. 482.